ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

О СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ДЕФОРМАЦИЯМИ ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Саркисян А.А.

Ա.Ա.Սարգսյան

Օպտիկական պատկերի պարամետրերի և անդրադարձնող մակերևույթի դեֆորմացիաների կապի մասին

Անդրադարձնող օպտիկական մակերևույթների ստուգման համար գոյություն ունեն անաբերացիոն կետերի հատկությունների վրա հիմնված բազմազան մեթոդներ: Այդ հարցը գրականության մեջ բավարար ծավալով լուսաբանված է: Մեթոդների նպատակը օպտիկական մակերևույթների շեղումներով (իդեալականից) պայմանավորված ալիքային ճակատի աղավաղումների փորձնական որոշումն է: Սակայն, մեծ հայելիների ամրացման համակարգեր նախագծելիս հարկ է լինում այդ առնչությունն ունենալ անալիտիկ տեսքով՝ նախագծվող կոնստրուկցիան գնահատելու համար: Ներկայացված աշխատանքում սֆերիկ հայելու համար դուրս են բերված անդրադարձնող մակերևույթի շեղումներից կախված լուսավոր կետի պատկերի աղավաղումները (երկրաչափական ձևը, էներգիայի բաշխումը):

A.A.Sarkisian

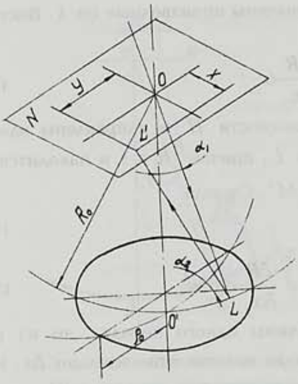
On the relation between the parameters of the optical image and the deformations of the reflecting surface

В работе приводятся аналитические соотношения, связывающие параметры оптического изображения точечного источника света, помещенного в центре кривизны отражающей сферической поверхности, с деформациями сферы. Полученные зависимости позволяют оценить качество изображения с учетом возможных деформаций отражающей поверхности.

Методы контроля отражающих поверхностей, основанные на использовании свойств анаберрационных точек, весьма разнообразны. В достаточном объеме с необходимой библиографией они приведены в [1]. Целью методов является экспериментальное определение искажений сферического фронта, вызванных отклонениями отражающей поверхности. Однако на стадии проектирования подвесов больших зеркал возникает необходимость, для оценки конкретной конструкции, иметь эту связь в аналитическом виде.

В данной работе, на примере сферического зеркала, выводятся аналитические зависимости между отклонениями отражающей поверхности (возможными деформациями) и искажениями анаберрационного изображения точечного источника, а также распределением энергии в пятне.

Имеется отражающая поверхность (фиг. 1), выполненная в виде идеального сферического сегмента (радиус сферы R_0, радиус сегмента ρ_0), в центре кривизны (точка O) которого расположен точечный источник света. Очевидно, отраженные от сферы лучи сойдутся в той же точке O. При деформациях сферической поверхности точечное изображение исказится, и в плоскости N, проходящей через точку O и перпендикулярной главной оптической оси OO', вместо точки получится пятно.



Фиг. 1

Пользуясь правилами геометрической оптики, свяжем деформации сферической поверхности с параметрами пятна изображения. Сферическую поверхность отнесем к системе ортогональных криволинейных координат, в данном случае углов α_1 и α_2, отсчитываемых соответственно вдоль меридиана и параллельного круга.

Как известно [2], сферическую поверхность можно представить вектор-функцией

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}[\alpha_1;\alpha_2] \tag{1}$$

Свяжем с точкой $L(\alpha_1;\alpha_2)$ недеформированной сферической поверхности оси координатного базиса с единичными векторами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n$. $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ касательны к координатным линиям α_1 и α_2, а $\boldsymbol{e}_n$ перпендикулярен к $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

При деформации сферической поверхности точка $L(\alpha_1;\alpha_2)$ переместится на величину вектора $\Delta(\alpha_1;\alpha_2)$ в точку K. Можно записать

$$\Delta = \boldsymbol{e}_1 u + \boldsymbol{e}_2 \mathrm{v} + \boldsymbol{e}_n w$$

где u, v, w являются проекциями вектора Δ на базисные оси. Введем обозначения $\boldsymbol{e}_1 u = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}_2 \mathrm{v} = \mathbf{v}$, $\boldsymbol{e}_n w = \boldsymbol{w}$. Проведем плоскость H, касающуюся сферы в точке L и включающую векторы $\boldsymbol{u}$ и $\mathbf{v}$. Проведем перпендикуляр к плоскости из точки M – конца результирующего вектора $\boldsymbol{u}+\mathbf{v}$ до пересечения со сферой (точка M'). Если криволинейные координаты представить в виде функций какого-либо параметра s, то уравнение (1) запишется в виде

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}[\alpha_1(s);\alpha_2(s)]$$

и опишет кривую на сферической поверхности. Можно за параметр s принять длину дуги кривой, проходящей через точки L, M' и находящейся в плоскости LKM. Когда точки L и M' достаточно близки, то дугу LM' можно принять за приращение аргумента Δs. Соответствующее приращение радиус-вектора $\boldsymbol{R}$ при переходе из L в M' выразится вектором $\boldsymbol{LM'}$, который по формуле Тейлора можно представить в виде

$$\boldsymbol{LM'} = \boldsymbol{R}(s_M) - \boldsymbol{R}(s_L) = \Delta\boldsymbol{R} = \dot{\boldsymbol{R}}(s_L)\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{R}}(s_L)(\Delta s)^2 + \ldots \tag{2}$$

Здесь и далее точкой сверху обозначены производные по s. Вектор $\dot{R}$ можно представить суммой

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\dot{\alpha}_1 + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\dot{\alpha}_2 \tag{3}$$

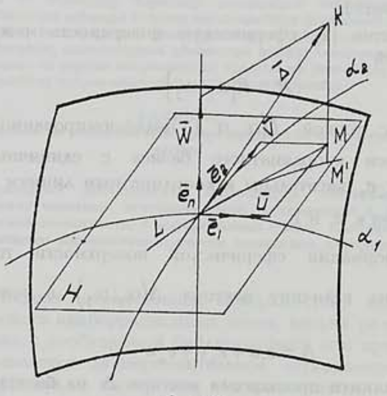
составляющие которой находятся в плоскости H и направлены вдоль координатных линий α_1 и α_2 в точке L, причем $\left|\dot{R}\right| = 1$ и находится в плоскости, включающей точки $L,\ M,\ M'$. Отсюда

$$\dot{R}\Delta s = \boldsymbol{u} + \mathbf{v} \tag{4}$$

и, с учетом (3),

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\dot{\alpha}_1 \Delta s, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\dot{\alpha}_2 \Delta s \tag{5}$$

Если принять, что u, v, w величины одного порядка, то из (5) следует, что это величины первого порядка малости относительно Δs. Из фиг. 2 видно, что



Фиг. 2

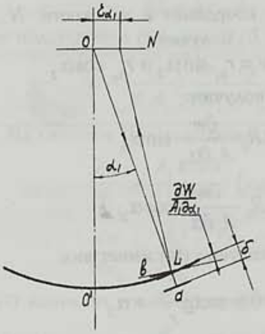
$$LM' = LM + MM'; \quad MM' = LM' - LM$$

Учитывая (2), (4) и равенство $LM = \boldsymbol{u} + \mathbf{v}$, можно записать

$$MM' = \frac{1}{2}\ddot{R}(s_L)(\Delta s)^2 + \ldots \tag{6}$$

Очевидно, что MM' – та наименьшая величина, на которую отклонилась бы от сферы точка L, переместившись на величину $\boldsymbol{u} + \mathbf{v}$. Следовательно, на основании (6) можно утверждать, что отклонение от сферы, вызванное перемещением $\boldsymbol{u} + \mathbf{v}$, есть величина второго порядка малости относительно Δs. С другой стороны, для полного перемещения Δ можно записать, что смещение от сферы равно: $KM = \boldsymbol{w} + MM'$. Так как $\boldsymbol{w}$ и MM' коллинеарны, то отклонение от сферы, вызванное перемещением $\boldsymbol{w}$ (как и Δ), есть величина первого порядка малости относительно Δs. Значит, при деформациях отражающей сферической поверхности по влиянию на суммарное отступление от сферичности существенно лишь перемещение $\boldsymbol{w}$.

Рассмотрим теперь плоскость, проходящую через главную оптическую ось OO' и точку L сферы (фиг. 1). Она показана на фиг. 3.



Фиг. 3

Сечение сферы – окружность LO' – соответствует координатной линии α_1 при заданном $\alpha_2 = \text{const}$. Если элементарная площадка ΔF окрестности точки L сместится вдоль луча OL на величину δ, оставаясь нормальной к нему (положение а), то, очевидно, отраженный луч вернется в точку O.

При наклоне, определяемом углом $\partial w / A_1 \partial \alpha_1$, когда нормаль к ΔF остается в плоскости чертежа (положение в), отраженный луч, оставаясь в плоскости чертежа, смещается в плоскости изображения N на величину

$$r_{\alpha_1} = \frac{2R_0}{\cos\alpha_1} \frac{\partial w}{A_1 \partial \alpha_1} \tag{7}$$

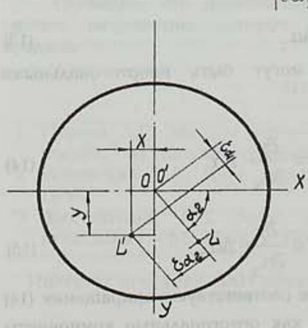
где

$$A_1 = \left| \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha_1} \right|$$

В случае наклона площадки ΔF на угол $\partial w / A_2 \partial \alpha_2$, когда нормаль к ней перемещается в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа (фиг.3) и проходящей через OL, луч смещается в плоскости N перпендикулярно к r_{α_1} на величину

$$r_{\alpha_2} = 2R_0 \frac{\partial w}{A_2 \partial \alpha_2} \tag{8}$$

где $$A_2 = \left| \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha_2} \right|$$



Фиг.4

Отсюда можно утверждать, что параметры пятна изображения обусловлены не перемещением w, а его производными $\partial w / \partial \alpha_1$ и $\partial w / \partial \alpha_2$.

На фиг. 4 изображена проекция сферы на плоскость изображения N.

Как видно из чертежа, смещение r_{α_1} и проекция OL находятся на одной прямой, а r_{α_2} перпендикулярно к r_{α_1}.

Введем систему прямоугольных координат в плоскости N, тогда для координат точки L', связанной с L, получим:

$$x = r_{\alpha_1}\cos\alpha_2 - r_{\alpha_2}\sin\alpha_2, \quad y = r_{\alpha_1}\sin\alpha_2 + r_{\alpha_2}\cos\alpha_2 \tag{9}$$

После подстановки (7) и (8) в (9) получим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R_0}{\cos\alpha_1}\frac{\partial w}{A_1\partial\alpha_1}\cos\alpha_2 - 2R_0\frac{\partial w}{A_2\partial\alpha_2}\sin\alpha_2 \\ y &= \frac{2R_0}{\cos\alpha_1}\frac{\partial w}{A_1\partial\alpha_1}\sin\alpha_2 + 2R_0\frac{\partial w}{A_2\partial\alpha_2}\cos\alpha_2 \end{aligned} \tag{10}$$

В полярных координатах r и θ система (10) имеет вид:

$$r = \sqrt{r_{\alpha_1}^2 + r_{\alpha_2}^2}; \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{r_{\alpha_2}}{r_{\alpha_1}} + \alpha_2 \tag{11}$$

Полученные выражения (10) и (11) показывают, что при известном $w(\alpha_1, \alpha_2)$, α_1 и α_2 могут рассматриваться как криволинейные координаты для пятна изображения. Каждой точке сферической поверхности соответствует точка на изображении, следовательно, можно построить оптическое изображение, соответствующее данному деформированному состоянию сферы. Например, задавая $\alpha_1 = \text{const}$, можно построить однопараметрическую кривую на оптическом изображении $x = x(\alpha_2)$; $y = y(\alpha_2)$, соответствующую окружности на сфере.

Данному деформированому состоянию сферы соответствует и определенное распределение энергии на оптическом изображении, определяемое коэффициентом

$$k = \frac{\Delta f}{\Delta F} \tag{12}$$

где

ΔF - элементарная площадка поверхности сферы (окрестность точки L);

Δf - соответствующая ΔF площадка на оптическом изображении (окрестность точки L');

Согласно [2], при ортогональности α_1 и α_2 для сферы можно записать, что

$$\Delta F = A_1\Delta\alpha_1 \cdot A_2\Delta\alpha_2 \tag{13}$$

В общем случае α_1 и α_2 могут быть неортогональными координатами для пятна изображения.

Можно записать

$$\Delta x_1 = \frac{\partial x}{\partial\alpha_1}\cdot\Delta\alpha_1, \qquad \Delta y_1 = \frac{\partial y}{\partial\alpha_1}\cdot\Delta\alpha_1 \tag{14}$$

и

$$\Delta x_2 = \frac{\partial x}{\partial\alpha_2}\cdot\Delta\alpha_2, \qquad \Delta y_2 = \frac{\partial y}{\partial\alpha_2}\cdot\Delta\alpha_2 \tag{15}$$

т. е. приращениям $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ на сфере соответствуют приращения (14) и (15), которые могут рассматриваться как ортогональные компоненты векторов $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ на оптическом изображении, следовательно,

$$\Delta f = \Delta x_1 \cdot \Delta y_2 - \Delta x_2 \cdot \Delta y_1 \qquad (16)$$

После подстановки (13), (14), (15), (16) в (12) получим:

$$k = \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)$$

Из системы (10), определяя $\partial w/\partial \alpha_1$ и $\partial w/\partial \alpha_2$, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= \frac{A_1 \cos\alpha_1}{2R_0}\left(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2\right) \\
\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} &= \frac{A_2}{2R_0}\left(-x\sin\alpha_2 + y\cos\alpha_2\right)
\end{aligned} \qquad (17)$$

Из (17) вытекает, что для определения $\partial w/\partial \alpha_1$ и $\partial w/\partial \alpha_2$ нужно иметь координаты соответствующих точек $L(\alpha_1;\alpha_2)$ и $L'(x,y)$. Если поверхность деформированной сферы сканировать узким пучком, проходящим через центр кривизны O сферы, то пучок, отраженный от окрестности точки L сферы, как показано на фиг. 1, с известными координатами α_1 и α_2 в плоскости N, соберется в окрестности точки L' изображения с координатами x и y, которые можно определить (замерить). Подставляя значения координат в систему (17), можно определить $\partial w/\partial \alpha_1$ и $\partial w/\partial \alpha_2$. Это равносильно тому, что на всей поверхности сферического сегмента определены частные производные функции $w(\alpha_1;\alpha_2)$. При известных частных производных первообразную функцию можно найти с помощью криволинейного интеграла [3]

$$w(\alpha_1;\alpha_2) = \int \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + w_0$$

Значения w можно определить для любых точек на сфере с точностью до произвольной постоянной w_0.

Аналогичные выражения можно вывести для других систем. Например, опустив число 2 в (7), (8), (10) и (17), можно получить формулы для схемы, в которой точечный источник удален в бесконечность, а отражающая поверхность - пологая параболоида зращения.

Очевидно, что полученные выражения можно использовать для систем, разрешение которых существенно хуже дифракционного предела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуряев Д.Г. Методы контроля оптических асферических поверхностей. - М.:Машиностроение, 1976.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.:ГИТТЛ, 1956.
3. Фихтенгольц Г.Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1970.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
14.03.1996