

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ  
НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СЛОИСТЫХ  
ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА  
ПРОЧНОСТЬ

Маркарян С.Э.

Ս.Է. Մարգարյան

Օերտավոր թաղանթների և սալերի սկզբնական զրգույնների առավելագույն արժեքների որոշումն ամրության սահմանափակման դեպքում

Լուծվում է օրթոտրոպ շերտերում թաղանթի անփոփոխ կշռի դեպքում կոմպոզիցիոն նյութի թաղանթի շերտերի հաստության և մոնոշերտերի դասավորության անկյունների արժեքների օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որոնք ապահովում են ամրության պայմանից սկզբնական զրգույնի (ճկվածքի կամ արագության) առավելագույն թույլատրելի արժեքը տրված սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում:  
Բնակարկվում է նաև բազմաշերտ սալի դեպքը:

S.E. Margarian

Definition of maximum values of initial excitations of multilayer shells and plates case of the limitation of strength

Решается задача оптимального выбора значений толщины слоев оболочки и углов укладки монослоев композиционного материала в ортотропных слоях при неизменном весе оболочки, обеспечивающих наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения (прогиба или скорости) при колебаниях с заданными начальными условиями.

Рассматривается также случай многослойной пластинки.

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндрической многослойной оболочки размерами  $a, b, h, R$ . Предполагается, что слои оболочки симметрично расположены относительно срединной поверхности  $z=0$  и изготовлены из изотропного или ортотропного композиционного материала.

Решается задача оптимального выбора значений толщин слоев оболочки и углов укладки монослоев КМ в ортотропных слоях при неизменном весе оболочки, обеспечивающих наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения (прогиба или скорости) при колебаниях с заданными начальными условиями.

Рассматривается также случай многослойной пластинки. Приводятся результаты числовых расчетов для трехслойных оболочек и пластин при различных геометрических и физических параметрах.

1. Дифференциальные уравнения собственных колебаний многослойной оболочки имеют вид [1]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

где  $w(x, y, t)$  - функция прогибов,  $\Phi(x, y, t)$  - функция усилий

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left( B_{ik}^{m+1} h_{m+1}^3 + \sum_{s=1}^m B_{ik}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right)$$

$$C_{ik} = 2 \left( B_{ik}^{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m B_{ik}^s (h_s - h_{s+1}) \right)$$

$$a_{ik} = \frac{C_{ik}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad h_s = \frac{1}{2} \delta_{m+1} + \sum_{k=1}^m \delta_k$$

$$M = 2 \left[ \rho_{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m \rho_s (h_s - h_{s+1}) \right]$$

$\delta_s$  - толщина  $s$ -ого слоя оболочки,  $\rho_s$  - плотность материала  $s$ -ого слоя,  $2m+1$  - число слоев оболочки,  $B_{ik}^s$  - коэффициенты упругости  $s$ -ого слоя оболочки по ее главным геометрическим направлениям. Для слоев оболочки, изготовленных из монослоев КМ путем поочередной укладки под углом  $\pm\phi$  к оси  $0x$ , коэффициенты  $B_{ik}^s$  выражаются через коэффициенты упругости монослоя  $B_{ik}^0$  по известным формулам поворота [1].

Для слоев, изготовленных из изотропного материала  $B_{11}^s = B_{22}^s = E_s / (1 - \nu_s)^2$ ,  $B_{12}^s = \nu_s B_{11}^s$ ,  $B_{66}^s = E_s / 2(1 + \nu_s)$ ,  $E$  - модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Начальные условия принимаются в виде

$$w|_{t=0} = -C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\chi C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

где  $C$  и  $\chi C$  - соответственно максимальные значения начального прогиба и скорости.

Функции прогибов и усилий, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания, принимаются в виде

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

$$\Phi = \Psi(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и условие (2), получается уравнение для определения функции  $f(t)$

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (4)$$

с соответствующими начальными условиями

$$f(t)|_{t=0} = -C, \quad f'(t)|_{t=0} = -\chi C \quad (5)$$

и выражение для определения функции  $\Psi(t)$

$$\Psi(t) = \frac{a^2}{\pi^2 R} \frac{f(t)}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}} \quad (6)$$

Низшая частота колебаний  $\omega$  определяется из выражения

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{a^4 \rho I} \left( D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2}{b^2} + D_{22} \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^4}{\pi^4 R^2} \frac{1}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}} \right) \quad (7)$$

Решения уравнения (4) с учетом (5) дает

$$f(t) = -C \left( \cos \omega t + \frac{\chi}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (8)$$

Подставляя (8) и (6) в (3), получается выражение для функций прогибов  $w$  и усилий  $\phi(t)$ .

Условие прочности для слоев оболочки записывается в виде

$$\Pi(\sigma_{ik}^s) \leq 1, \quad (9)$$

Для ортотропных слоев из КМ принимается [2]

$$\Pi(\sigma_{ik}^s) = \left( \frac{\sigma_{11}^s}{\sigma_{B1}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}^s}{\sigma_{B2}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}^s}{\tau_{B0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11}^s \sigma_{22}^s}{\sigma_{B1}^2}$$

где  $\sigma_{B1}, \sigma_{B2}, \tau_{B0}$  - прочностные характеристики КМ,  $\sigma_{11}^s, \sigma_{22}^s, \sigma_{12}^s$  - напряжения в  $s$ -ом слое по направлениям укладки монослоев КМ, которые определяются по формулам

$$\sigma_{11}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{12}^s e_{22}^s, \quad \sigma_{22}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{22}^0 e_{22}^s$$

$$\sigma_{12}^s = B_{66}^0 e_{12}^s$$

$e_{11}^s, e_{22}^s, e_{12}^s$  - деформации в  $s$ -ом слое оболочки по направлениям укладки монослоев КМ, которые определяются через деформации

$e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}$  по главным геометрическим направлениям оболочки по известным формулам поворота [3].

Для изотропных слоев оболочки принимается

$$\Pi(\sigma_{ik}^s) = \frac{1}{[\sigma]^2} \left( (\sigma_1^s)^2 + (\sigma_2^s)^2 - \sigma_1^s \sigma_2^s \right)$$

где  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение,  $\sigma_1, \sigma_2$  - главные напряжения в  $s$ -ом слое оболочки, определяемые известными формулами [3] через напряжения  $\sigma_{xx}^s, \sigma_{yy}^s, \sigma_{xy}^s$  по главным геометрическим направлениям оболочки, которые, в свою очередь, определяются по формулам обобщенного закона Гука

$$\sigma_{xx}^s = B_{11}^s e_{xx} + B_{12}^s e_{yy}, \quad \sigma_{yy}^s = B_{12}^s e_{xx} + B_{22}^s e_{yy}, \quad \sigma_{xy}^s = B_{66}^s e_{xy}$$

Деформации в слоях оболочки по ее главным геометрическим направлениям выражаются через функции  $w$  и  $\Phi$  по формулам

$$e_{xx} = a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_{yy} = -a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -a_{66} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Ставится задача определения оптимальных значений параметров  $\delta_s$  и  $\varphi_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m+1$ ) оболочки, обеспечивающих наибольшее значение начального максимального возмущения (прогиба  $C$  или скорости  $\chi C$ ) при неизменном весе оболочки и ограничениями на прочность.

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возмущения  $C$ , условие (9) можно представить в виде

$$\Pi(\sigma_{ik}^s) = C^2 \tilde{\Pi}(\sigma_{ik}^s) \leq 1$$

Из этого условия при заданном значении  $\chi$  в наиболее опасной точке оболочки, в зависимости от вектора управления  $\bar{\chi}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m+1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m+1})$ , определяется

$$C(\bar{\chi}) = \left[ \max_{s,y,z,j} \tilde{\Pi}(\sigma_{ik}^s) \right]^{-1/2} \quad (10)$$

Варьированием значением вектора  $\bar{\chi}$  определяется оптимальный проект оболочки, при котором начальное возмущение  $C(\bar{\chi})$  достигает наибольшего значения при неизменном весе оболочки. Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C = \max_i C(\bar{x}) \quad (11)$$

при ограничениях

$$2 \sum_{s=1}^m \rho_s \delta_s + \rho_{m+1} \delta_{m+1} = \rho h, \quad 0 \leq \varphi_s \leq \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

где  $\rho$  - плотность материала одного из слоев оболочки.

Принимая при решении поставленной задачи,  $\sqrt{R} = 0$ , получается случай многослойной пластинки.

Численная реализация произведена для трехслойных оболочек при  $k = b^2/Rh = 10$  и пластинки ( $k = 0$ ) в случае, когда средний слой изготовлен из изотропного материала (титанового сплава) с характеристиками  $B_{11}^{(2)} = 3,88 B_{11}^0$ ,  $B_{12}^{(2)} = 1,16 B_{11}^0$ ,  $B_{66}^{(2)} = 1,36 B_{11}^0$ ,  $[\sigma] = 1,54 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$  а наружные слои изготовлены из КМ (СВАМ 5 : 1) с характеристиками  $B_{22}^0 = 0,62 B_{11}^0$ ,  $B_{12}^0 = 0,12 B_{11}^0$ ,  $B_{66}^0 = 0,16 B_{11}^0$   
 $\sigma_{B1} = 1,89 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$ ,  $\sigma_{B2} = 0,72 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$ ,  $\tau_{B0} = 0,5 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$

Отношение плотностей материалов  $\rho_2/\rho_1 = 2,38$ .

Определены оптимальные значения параметров  $\varphi, \alpha_1 = \delta_1/h, \alpha_2 = \delta_2/h$  и соответствующие значения начального приведенного прогиба  $\bar{c} = C/h$  при  $\bar{h} = h/b = 0,1$ ,  $\bar{\chi} = \chi(12\rho\alpha^4/\pi^4 B_{11}^0 h^2)^{1/2-1}$  для различных значений отношения сторон  $a/b$ .

Результаты расчета приведены в табл. 1. Там же для сравнения приведены значения  $\bar{C}$  для однослойных оболочек, изготовленных из ортотропного материала (в круглых скобках) и ортотропного материала (в квадратных скобках).

Таблица 1

a/b	оболочка				пластинка			
	$\bar{c}$	$\varphi^0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\bar{c}$	$\varphi$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
0,5	0,0562	0	0,45	0,04	0,0684	0	0,3	0,16
	(0,0283)				(0,0286)			
	[0,0552]				[0,0643]			
1,0	0,1423	0,90	0,4	0,08	0,2022	45	0,3	0,16
	(0,0744)				(0,1084)			
	[0,1376]				[0,1744]			
1,5	0,2776	90	0,45	0,04	0,3469	90	0,3	0,16
	(0,1149)				(0,1688)			
	[0,2209]				[0,2822]			
2,0	0,2907	90	0,45	0,04	0,4289	90	0,3	0,16
	(0,1511)				(0,1061)			
	[0,2795]				[0,3367]			

Как следует из табл.1, изготовление трехслойной пластинки позволяет увеличить допустимое значение начального прогиба по сравнению с изотропной однослойной пластинкой того же веса почти в 2 раза и по сравнению с ортотропной однослойной пластинкой до 27%.

В случае же трехслойной оболочки увеличение допустимого начального прогиба по сравнению с однослойной ортотропной оболочкой несущественно (до 4%), хотя по сравнению с изотропной однослойной оболочкой достигается значительный эффект.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974, 448 с.
2. Бажанов З.Л., Гольденблат И.И. и др. Сопротивление стеклопластиков. - М.: Машгиз, 1968.
3. Timoshenko S. P. and Goodier I.N. Theory of elasticity, ed mo Graw-Hiu, New York, 1951.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
15.05.1996