ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Амбарцумян С.А., Саркисян С.В.

Ս.Ա. Համբարձումյան, Ս.Վ. Սարգսյան
Էլեկտրահաղորդիչ օրթոտրոպ գլանային թաղանթի մագնիսաառաձգական տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում

Բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածի և թաղանթների ճշգրտված տեսության հիման վրա ստացված են օրթոտրոպ էլեկտրահաղորդականությամբ օժտված օրթոտրոպ շրջանային գլանային թաղանթի շարժման հավասարումները արտաքին մագնիսական դաշտում: Հետազոտված է գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ տատանման խնդիրը երկայնական մագնիսական դաշտում:

S.A. Ambartsumian, S.V. Sarkisian
Magnetoelastic vibrations of an electroconductive orthotropic cylindrical shell in the longitudinal magnetic field

На основе гипотезы магнитоупругости тонких тел и уточненной теории оболочек получены уравнения движения ортотропной круговой цилиндрической оболочки с ортотропной электропроводностью во внешнем магнитном поле. Исследована осесимметричная задача колебания цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле.

1. Рассмотрим задачу колебания ортотропной круговой цилиндрической оболочки с ортотропной электропроводностью $[\sigma_i]\left(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma\right)$ во внешнем магнитном поле с постоянным вектором напряженности $H_0\left(H_{0\alpha}, H_{0\beta}, 0\right)$, нормальный к срединной поверхности оболочки, компонент которого равен нулю. В силу тонкости оболочки продольная составляющая магнитного поля $H_{0\beta}$ приближенно считается постоянной.

Оболочка с радиусом кривизны $R = k^{-1} = \text{const}$ и с постоянной толщиной h в криволинейной ортогональной системе координат (α, β, γ), расположена так, что срединная поверхность совпадает с координатной поверхностью $(\alpha, \beta, 0)$ $(\gamma = 0)$, причем координатные линии совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, а главные направления упругости – с координатными линиями α, β, γ [1]. Принимается, что коэффициенты квадратичной формы срединной поверхности A и B равны единице.

Оболочка находится в электромагнитном поле и претерпевает малые возмущения, а сторонние токи и заряды отсутствуют, коэффициенты магнитной проницаемости μ_i в области оболочки и во внешней области равны единице, слагаемые с множителями $(\varepsilon\mu - 1)$ и токи смещения пренебрежимо малы (ε – коэффициент диэлектрической проницаемости). Предполагается, что для рассматриваемой задачи справедливы линеаризованные уравнения электродинамики для внешней и внутренней (оболочки) областей и линейные уравнения теории упругости для оболочки [1, 2].

Считается справедливой гипотеза магнитоупругости тонких тел, согласно которой [2, 3]:

$$e_1 = \varphi(\alpha,\beta,t), \;\; e_2 = \psi(\alpha,\beta,t), \;\; h_3 = f(\alpha,\beta,t) \tag{1.1}$$

где e_i – тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого в оболочке электрического поля, h_3 – нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого в оболочке магнитного поля. Здесь и в последующем индексы α,β,γ при необходимости, заменяются цифрами 1, 2, 3 соответственно.

В рассматриваемой постановке для уравнений магнитоупругости оболочки получим [2, 3]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h_3}{\partial \beta}-\frac{\partial h_2}{\partial \gamma}=\frac{4\pi}{c}\sigma_1\left[e_1-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}B_{02}\right)\right]\\
\frac{\partial h_1}{\partial \gamma}-\frac{\partial h_3}{\partial \alpha}=\frac{4\pi}{c}\sigma_2\left[e_2+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}B_{01}\right)\right]\\
\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial h_1}{\partial \beta}=\frac{4\pi}{c}\sigma_3\left[e_3+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}B_{02}-\frac{\partial u_2}{\partial t}B_{01}\right)\right]
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где e_i – компоненты вектора напряженности возбуждаемого в оболочке электрического поля, h_i – компоненты вектора напряженности возбуждаемого в оболочке магнитного поля, c – электродинамическая постоянная ($c = 3\cdot 10^{10}$ см/сек), σ_i – коэффициенты тензора электропроводности среды, B_{0i} – тангенциальные компоненты вектора магнитной индукции, u_i – перемещения какой-либо точки оболочки.

Далее принимается уточненная теория оболочек [1,4], согласно которой для перемещений какой-либо точки оболочки имеем

$$\begin{gathered}
u_\alpha = u_1 = u-\gamma\frac{\partial w}{\partial \alpha}+\gamma\frac{h^2}{8}a_{55}\Phi-\gamma^3\frac{a_{55}}{6}\Phi\\
u_\beta = u_2 = \upsilon+\gamma k\upsilon-\gamma\frac{\partial w}{\partial \beta}+\gamma\frac{h^2}{8}a_{44}\Psi-\gamma^2 k\frac{h^2}{16}a_{44}\Psi-\gamma^3\frac{a_{44}}{6}\psi\\
u_\gamma = u_3 = w
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $u = u(\alpha,\beta,t)$, $\upsilon=\upsilon(\alpha,\beta,t)$, $w = w(\alpha,\beta,t)$ – компоненты перемещения срединной поверхности оболочки, $\Phi = \Phi(\alpha,\beta,t)$, $\Psi = \Psi(\alpha,\beta,t)$ – искомые функции, характеризующие деформации поперечного сдвига, $a_{55} = G_{13}^{-1}$, $a_{44} = G_{23}^{-1}$ – коэффициенты упругости, G_{i3} – модули поперечного сдвига.

Обобщенный закон Гука принимается в форме [1, 4]

$$\sigma_\alpha = B_{11}e_\alpha + B_{12}e_\beta, \quad \sigma_\beta = B_{22}e_\beta + B_{12}e_\alpha$$
$$\tau_{\alpha\beta} = B_{66}e_{\alpha\beta}, \quad \tau_{\alpha\gamma} = B_{55}e_{\alpha\gamma}, \quad \tau_{\beta\gamma} = B_{44}e_{\beta\gamma} \tag{1.4}$$

где для упругих коэффициентов имеем

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \; B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \; B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} \tag{1.5}$$
$$B_{66} = G_{12}, \quad B_{55} = G_{13}, \quad B_{44} = G_{23}$$

E_i – модули упругости, G_{ik} – модули сдвига, ν_i – коэффициенты Пуассона.

Согласно (1.3) для компонент тензора деформаций имеем

$$e_\alpha = \varepsilon_1 + \gamma\chi_1^* + \gamma^2\eta_1 + \gamma^3\theta_1, \; e_\beta = \varepsilon_2 + \gamma\chi_2^* + \gamma^2\eta_2 + \gamma^3\theta_2$$
$$e_{\alpha\beta} = \omega + \gamma\tau^* + \gamma^2\nu + \gamma^3\lambda \tag{1.6}$$
$$e_{\alpha\gamma} = a_{55}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\Phi, \; e_{\beta\gamma} = a_{44}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\Psi$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \upsilon}{\partial\beta} + kw, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial \upsilon}{\partial\alpha}$$

$$\chi_1^* = \chi_1 + \frac{h^2}{8}a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} \tag{1.7}$$

$$\chi_2^* = \chi_2 + \frac{h^2}{8}a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - k^2 w \tag{1.8}$$

$$\tau^* = \tau + \frac{h^2}{8}\left(a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right), \quad \tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - k\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{\partial\upsilon}{\partial\alpha}\right)$$

$$\eta_1 = 0, \; \eta_2 = -k\chi_2 - \frac{h^2}{16}ka_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}$$

$$\nu = -\frac{k}{2}\tau - \frac{h^2}{16}\left[2ka_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} - ka_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right] \tag{1.9}$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{6}a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}, \; \theta_2 = -\frac{1}{6}a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}$$

$$\lambda = -\frac{1}{6}\left(a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right) \tag{1.10}$$

Очевидно, что к приведенным уравнениям должны быть присоединены трехмерные уравнения электродинамики для окружающей среды (вакуум). Для приведения общей пространственной задачи магнитоупругости оболочки к двумерной предполагаем, что, при относительно больших R, вне оболочки существуют внешние области (толщина которых отсчитывается от поверхностей оболочки $\gamma = \pm h/2$ по внешней нормали), в которых можно допускать, что тангенциальные компоненты возмущенного магнитного поля не зависят от γ, а тангенциальные компоненты возмущенного электрического поля и нормальная компонента возмущенного магнитного поля быстро затухают при удалении от наружных поверхностей оболочки [1, 5].

В этой постановке, при весьма малых значениях отношения λ_0/R, с достаточно высокой точностью, для возмущенного электромагнитного поля вокруг оболочки, имеем следующие уравнения [1, 5]

$$[](h_1^+ - h_1^-) = \frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

$$[](h_2^+ - h_2^-) = \frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \tag{1.11}$$

$$[](h_1^+ + h_1^-) = 0, \quad [](h_2^+ + h_2^-) = 0$$

$$[] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

где h_i^+, h_i^- – значения h_i при $\gamma = \pm h/2$ соответственно, λ_0 – некоторый характерный для данной задачи размер толщины пограничного слоя вокруг оболочки (включая область внутри замкнутой оболочки). В частности, λ_0 может быть равно длине полуволны упругих колебаний оболочки λ_1.

2. Внутренним напряжениям оболочки (1.4) соответсвуют эквивалентные силы и моменты, приведенные на единицу длины срединной поверхности [1, 4]

$$T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + D_{11}\eta_1 + c_{12}\varepsilon_2 + D_{12}\eta_2$$

$$T_2 = c_{22}\varepsilon_2 + D_{22}\eta_2 + c_{12}\varepsilon_1 + D_{12}\eta_1$$

$$S_{12} = c_{66}\omega + D_{66}\nu + k\left(D_{66}\tau^* + \frac{3h^2}{20}D_{66}\lambda\right)$$

$$S_{21} = c_{66}\omega + D_{66}\nu \tag{2.1}$$

$$M_1 = D_{11}\chi_1^* + \frac{3h^2}{20}D_{11}\theta_1 + D_{12}\chi_2^* + \frac{3h^2}{20}D_{12}\theta_2$$

$$M_2 = D_{22}\chi_2^* + \frac{3h^2}{20}D_{22}\theta_2 + D_{12}\chi_1^* + \frac{3h^2}{20}D_{12}\theta_1$$

$$H = H_{12} = H_{21} = D_{66}\tau^* + \frac{3h^2}{20}D_{66}\lambda$$

$$N_1 = \frac{h^3}{12}\Phi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12}\Psi$$

где для жесткостей имеем

$$G_{ik} = hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12}B_{ik} \tag{2.2}$$

Уравнения движения оболочки запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \beta} = P_1 + U_1, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha} + kN_2 = P_2 + U_2$$

$$-kT_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} = P_3 + U_3 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial H}{\partial \beta}-N_1=R_1+V, \quad \frac{\partial M_2}{\partial \beta}+\frac{\partial H}{\partial \alpha}-N_2=R_2+V_2$$

где

$$P_i=-\int_{-h/2}^{h/2}\rho(1+k\gamma)K_i d\gamma, \quad U_i=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(1+k\gamma)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}d\gamma$$
$$R_i=-\int_{-h/2}^{h/2}\gamma\rho(1+k\gamma)K_i d\gamma, \quad V_i=\int_{-h/2}^{h/2}\gamma\rho(1+k\gamma)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}d\gamma \tag{2.4}$$

ρK_i – компоненты объемной силы электромагнитного происхождения, отнесенные к единице объема тела, ρ – плотность материала оболочки.

Объемные силы электромагнитного происхождения, вызванные движением оболочки в магнитном поле, определяются формулами [2,3,5]:

$$\rho K_1=-\frac{B_{02}}{c}\sigma_3 e_3+\frac{\sigma_3}{c^2}\left(B_{01}B_{02}\frac{\partial u_2}{\partial t}-B_{02}^2\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)$$
$$\rho K_2=\frac{B_{01}}{c}\sigma_3 e_3+\frac{\sigma_3}{c^2}\left(B_{01}B_{02}\frac{\partial u_1}{\partial t}-B_{01}^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) \tag{2.5}$$
$$\rho K_3=\frac{1}{c}\left(B_{02}\sigma_1 e_1-B_{01}\sigma_2 e_2\right)-\frac{1}{c^2}\left(B_{02}^2\sigma_1+B_{01}^2\sigma_2\right)\frac{\partial w}{\partial t}$$

Из уравнений (1.2) с учетом (1.1), после некоторых преобразований получим

$$\frac{4\pi}{c}\sigma_3 e_3=\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial h_1}{\partial \beta}-4\pi\frac{\sigma_3}{c^2}\left(B_{02}\frac{\partial u_1}{\partial t}-B_{01}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) \tag{2.6}$$

$$h_1=\frac{h_1^+ + h_1^-}{2}+\gamma\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{4\pi\sigma_2}{c}\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]$$
$$h_2=\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}+\gamma\left[\frac{\partial f}{\partial \beta}-\frac{4\pi\sigma_1}{c}\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] \tag{2.7}$$

Из (2.5) согласно (2.6) получим

$$\rho K_1=-\frac{B_{02}}{4\pi}\left(\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right), \quad \rho K_2=\frac{B_{01}}{4\pi}\left(\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\right) \tag{2.8}$$

Отметим, что ρK_1 и ρK_2 отличаются лишь знаком и величиной интенсивности соответствующих компонент магнитной индукции. В отличие от случая колебаний оболочек и пластин в поперечном магнитном поле, здесь ρK_i не зависят от характеристик деформаций поперечного сдвига.

Наконец, согласно (1.1), (2.7) из (2.5) и (2.8) для компонент объемной силы электромагнитного происхождения получим:

$$\rho K_1=\gamma\frac{B_{02}}{c}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t}\right)\right]+$$

$$+\frac{B_{02}}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_2^+ + h_2^-\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_1^+ + h_1^-\right)\right]$$

$$\rho K_2 = -\gamma\frac{B_{01}}{c}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}\right)\right]-$$

$$-\frac{B_{01}}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_2^+ + h_2^-\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_1^+ + h_1^-\right)\right] \tag{2.9}$$

$$\rho K_3 = \frac{B_{02}}{c}\sigma_1\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{B_{01}}{c}\sigma_2\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Наконец, преобразуя уравнения внутренней задачи магнитоупругости (1.2) с учетом (1.1), (2.6), (2.7), получим

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\frac{h_1^+ - h_1^-}{h}-\frac{4\pi\sigma_2}{c}\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}=\frac{h_2^+ - h_2^-}{h}+\frac{4\pi\sigma_1}{c}\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

а для определения нормальной компоненты возбуждаемого электрического поля получим

$$e_3=-\gamma\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)-\gamma\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}\right)-$$

$$-\frac{B_{02}}{c}\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}-\frac{h^2}{8}a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{\gamma^3}{6}a_{55}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]+ \tag{2.11}$$

$$+\frac{B_{01}}{c}\left[\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\gamma\left(k\frac{\partial\upsilon}{\partial t}-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}+\frac{h^2}{8}a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)-\gamma^3\frac{a_{44}}{6}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right]$$

Рассматривая (2.11), замечаем, что здесь мы, наряду с членами обычного взаимодействия, имеем также члены типа $\gamma\frac{h^2}{8}a_{ii}\frac{B_{0i}}{c}\frac{\partial\Phi(\Psi)}{\partial t}$ или $\gamma^3\frac{a_{ii}}{6}\frac{B_{0i}}{c}\frac{\partial\Phi(\Psi)}{\partial t}$, представляющие взаимодействия нового типа [3].

Окончательно из (2.3), (2.10) и (1.11), после очевидных подстановок и преобразований, согласно (1.1), (1.3) – (1.10), (2.1), (2.4), (2.7) и (2.9), получим следующую полную систему десяти дифференциальных уравнений магнитоупругих колебаний рассматриваемой оболочки, относительно десяти функций $u, \upsilon, w, \Phi, \Psi, f, \varphi, \psi, \left(h_1^+ - h_1^-\right), \left(h_2^+ - h_2^-\right)$

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\alpha\partial\beta}+kC_{12}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+$$

$$+k\left(D_{12}+D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}-k\frac{h^2}{16}\left(D_{12}-D_{66}\right)a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-k\frac{h^2}{8}D_{66}a_{55}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial t^2}+$$

(2.12)

$$+k\frac{h^5}{120}\rho a_{55}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-k\frac{B_{02}}{c}\frac{h^3}{12}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+\sigma_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}\right)\right]$$

$$C_{22}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial\beta^2}+C_{66}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial\alpha^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+kC_{22}\frac{\partial w}{\partial\beta}+$$

$$+k\frac{\partial}{\partial\beta}\left(D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)-k\frac{h^2}{40}D_{66}a_{55}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta}-$$

$$-k\frac{h^2}{16}\left(D_{22}a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}-\frac{13}{5}D_{66}a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}\right)+k\frac{h^3}{12}\Psi= \tag{2.13}$$

$$=\rho h\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}-k\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\partial t^2}+k\frac{h^5}{120}\rho a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+$$

$$+k\frac{B_{01}}{c}\frac{h^3}{12}\left[\sigma_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}\right)+\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)\right]$$

$$kC_{22}\frac{\partial\upsilon}{\partial\beta}+kC_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+k^2C_{22}w+k^2D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-$$

$$-k^2\frac{h^2}{16}D_{66}a_{44}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}-\frac{h^3}{12}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{h^3}{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}= \tag{2.14}$$

$$=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{B_{02}}{c}h\sigma_1\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{B_{01}}{c}h\sigma_2\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+k^2D_{12}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+$$

$$+kD_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial\alpha\partial\beta}\right)-\frac{h^2}{10}\left[a_{55}\left(D_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}+D_{66}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{44}\left(D_{12}+D_{66}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial\beta}\right]+\frac{h^3}{12}\Phi= \tag{2.15}$$

$$=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial t^2}-\rho\frac{h^5}{120}a_{55}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-k\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{B_{02}}{c}\frac{h^3}{12}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)\right]$$

$$D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+k^2D_{22}\frac{\partial w}{\partial\beta}+$$

$$+kD_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial\alpha^2}\right)-\frac{h^2}{10}\left[a_{44}\left(D_{22}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}+D_{66}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{55}\left(D_{12}+D_{66}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta}\right]+\frac{h^3}{12}\Psi= \tag{2.16}$$

$$=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\partial t^2}-\rho\frac{h^5}{120}a_{44}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-2k\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{B_{01}}{c}\frac{h^3}{12}\left[\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right)+\sigma_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial t}\right)\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{h_1^+-h_1^-}{h}-\frac{4\pi\sigma_2}{c}\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{h_2^+-h_2^-}{h}+\frac{4\pi\sigma_1}{c}\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \tag{2.19}$$

$$[]\left(h_1^+-h_1^-\right)-\frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0 \tag{2.20}$$

$$[]\left(h_2^+-h_2^-\right)-\frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0 \tag{2.21}$$

К полученной системе уравнений (2.12) – (2.21), присоединяя граничные и начальные условия задачи [1-5], можно решать задачи колебаний и распространения волны в ортотропной, электропроводящей круговой цилиндрической оболочке в продольном магнитном поле. Однако, в общем виде задачи эти почти неразрешимы. Целесообразнее рассматривать отдельные частные случаи.

3. Рассмотрим осесимметричную задачу круговой цилиндрической оболочки. Пусть в оболочке реализуется такое осесимметричное напряженное состояние, при котором все искомые величины функции – лишь координаты α и времени t. В этом случае, очевидно, функция Ψ, характеризующая поперечные сдвиги в плоскостях $\gamma 0\beta$, равна нулю.

Ограничиваясь точностью технической уточненной теории оболочек [1, 4], т. е. строго придерживаясь точности $1\pm h^2/R^2\approx 1$, из (2.12) – (2.21), получим следующую систему разрешающих уравнений задачи:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+C_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\rho\frac{h^3}{12R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial t^2}+$$

$$+\rho\frac{h^5}{120R}a_{55}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{B_{02}}{c}\frac{h^3}{12R}\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right) \tag{3.1}$$

$$C_{66}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\alpha^2}=\rho h\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}+\frac{B_{01}}{c}\frac{h^3}{12R}\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial t}\right) \tag{3.2}$$

$$C_{12}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+C_{22}\frac{w}{R^2}-\frac{h^3}{12}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+ \tag{3.3}$$
$$+\frac{B_{02}}{c}h\sigma_1\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{B_{01}}{c}h\sigma_2\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3}+D_{12}\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha}-\frac{h^2}{10}D_{11}a_{55}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}+\frac{h^3}{12}\Phi=$$
$$=\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2}-\rho\frac{h^5}{120}a_{55}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}-\rho\frac{h^3}{12R}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+ \tag{3.4}$$
$$+\frac{B_{02}}{c}\frac{h^3}{12}\sigma_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t}\right)$$

$$-D_{66}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \alpha^2}=-2\rho\frac{h^3}{12R}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}-\frac{B_{01}}{c}\frac{h^3}{12}\sigma_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t}\right) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}-\frac{h_1^+-h_1^-}{h}+\frac{4\pi\sigma_2}{c}\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \tag{3.7}$$

$$\frac{h_2^+-h_2^-}{h}+\frac{4\pi\sigma_1}{c}\left(\varphi-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0 \tag{3.8}$$

$$[]_1\left(h_1^+-h_1^-\right)-\frac{2}{\lambda_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)=0 \tag{3.9}$$

$$[]_1\left(h_2^+-h_2^-\right)+\frac{2}{\lambda_0}\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0 \tag{3.10}$$

где

$$[]_1=\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3.11}$$

Совместно рассматривая уравнения (3.2) и (3.5), после примитивных преобразований с учетом (2.2), приходим к известному уравнению

$$C_{66}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \alpha^2}-\rho h\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}=0 \tag{3.12}$$

т. е. в рассматриваемой осесимметричной задаче волновые процессы по координате β (напомним, что υ – перемещение срединной поверхности по направлению координаты β) не зависят от электромагнитных характеристик оболочки и внешнего магнитного поля. Таким образом, имея ввиду лишь электромагнитоупругие взаимодействия, мы приходим к системе восьми уравнений (3.1), (3.3), (3.4), (3.6) – (3.11) относительно восьми искомых функций u, w, Φ, f, φ, ψ, $(h_1^+-h_1^-)$ и $(h_2^+-h_2^-)$.

Пусть искомые функции представлены следующим образом:

$$\left[w,f,\varphi,(h_2^+-h_2^-)\right]=\left[w_0,f_0,\varphi_0,h_{20}\right]e^{\omega t}\sin k\alpha \tag{3.13}$$
$$\left[u,\Phi,\psi,(h_1^+-h_1^-)\right]=\left[u_0,\Phi_0,\psi_0,h_{10}\right]e^{\omega t}\cos k\alpha$$

где величины с индексом "0" – искомые постоянные, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ – величина, характеризующая частоту колебаний и затухание, $k = \pi\lambda_1^{-1}$ – волновое число, λ_1 – длина полуволны.

Подставляя (3.13) в систему уравнений (3.1) – (3.10) и введя безразмерные параметры

$$\begin{gathered}
\alpha^2 = \frac{\rho h \omega_0^2}{c_{11} k^2}, \quad \gamma = Rk, \quad \eta = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \varepsilon = \frac{2}{k^2 \lambda_1 h} \\
\theta^2 = \frac{h^2}{10} a_{55} \rho \omega_0^2, \quad \mu = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad \nu_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}} \\
\Phi_1 = \frac{\Phi_0}{\rho \omega_0^2 k}, \quad \chi = \frac{4\pi\sigma_2 \omega_0}{c^2 k^2}, \quad f_1 = f_0 \frac{\beta}{k B_{01}} \\
\beta = \frac{B_{01}^2 \sigma_2 h R^2 \omega_0}{c^2 C_{11}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}
\end{gathered} \tag{3.14}$$

где ω_0 – частота свободных преимущественно поперечных колебаний оболочки без учета поперечных сдвигов

$$\omega_0^2 = \frac{C_{11} h}{12\rho} \left(k^4 - \nu_1 \frac{k^2}{R^2} + \frac{c_{22}}{c_{11}} \frac{12}{R^2 h^2} \right) \tag{3.15}$$

после серии несложных преобразований приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно u_0, w_0, Φ_1, f_1:

$$\begin{gathered}
-u_0 \left(1 + \alpha^2 \Omega^2\right) + w_0 \left(\frac{\nu_1}{\gamma} + \alpha^2 \eta^2 \gamma \Omega^2 \right) - \Phi_1 \alpha^2 \eta \gamma \theta^2 \Omega^2 = 0 \\
-u_0 \nu_1 \gamma + w_0 \left(\mu + \alpha^2 \gamma \Omega^2 + \beta \Omega \right) + \Phi_1 \alpha^2 \eta \gamma^4 + f_1 \Omega = 0 \\
u_0 \frac{\alpha^2}{\gamma} \Omega^2 - w_0 \left(1 - \frac{\nu_1}{\gamma^2} + \alpha^2 \Omega^2 \right) + \Phi_1 \left(\alpha^2 + \theta^2 + \alpha^2 \theta^2 \Omega^2 \right) = 0 \\
w_0 \chi \beta \Omega + f_1 \left(1 + \varepsilon + \chi \Omega\right) = 0
\end{gathered} \tag{3.16}$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, с точностью

$$1 \pm \frac{\nu_1}{\gamma^2} \approx 1, \quad 1 \pm \nu_1 \eta \approx 1, \quad 1 \pm \frac{\alpha^2 + \theta^2}{\alpha^2} \frac{\nu_1}{\gamma^2} \approx 1, \quad 1 \pm \alpha^4 \Omega^4 \approx 1$$

приходим к следующему характеристическому уравнению для определения относительной частоты колебаний Ω:

$$\begin{gathered}
\left(1 + \alpha^2 \Omega^2\right) \left\{ \Omega^3 \alpha^2 \gamma^2 \chi \left(\alpha^2 + \theta^2 + \alpha^2 \eta \gamma^2 \right) + \Omega^2 (1 + \varepsilon) \alpha^2 \gamma^2 \times \right. \\
\times \left(\alpha^2 + \theta^2 + \alpha^2 \eta \gamma^2 \right) + \Omega \left[\left(\alpha^2 + \theta^2 \right) \left(\mu - \nu_1^2 \right) \chi + \alpha^2 \eta \gamma^4 \chi + \right. \\
\left. \left. + \beta \left(\alpha^2 + \theta^2 \right) (1 + \varepsilon) \right] + (1 + \varepsilon) \left[\left(\alpha^2 + \theta^2 \right) \left(\mu - \nu_1^2 \right) + \alpha^2 \eta \gamma^4 \right] \right\} = 0
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Отсюда легко заметить, что первое уравнение $\left(1 + \alpha^2 \Omega^2\right) = 0$ описывает продольные колебания рассматриваемой оболочки, с указанной выше точностью. В частности, переходя к частоте колебаний ω, получим

$$1+\frac{\rho h\omega^2}{c_{11}k^2}=0 \qquad \text{или} \qquad \omega_{1,2}=\pm\frac{\pi}{\lambda_1}\sqrt{\frac{E_1}{\rho\left(1-\nu_1^2\right)}}$$

Частоты преимущественно поперечных колебаний получим из второго уравнения $\{ \quad \}=0$. В этом случае, очевидно, разумнее пользоваться численным анализом.

Пусть, в частности, оболочка изготовлена из трансверсального изотропного материала и имеет следующие исходные параметры: $E=7.68\cdot10^{11}$ дин/см², $\nu_1=0.25$, $G'=10^{11}$ дин/см² (и $G'=4\cdot10^{10}$ дин/см²), $\rho=3$ г/см², $h=0.1$ см (и $h=0.01$ см), $R=5$ см, $c=3\cdot10^{10}$ см/сек, $\sigma_2=2.5\cdot10^{17}$ сек$^{-1}$ (и $\sigma_2=5\cdot10^{17}$ сек$^{-1}$). А волновое число пусть будет равно 5, т.е. $k=\pi\lambda_1^{-1}=5$, $\lambda_1=2\pi h$.

В нижеследующих двух таблицах приводятся значения Ω_i в зависимости от β при $G'=10^{11}$ дин/см², когда $\sigma_2=2.5\cdot10^{17}$ сек$^{-1}$ (табл. 1,3) и $\sigma_2=5\cdot10^{17}$ сек$^{-1}$ (табл. 2, 4).

Таблица 1

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01}\cdot10^{-4}$ э
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0405	-0.0008	0.8839	-0.0008	-0.8839	5.4584
20	-0.0390	-0.0015	0.9004	-0.0015	-0.9004	7.7194
40	-0.0364	-0.0029	0.9327	-0.0029	-0.9327	10.9169
60	-0.0341	-0.0040	0.9638	-0.0040	-0.9638	13.3704
80	-0.0320	-0.0050	0.9940	-0.0050	-0.9940	15.4388
100	-0.0302	-0.0059	1.0234	-0.0059	-1.0234	17.2611
120	-0.0286	-0.0068	1.0519	-0.0068	-1.0519	18.9085

Таблица 2

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01}\cdot10^{-4}$ э
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0267	-0.0002	0.8755	-0.0002	-0.8755	3.8597
20	-0.0203	-0.0004	0.8839	-0.0004	-0.8839	5.4584
40	-0.0195	-0.0008	0.9005	-0.0008	-0.9005	7.7194
60	-0.0188	-0.0011	0.9167	-0.0011	-0.9167	9.4543
80	-0.0182	-0.0014	0.9327	-0.0014	-0.9327	10.9169
100	-0.0176	-0.0017	0.9485	-0.0017	-0.9485	12.2054
120	-0.0170	-0.0020	0.9639	-0.0020	-0.9639	13.3704

Далее рассмотрим два других случая, когда $G' = 4 \cdot 10^{10}$ дин/см², т. е. когда модуль поперечного сдвига в 2.5 раза меньше.

Таблица 3

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$ э
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0402	-0.0010	0.8039	-0.0010	-0.8039	5.4584
20	-0.0384	-0.0019	0.8221	-0.0019	-0.8221	7.7194
40	-0.0353	-0.0034	0.8574	-0.0034	-0.8574	10.9169
60	-0.0327	-0.0047	0.8913	-0.0047	-0.8913	13.3704
80	-0.0304	-0.0059	0.9240	-0.0059	-0.9240	15.4388
100	-0.0284	-0.0068	0.9556	-0.0068	-0.9556	17.2611
120	-0.0267	-0.0077	0.9861	-0.0077	-0.9861	18.9085

Таблица 4

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$ э
	Re	Re	Im	Re	Im	
10	-0.0206	-0.0003	0.7946	-0.0003	-0.7946	3.8597
20	-0.0201	-0.0005	0.8038	-0.0005	-0.8038	5.4584
40	-0.0192	-0.0009	0.8220	-0.0009	-0.8220	7.7194
60	-0.0184	-0.0013	0.8398	-0.0013	-0.8398	9.4543
80	-0.0177	-0.0017	0.8573	-0.0017	-0.8573	10.9169
100	-0.0170	-0.0020	0.8743	-0.0020	-0.8743	12.2054
120	-0.0164	-0.0024	0.8911	-0.0024	-0.8911	13.3704

Рассматривая таблицы, во-первых, замечаем, что с уменьшением модуля поперечного сдвига уменьшается частота колебаний $\mathrm{Im}(\Omega_i)$, что же касается затухания $\mathrm{Re}(\Omega_i)$, то оно, наоборот, увеличивается, когда рассматриваем корни Ω_2 и Ω_3 и уменьшается в случае Ω_1. Наблюдается некоторое увеличение частоты колебаний (примерно в 20% при $\sigma_2 = 2.5 \cdot 10^7$ и 10% при $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}$) с увеличением напряженности магнитного поля примерно в 3.5 раза. При увеличении напряженности магнитного поля (в 3.5 раза) существенно увеличиваются коэффициенты затухания при Ω_2 и Ω_3 - примерно в 8-10 раз, а коэффициенты затухания, соответствующие Ω_1, уменьшаются примерно в 1.5 раза.

Увеличение коэффициента электропроводимости в два раза незначительно влияет на частоту колебаний, но приводит к уменьшению коэффициентов затухания примерно в два раза.

Посмотрим, что произойдет при существенном изменении геометрических параметров оболочки. Пусть теперь относительная толщина оболочки уменьшится в десять раз, т. е. пусть $h = 0.01$ см при $R = 5$ см, а волновое число в 1.5 раза, т. е. пусть теперь $k = 3.3333$ (вместо пяти). Остальные величины неизменны, при этом рассмотрим лишь одно значение для модуля поперечного сдвига $G' = 10^{11}$ дин/см^2.

Результаты подсчета корней характеристического уравнения в зависимости от β (примерно в тех же диапазонах изменения B_{01}) приводятся в нижеследующих таблицах, при двух значениях коэффициента электропроводности σ_2: $\sigma_2 = 2.5 \cdot 10^{17}\,\text{сек}^{-1}$ (табл. 5.) и $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}\,\text{сек}^{-1}$ (табл. 6.)

Таблица 5

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$ э
	Re	Re	Im	Re	Im	
0.2	-0.5583	-0.0267	1.0124	-0.0267	-1.0124	4.6933
0.4	-0.5099	-0.0587	1.0584	-0.0587	-1.0584	6.6373
0.6	-0.4669	-0.0724	1.1051	-0.0724	-1.1051	8.1291
0.8	-0.4289	-0.0914	1.1517	-0.0914	-1.1517	9.3866
1.0	-0.3957	-0.1080	1.1981	-0.1080	-1.1981	10.4945
2.0	-0.2813	-0.1652	1.4172	-0.1652	-1.4172	14.8416
3.0	-0.2169	-0.1974	1.6126	-0.1974	-1.6126	18.1771
4.0	-0.1765	-0.2176	1.7881	-0.2176	-1.7881	20.9891

Таблица 6

β	Ω_1	Ω_2		Ω_3		$B_{01} \cdot 10^{-4}$ э
	Re	Re	Im	Re	Im	
0.2	-0.2889	-0.0085	0.9954	-0.0085	-0.9954	3.3187
0.4	-0.2735	-0.0162	1.0229	-0.0162	-1.0229	4.6933
0.6	-0.2595	-0.0232	1.0500	-0.0232	-1.0500	5.7481
0.8	-0.2468	-0.0295	1.0767	-0.0295	-1.0767	6.6373
1.0	-0.2351	-0.0354	1.1029	-0.0354	-1.1029	7.4208
2.0	-0.1895	-0.0582	1.2276	-0.0582	-1.2276	10.4946
3.0	-0.1584	-0.0737	1.3423	-0.0737	-1.3423	12.8531
4.0	-0.1359	-0.0849	1.4486	-0.0849	-1.4486	14.8416

Рассматривая табл. 5 и 6, замечаем, что в случае весьма тонкой оболочки увеличение напряженности магнитного поля примерно в три раза приводит к увеличению частоты колебаний примерно на 40% (два-четыре раза больше, чем в предыдущих случаях). Что же касается коэффициентов затухания ($\mathrm{Re}\,\Omega_2$ и $\mathrm{Re}\,\Omega_3$), то в этом случае, (в тех же пределах изменения напряженности магнитного поля) повышаются не в 8-10 раз, а только в 4-5 раз. А коэффициенты затухания, соответствующие Ω_1, уменьшаются несколько больше - в два раза (в предыдущих случаях было 1.5 раза).

В п.3 мы рассмотрели весьма частный пример осесимметричных колебаний круговой цилиндрической оболочки в осевом магнитном поле и привели результаты некоторых приближенных подсчетов частот колебаний и затуханий. Здесь мы не претендуем на полноту решений. Полную картину колебания и распространения волн можно получить из подробного анализа системы уравнений (3.1)-(3.10) или, в крайнем случае, из системы (3.16) без каких-либо приближений.

Настоящее исследование выполнено по гранту INTAS-94-1210.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. - М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.-М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин.-Ереван: Из-во ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. 448 с.
5. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин.-Ереван: Из-во АН Армении, 1992. 124с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
8.05.1996