

О ВЛИЯНИИ СВЯЗАННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И
МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ПОВЕДЕНИЕ ИХ
ХАРАКТЕРИСТИК В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ

Саргсян А.М.

Ա.Մ. Սարգսյան

Կտոր առ կտոր համասեմ մարմնում էլեկտրական և մեխանիկական դաշտերի կապակցվածության ազդեցությունը նրանց բնութագրիչների վրա

Էլեկտրաստատիկականության գծային տեսության դրվածքով հետազոտված է կտոր առ կտոր համասեմ սեպի տեսք ունեցող բնդայանական կտրվածքով սրիզմած և մարմնի էլեկտրաստատիկական հավասարակշռությունը, երբ մի եզրում աքված են առաձգական լարումը և էլեկտրաստատիկ պոտենցիալը, իսկ մյուս եզրում՝ առաձգական տեղափոխումները և էլեկտրաստատիկ պոտենցիալը:

Բացանայությամբ է բավարարյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում դաշտերի կապակցվածության ազդեցությունը առաձգական լարումների և էլեկտրական դաշտի լարվածության վազրի վրա:

A.M. Sargsian

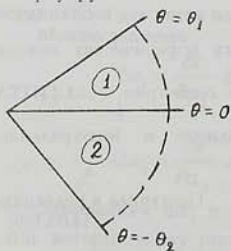
On the influence of electrical and mechanical fields connection on the behaviour of their characteristics in a piece - homogeneous body

В постановке линейной теории электроупругости исследовано электроупругое равновесие призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного тела, когда на одной грани заданы упругое напряжение и электростатический потенциал, а на другой грани – упругое перемещение и электростатический потенциал.

Выяснено влияние связанности электрических и механических полей на поведение упругих напряжений и напряженности электрических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела.

В работах [1,2] исследованы две задачи электроупругости для составного призматического тела, когда на его границах заданы либо упругие напряжения и электрические потенциалы, либо упругие перемещения и электрические потенциалы.

В данной работе с целью выяснения влияния связанности электрических и механических полей на поведение упругих напряжений и напряженности электрических полей рассматривается антиплоская смешанная задача электроупругости для составного призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина, изготовленного из пьезокристаллов класса 4mm, 6mm и т.д. с различными электроупругими свойствами.



Փիգ. 1

На одной границе призматического тела заданы упругое напряжение и электрический потенциал, а на другой границе – упругое перемещение и электрический потенциал. Главная ось симметрии пьезокристаллов (ось z) перпендикулярна к поперечному сечению составного тела и проходит через вершину кусочно-однородного клина (фиг.1).

В цилиндрической системе координат решение антиплоской задачи электроупругости для составного тела приводится к интегрированию дифференциальных уравнений [3]

$$\Delta u_j(r, \theta) = 0, \quad \Delta \phi_j(r, \theta) = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

со следующими граничными

$$e_{44}^{(1)} \frac{\partial u_1}{r \partial \theta} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{r \partial \theta} = \varphi_1(r), \quad \phi_1(r, \theta) = \psi_1(r), \quad \theta = \theta_1, \quad (2)$$

$$u_2(r, \theta) = f_2(r), \quad \phi_2(r, \theta) = \psi_2(r), \quad \theta = -\theta_2$$

и контактными условиями при $\theta = 0$

$$\begin{aligned} e_{44}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} &= e_{44}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + e_{15}^{(2)} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \\ e_{15}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \varepsilon^{(1)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} &= e_{15}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \varepsilon^{(2)} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_1(r, \theta) = u_2(r, \theta), \quad \phi_1(r, \theta) = \phi_2(r, \theta)$$

где u_j - упругие перемещения, ϕ_j - электростатические потенциалы, Δ - двумерный оператор Лапласа, $e_{44}^{(j)}$, $e_{15}^{(j)}$, $\varepsilon^{(j)}$ - модули упругости, пьезомодули и диэлектрические проницаемости пьезоматериалов, $\varphi_1(r)$, $f_2(r)$ и $\psi_j(r)$ - заданные функции.

Первое граничное и первые два контактных условия получаются из уравнений состояния [3]

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(j)} &= c_{44}^{(j)} \gamma_{\theta z}^{(j)} + e_{15}^{(j)} E_{\theta}^{(j)}, \quad \tau_{rz}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \gamma_{rz}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_r^{(j)} \\ D_{\theta}^{(j)} &= e_{15}^{(j)} \gamma_{\theta z}^{(j)} + \varepsilon^{(j)} E_{\theta}^{(j)}, \quad D_r^{(j)} = e_{15}^{(j)} \gamma_{rz}^{(j)} + \varepsilon^{(j)} E_r^{(j)} \\ \gamma_{\theta z}^{(j)} &= \frac{\partial u_j}{r \partial \theta}, \quad \gamma_{rz}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial r}, \quad E_{\theta}^{(j)} = -\frac{\partial \phi_j}{r \partial \theta}, \quad E_r^{(j)} = -\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\tau_{\theta z}$, τ_{rz} , $\gamma_{\theta z}$, γ_{rz} - компоненты упругих напряжений и деформаций, D_{θ} , D_r , E_{θ} , E_r - компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля.

Решение краевой задачи (1) - (3) получается с помощью интегрального преобразования Меллина в виде [1,2]

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_{1j}(p, \theta)}{\Delta_3(p)} r^{-p-1} p dp, \quad \tau_{rz}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_{2j}(p, \theta)}{\Delta_3(p)} r^{-p-1} p dp \quad (5)$$

где путь интегрирования L лежит в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \delta$, определяемой поведением функций при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ [1,2,4]

$$\begin{aligned} F_{1j}(p, \theta) &= [c_{44}^{(j)} B_j + e_{15}^{(j)} D_j] \cos p\theta - [c_{44}^{(j)} A_j + e_{15}^{(j)} K_j] \sin p\theta \\ F_{2j}(p, \theta) &= [c_{44}^{(j)} A_j + e_{15}^{(j)} K_j] \cos p\theta + [c_{44}^{(j)} B_j + e_{15}^{(j)} D_j] \sin p\theta \\ \Delta_3(p) &= (a_+ C_+ + a_- C_-)(b_+ S_+ - b_- S_-) + a_+ b_2 (e_+ C_+ + e_- C_-)(C_+ - C_-) \\ 0.25 a_1 \Delta_3(p) A_j &= \bar{\varphi}_1^*(p) \eta(b) S_2 + \bar{f}_2(p) [a \eta(b) C_1 + a_+ b_2 \xi(e) S_1] a_1 + \\ &+ \bar{\psi}_1(p) b_1 e_1 \xi(e) S_2 + \bar{\psi}_2(p) e_1 (b_1 S_1^2 + b e) S_2 \\ -0.25 a_1 \Delta_3(p) K_j &= e_1 b_2 e_1^{-1} [\bar{\varphi}_1^*(p) C_2 + \bar{f}_2(p) a_1 S_1] S_1 S_2 + \\ &+ \bar{\psi}_1(p) a_1 b_2 \xi(a) S_2 + \bar{\psi}_2(p) a_1 \xi(b_3) S_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$0.25a_1 b_3^{j-2} \Delta_3(p) B_j = [\bar{\varphi}_1^*(p) C_2 + \bar{f}_2(p) a_1 S_1] \eta \left(b_4 (b b_4^{-1})^{j-1} \right) + \bar{\psi}_1(p) e_1 b_0 \times \\ \times \left(\frac{b}{b_0} \right)^{j-1} \xi \left(\frac{(e b_0)^{j-1}}{b_0} \right) + \bar{\psi}_2(p) \left[b_1^{-1} S_1^2 S_2 + (-1)^j b_5 \xi(b_5^{-1}) \left(\frac{b e C_2}{b_5 \xi(b_5^{-1})} \right)^{j-1} \right] \\ 0.25a_1 b_3^{j-2} \Delta_3(p) D_j = (-1)^{j+1} e_1 \varepsilon_1^{-1} b_6 \left(\frac{b_2}{b_6} \right)^{j-1} [\bar{\varphi}_1^*(p) C_2 + \bar{f}_2(p) a_1 S_1] C_j S_{3-j} - \\ - \bar{\psi}_1(p) e_1 b_7 \xi(b_7^{-1}) \left(\frac{b \xi(a)}{b_7 \xi(b_7^{-1})} \right)^{j-1} + \bar{\psi}_2(p) a_1^{2-j} \left[(\varepsilon + a_0 e) \left(\frac{b}{\varepsilon + a_0 e} \right)^{j-1} \xi(a) C_1 + \right. \\ \left. + (-1)^{j+1} b_8 \left(\frac{e_1^2 \varepsilon_1^{-1} b_2 S_1^2}{b_8 C_1^2} \right) C_1^2 C_2 \right]$$

$$\eta(x) = S_1 C_2 + x C_1 S_2, \quad \xi(x) = S_1 S_2 - x C_1 C_2, \quad x \xi \left(\frac{1}{x} \right) = x S_1 S_2 - C_1 C_2$$

$$b = \frac{1+a_0}{\varepsilon+a_0 e}, \quad b_1 = \frac{\varepsilon-e}{\varepsilon+a_0 e}, \quad b_2 = \frac{a-e}{\varepsilon+a_0 e}, \quad b_3 = \frac{a\varepsilon+a_0 e^2}{\varepsilon+a_0 e}$$

$$b_4 = \frac{a+a_0 e}{a\varepsilon+a_0 e^2}, \quad b_5 = \frac{\varepsilon-e}{a\varepsilon+a_0 e^2}, \quad b_6 = \frac{a-e}{a\varepsilon+a_0 e^2}, \quad b_0 = b_4 + b_5$$

$$b_7 = b_3^{-1} - a_0 b_6, \quad b_8 = b_3^{-1} + a_0 e b_2, \quad \varepsilon_j = \varepsilon^{(j)}$$

$$C_j = \cos p \theta_j, \quad S_j = \sin p \theta_j, \quad C_{\pm} = \cos p \theta_{\pm}, \quad S_{\pm} = \sin p \theta_{\pm}$$

$$a = \frac{c_{44}^{(2)}}{c_{44}^{(1)}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}}, \quad e = \frac{e_{15}^{(2)}}{e_{15}^{(1)}}, \quad a_0 = \frac{e_{15}^{(1)} e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)} \varepsilon^{(1)}}$$

$$a_{\pm} = a \pm 1, \quad b_{\pm} = b \pm 1, \quad \theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_2$$

$\bar{\varphi}_1^*(p), \bar{f}_2(p), \bar{\psi}_j(p)$ - преобразования Мелина функции $r\varphi(r), f_2(r), \psi_j(r)$ соответственно.

Формулы для компонентов вектора электрической индукции получаются из (5), (6) путем замены в $F_{1j}(p, \theta)$ и $F_{2j}(p, \theta)$ $c_{44}^{(j)}$ на $e_{15}^{(j)}$, а $e_{15}^{(j)}$ - на $(-\varepsilon_j)$.

Для исследования поведения упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного тела (точка A на фиг.1) допущим прямую L влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах.

Если полюсами подынтегральных функций (5) являются только корни уравнения

$$\Delta_3(p) = 0 \quad (7)$$

и все они просты, будем иметь

$$\tau_{\theta z}^{(j)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{1j}(-p_n, \theta)}{\Delta_3^*(-p_n)} p_n r^{\rho_n-1}, \quad \tau_{rz}^{(j)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{2j}(-p_n, \theta)}{\Delta_3^*(-p_n)} p_n r^{\rho_n-1} \quad (8)$$

где $\Delta_3^*(p_n) = d\Delta(p)/dp$, $-p_n$ - корни уравнения (7), причем $\text{Re } p_n > 0$, $\text{Re } p_1 < \text{Re } p_2 < \dots, (n = 1, 2, 3, \dots)$.

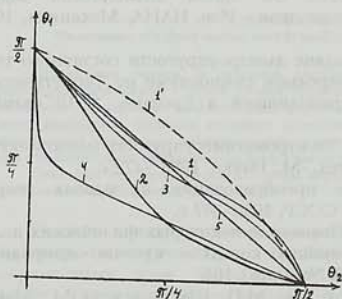
В случае существования непростых полюсов формула вычисления вычетов в таких точках будет иная [4].

На основании (8) заключаем, что около края поверхности контакта характер напряженного состояния определяется величиной действительной части первого корня $p_1 = \xi_1 + i\eta_1$. При $\xi_1 > 1$ в окрестности угловой точки A имеет место нулевое напряженное состояние (малонапряженное состояние). Если $\xi_1 < 1$, то при приближении к угловой точке A напряжения неограниченно возрастают (концентрационное состояние). В случае $\xi_1 = 1$ напряжения в окрестности точки A конечны и вообще отличны от нуля (предельное состояние).

В частном случае, когда $a = e$, из (7) следует, что

$$(a_+ C_+ + a_- C_-)(b_+ S_+ - b_- S_-) = 0 \quad (9)$$

Равенство нулю первого множителя (9) приводит к известному уравнению антиплоской задачи теории упругости [5]. Соответствующая предельная кривая (построенная из условия $\text{Re } p_1 = 1$), которая в плоскости θ_1, θ_2 при конкретных значениях $a = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(1)}$ разделяет области малонапряженности ($\text{Re } p_1 > 1$) и концентрационного состояния ($\text{Re } p_1 < 1$), представлена на фиг.2 сплошной линией.



Фиг. 2

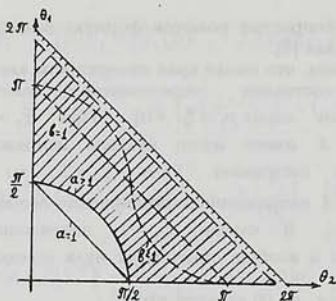
Следовательно, в рассмотренном случае пьезоэффект не влияет на степень особенности напряжений.

Полагая в (5)-(7) $a = e = \varepsilon = 1$, приходим к решению задачи электроупругости однородного клина, для которого $p_1 = \pi/2(\theta_1 + \theta_2)$. Таким образом, и в однородном клине при данных граничных условиях пьезоэффект не влияет на особенность упругих напряжений.

С целью выявления основных закономерностей возникновения нулевого напряженного состояния или концентрации напряжений около края поверхности контакта составного тела на ЭВМ определены первые корни уравнения (7) в зависимости от электромеханических и геометрических параметров следующих соединяемых пар: 1. ЦТС4-ZnO, 2. ЦТС4-CdS, 3. ЦТС19-ZnO, 4. ZnO-CdS, 5. ЦТС4-ЦТС19. Материалы соединяемых пар и их свойства заимствованы из [6].

Соответствующие предельные кривые представлены на фиг. 3. Там же пунктирной линией приведена предельная кривая в предположении отсутствия пьезоэффекта.

Равенство нулю второго множителя приводит к предельной кривой, приведенной на фиг.2 пунктирной линией. Соответствующая случаю $a = e$ предельная кривая является границей области, заштрихованной простой штриховкой (область концентрации напряжений).



Фиг. 3

Видно, что связанность электрических и механических полей сильно влияет на поведение упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела. в данном случае имеет место расширение зоны концентрации напряжений.

Все сказанное выше о поведении упругих напряжений справедливо также для компонентов векторов электрической индукции и напряженности электрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела - Изв. НАНА, Механика, 1995. №4, с. 47-54.
2. Саргсян А.М. Антиплоская задача электроупругости составного тела. Работа доложена на Международном симпозиуме по Теоретической и прикладной Механике, приходившей в Ереване, 17-19 октября 1994г.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. -М.: Наука, 1988. -472 с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963.-367 с.
5. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела.- Докл. АН АрмССР, 1988, №4, с.161-165.
6. Акустические кристаллы (под ред. М.П. Шаскольской).-М.: Наука, 1982. 632 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.11.1995