ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ИЗГИБ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ТОРЦУ

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան
Եզրում բեռնավորված պիեզոկերամիկ գլանային թաղանթի ծռումը

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պիեզոկերամիկ կիսաանվերջ շրջանաձև գլանային թաղանթի ծռման խնդիրը կլասիկ տեսությամբ, տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

Մասնավորապես դիտարկված է երկու դեպք 1) եզրում կիրառված է ծռող մոմենտ, 2) եզրում առկա է էլեկտրական պոտենցիալ:

Ճշգրիտ և մոտավոր եղանակներով որոշված են բնութագրիչ հավասարման սեփական արժեքները տարբեր նյութերի համար: Հաշված են նաև PZT-4 նյութից պատրաստված թաղանթի համար ճկվածքի և էլեկտրական պոտենցիալի ֆունկցիաների թվային արժեքները, և կատարված է համեմատություն:

A. V. Babayan
Bending of a piezoceramic cylindrical shell, loaded by its lateral edge

В работе в рамках классической теории оболочек исследуется задача изгиба пьезокерамической полубесконечной круговој цилиндрической оболочки при разных граничных условиях.

В частности, рассмотрены два случая: 1) на торце приложен изгибающий момент, 2) на торце задан электрический потенциал.

Для различных материалов получены собственные значения характеристического уравнения как точным, так и приближенным методом. Вычислены также значения функций прогиба и электрического потенциала для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT-4 и проведено численное сравнение результатов.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу пьезокерамической круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h, равномерно поляризованной вдоль нормали к срединной поверхности оболочки.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат $O\alpha\beta\gamma$ так, что поверхность $\alpha O\beta$ совпадает со срединной поверхностью оболочки, т.е. материал оболочки поляризован по координатным линиям γ.

Предполагается, что лицевые поверхности цилиндрической оболочки свободны.

Задача рассматривается на основании классической теории оболочек [1,2], согласно которой предполагается

$$e_{13} \approx 0, \quad e_{23} \approx 0, \quad e_{33} = 0 \tag{1.1}$$

Уравнения состояния запишутся аналогично [3].

Компоненты деформации и уравнения равновесия представляются известным образом [1].

Учитывая, что при $\gamma = 0$ $U_1 = U(\alpha)$, $U_2 = 0$, $U_3 = W(\alpha)$, для компонент перемещения какой-либо точки оболочки, согласно (1.1), получим

$$U_1 = U(\alpha) - \gamma \frac{dW}{d\alpha}, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = W(\alpha) \tag{1.2}$$

Пусть поверхности оболочки $\gamma = \pm h/2$ электродированы и заданы значения электрического потенциала $\varphi(\alpha, \gamma)$ на этих поверхностях:

$$\varphi = \varphi(\alpha, \gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \tag{1.3}$$

Уравнения электродинамики для пьезосреды в электростатическом приближении запишутся следующим образом [3]:

$$divD = 0, \quad rotE = 0 \tag{1.4}$$

Введя электрический потенциал φ по формуле

$$E = -grad\varphi, \tag{1.5}$$

тождественно удовлетворим второму уравнению (1.4), так как

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}, \tag{1.6}$$

а первое уравнение перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial D_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_3}{\partial \gamma} = 0 \tag{1.7}$$

Решая уравнения состояния относительно σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} и подставляя e_{ij} с учетом (1.2) получим следующие значения для напряжений:

$$\sigma_{11} = S_{11}\left[\frac{dU}{d\alpha} + \nu \frac{W}{R} - \gamma \frac{d^2W}{d\alpha^2}\right] - B_1' E_3,$$

$$\sigma_{22} = S_{11}\left[\nu \frac{dU}{d\alpha} + \frac{W}{R} - \nu\gamma \frac{d^2W}{d\alpha^2}\right] - B_1' E_3, \tag{1.8}$$

$$\sigma_{12} = 0,$$

где R - радиус кривизны срединной поверхности оболочки,

$$S_{11} = \frac{S_{11}^E}{\Delta} = \frac{1}{S_{11}^E(1-\nu^2)}, \quad \Delta = (S_{11}^E) - (S_{12}^E)^2,$$

$$B_1^{'} = \frac{d_{31}(S_{11}^E - S_{12}^E)}{\Delta} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)}, \quad \nu = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}$$

С помощью (1.8), определяя внутренние силы и моменты с точностью $1 \pm \frac{\gamma}{R_i} \approx 1$ и подставляя их значения в уравнения равновесия, добавляя к этим уравнениям (1.7), приходим к системе трех уравнений относительно трех искомых функций U, W, φ:

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{R}\frac{dW}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^4W}{d\alpha^4} + \frac{12}{h^2}\left[\frac{\nu}{R}\frac{dU}{d\alpha} + \frac{W}{R^2}\right] + \frac{12}{h^3}\frac{B'_1}{S_{11}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} d\gamma = 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \left[a_2 - 2a_1\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2} + \frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\frac{d^2W}{d\alpha^2} = 0 \tag{1.9}$$

где $a_1 = \frac{B'_1 d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}$ - коэффициент электромеханической связи, $a_2 = \frac{\varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{11}^T}$.

2. Рассмотрим задачу изгиба пъезокерамической полубесконечной цилиндрической оболочки, когда край $\alpha = 0$ шарнирно закреплен и на краю действует изгибающий момент M

$$W = 0, \quad M_1 = M, \quad T_1 = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{2.1}$$

Исключая из системы (1.9) $U(\alpha)$, получим

$$\frac{d^4W}{d\alpha^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2R^2}W + \frac{12}{h^3}\frac{B'_1}{S_{11}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} d\gamma = 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \left[a_2 - 2a_1\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2} + \frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\frac{d^2W}{d\alpha^2} = 0 \tag{2.2}$$

а) Решение системы (2.2) представим в виде

$$W = A\exp\left(-P\frac{\alpha}{h}\right), \quad \varphi = \psi(\gamma)\exp\left(-P\frac{\alpha}{h}\right) \tag{2.3}$$

где A, P - искомые постоянные.

В этом случае граничные условия (2.1) будут

$$W = 0, \quad \frac{d^2W}{d\alpha^2} = -\frac{12}{S_{11}h^3}M, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \psi(\gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{2.4}$$

Из (1.3) для $\Psi(\gamma)$ получим

$$\psi(\gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm h/2 \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3)во второе уравнение системы (2.2), приходим к дифференциальному уравнению относительно $\Psi(\gamma)$, решение которого будет

$$\psi(\gamma) = C_1 \cos\frac{P}{h}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}\gamma + C_2 \sin\frac{P}{h}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}\gamma - A\frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T} \qquad (2.6)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5), получим

$$\psi(\gamma) = A\frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}\left[\frac{\cos\frac{P}{h}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}\gamma}{\cos\frac{P}{2}\sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}} - 1\right], \qquad (2.7)$$

при $C_2 = 0$.

Подставляя (2.7) в первое уравнение системы (2.2), приходим к следующему трансцендентному уравнению относительно P

$$P^4 - 12(1+\nu)a_1 P^2 + 24(1+\nu)a_1\sqrt{a_2 - 2a_1}\,P\,\mathrm{tg}\frac{P}{2}\frac{1}{\sqrt{a_2 - 2a_1}} + $$
$$+12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2} = 0 \qquad (2.8)$$

Разлагая тригонометрическую функцию в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P^4 + 12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\frac{a_2 - 2a_1}{a_2 - (1-\nu)a_1} = 0 \qquad (2.9)$$

Сохранение следующих членов ряда $\mathrm{tg}\frac{P}{2}\frac{1}{\sqrt{a_2 - 2a_1}}$ с точки зрения построения решения задачи не имеет смысла, так как число искомых постоянных будет превышать число граничных условий.

Нас будут интересовать те решения, для которых $\mathrm{Re}\,P$ положителен. Так как для пьезоэлектриков, приведенных в табл. 1 [4], второй член уравнения (2.9) положителен, будет два таких P. Третье P получится при $C_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P_3 = 2\pi\sqrt{a_2 - 2a_1} \quad \psi_3(\gamma) = C_2 \sin 2\pi\frac{\gamma}{h}$$

Удовлетворяя (2.3) граничным условиям (2.4), определим искомые постоянные, откуда и получим решение задачи.

б) Решение системы (2.2) представим в виде

$$W = A\exp\left(-q\frac{\alpha}{h}\right), \quad \varphi = \Phi(\alpha)\left[1 - \frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \qquad (2.10)$$

где A, q - искомые постоянные.

Таблица 1

НАИМЕНОВАНИЕ	ФОРМУЛА	КЛАСС	$S_{11}^{E}, 10^{-12}$ ед. СГСЭ	$S_{12}^{E}, 10^{-12}$ ед. СГСЭ	$d_{31}, 10^{-8}$ ед. СГСЭ	$d_{33}, 10^{-8}$ ед. СГСЭ	$d_{15}, 10^{-8}$ ед. СГСЭ	ε_{11}^{T}	ε_{33}^{T}	a_1	a_2
Дигидрофосфат аммония	$NH_4H_2PO_4$	$\bar{4}2m$	1.82	0.19				56.4	16.4		0.291
Арагонит	$CaCO_3$	mmm						9.8	6.6		0.673
Виннокислый калий	$C_4H_4O_6$	2	2.24	-0.08				6.44	6.49		1.008
Кварц	SiO_2	32	1.279	-0.1535				4.5	4.6		1.022
Дейтерированный дигидрофосфат калия	KH_2PO_4	$\bar{4}2m$	1.65	-0.4				4.6	21.8		4.739
Кремний	Si	m3m	0.768	-0.214				12	12		1
Дигидрофосфат рубидия	RbH_2PO_4	$\bar{4}2m$	19	-4	-12.4	16.8	53.9	3.51	3.54	$2.92 \cdot 10^{-4}$	1.0085
Рубин	Al_2O_3	$\bar{3}m$	0.2353	-0.0716				8.6	10.55		1.227
Рутил	TiO_2	4/mmm						86	170		1.977
Сульфид кадмия	CdS	6mm	2.22	-0.87	-1.7	-3.4	4.7	9.3	10.3	$0.23 \cdot 10^{-4}$	1.1075
Поляризованная титаната бария	$BaTiO_3$	∞m			-2.35	5.73	7.8	1596			
Турмалин		3m	0.385	0.048	1.03	5.5	10.9	8.2	7.5	$0.38 \cdot 10^{-4}$	0.915
PZT- 4			1.23	-0.405	-123	289	496	1475	1300	$12.4 \cdot 10^{-4}$	0.881

Таблица 2

	h/R	i	1.2	3
CdS	0.1	P_i	0.399175(1±i)	6.608798
		q_i	0.399175(1±i)	3.645522
		q_i^0	0.399177(1±i)	3.645545
	0.01	P_i	0.12623(1±i)	6.608798
		q_i	0.12623(1±i)	3.645522
		q_i^0	0.126231(1±i)	3.645545
PZT-4	0.1	P_i	0.404239(1±i)	5.886206
		q_i	0.404246±0.404234i	3.249923
		q_i^0	0.404429(1±i)	3.251461
	0.01	P_i	0.127832(1±i)	5.886206
		q_i	0.127832(1±i)	3.249925
		q_i^0	0.127892(1±i)	3.251461
RbH_2PO_4	0.1	P_i	0.411454(1±i)	6.304807
		q_i	0.411455±0.411453i	3.478395
		q_i^0	0.41149(1±i)	3.478793
	0.01	P_i	0.130113(1±i)	6.304807
		q_i	0.130113(1±i)	3.478395
		q_i^0	0.130125(1±i)	3.478793

где $K = \sqrt[4]{\dfrac{3(1-\nu^2)}{h^2R^2}}$, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ жесткость оболочки.

Известно, что (2.16) достигает своего максимума при $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{4K}$ [5]

$$W_{max} = \frac{M}{2\sqrt{2}K^2 D}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \tag{2.17}$$

Для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT-4, сравнивая значения (2.13) и (2.17) и определяя значение электрического потенциала (2.10) в точке α_0, получим

$$\frac{W}{W_{max}} = 0{,}999, \quad \varphi(\alpha_0,\gamma) = 6{,}221\cdot 10^{-10}\frac{M}{h}\left[1-\frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \text{ при } \frac{h}{R} = 0{,}1$$

$$\frac{W}{W_{max}} = 0{,}999, \quad \varphi(\alpha_0,\gamma) = 6{,}054\cdot 10^{-10}\frac{M}{h}\left[1-\frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \text{ при } \frac{h}{R} = 0{,}01$$

3. Пусть заданы следующие граничные условия:

$$W = 0,\quad M_1 = 0,\quad T_1 = 0,\quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{3.1}$$

Решение системы (2.2) будем искать в виде, аналогичном представлению (2.10) в случае б), согласно которому получается

Граничные условия (2.1) будут

$$W=0,\quad \frac{d^2W}{d\alpha^2}=-\frac{12}{S_{11}h^3}M,\quad \frac{dU}{d\alpha}=0,\quad \Phi(\alpha)=0 \ \text{при}\ \alpha=0 \qquad (2.11)$$

Интегрируя второе уравнение (2.2) по γ в пределах от $-h/2$ до $h/2$ и подставляя (2.10) в (2.2), при этом, исключая из этой системы $\Phi(\alpha)$, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^3+12\left[(1-\nu)a_1-a_2\right]\lambda^2+12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\lambda+144(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\left[2a_1-a_2\right]=0 \qquad (2.12)$$

где $\lambda=q^2$.

Для большинства пьезоэлектриков дискриминант уравнения (2.12) положителен, следовательно, это уравнение имеет одно действительное и два комплексно-сопряженных решения.

Обозначая нужные нам решения уравнения (2.12) через q_1, q_2, q_3, для W и $\Phi(\alpha)$ будем иметь

$$W=\sum_{i=1}^{3}A_i\exp\left(-q_i\frac{\alpha}{h}\right),\quad \Phi(\alpha)=\sum_{i=1}^{3}C_i\exp\left(-q_i\frac{\alpha}{h}\right) \qquad (2.13)$$

где постоянные C_i связаны с A_i следующим образом:

$$C_i=-\frac{1}{q_i^2}\left[q_i^4+12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\right]\frac{S_{11}}{8B'_1}A_i \qquad (2.14)$$

Удовлетворяя (2.13) граничным условиям (2.11), с учетом (2.14) получим искомые постоянные, следовательно и решение

$$A_1=\frac{12M}{S_{11}h}\frac{q_1^2q_2^2q_3^2}{\left[q_1^2-q_2^2\right]\left[q_1^2-q_3^2\right]}\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2}-\frac{1}{q_2^2q_3^2}\right]$$

$$A_2=\frac{12M}{S_{11}h}\frac{q_1^2q_2^2q_3^2}{\left[q_2^2-q_1^2\right]\left[q_2^2-q_3^2\right]}\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2}-\frac{1}{q_1^2q_3^2}\right] \qquad (2.15)$$

$$A_3=\frac{12M}{S_{11}h}\frac{q_1^2q_2^2q_3^2}{\left[q_3^2-q_1^2\right]\left[q_3^2-q_2^2\right]}\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2}-\frac{1}{q_1^2q_2^2}\right]$$

В табл. 2 приведены собственные значения характеристических уравнений (2.9) и (2.12) для некоторых пьезокристаллов.

q_i^0 - собственные значения характеристического уравнения (2.12), когда отсутствует явления пьезоэффекта $(d_{ij}=0)$.

При отсутствии явления пьезоэффекта $(d_{ij}=0)$

$$W=\frac{M}{2K^2D}\exp(-K\alpha)\sin K\alpha, \qquad (2.16)$$

характеристическое уравнение (2.12). Обозначая необходимые решения уравнения (2.12) через q_1, q_2, q_3, для W и $\Phi(\alpha)$ будем иметь (2.13).

Удовлетворяя (2.13) граничным условиям (3.1), с учетом (2.14) получим

$$\begin{aligned}
A_1 &= 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{\left[q_1^2 - q_2^2\right]\left[q_1^2 - q_3^2\right]}\left[\frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_2^2 q_3^2}\right] \\
A_2 &= 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{\left[q_2^2 - q_1^2\right]\left[q_2^2 - q_3^2\right]}\left[\frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_3^2}\right] \qquad (3.2) \\
A_3 &= 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{\left[q_3^2 - q_1^2\right]\left[q_3^2 - q_2^2\right]}\left[\frac{1}{6(1-\nu^2)}\frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_2^2}\right]
\end{aligned}$$

Подставляя (3.2) в (2.13), получим решение задачи.

Например, в табл.3 приводятся значения параметра $b(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ в точке α_0 для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT-4

где $b(\alpha) = \dfrac{W(\alpha)}{d_{31}\varphi_0}$.

Таблица 3

h/R	$b(\alpha_0)$	$\Phi(\alpha_0)$
0.1	30.91	$-0.005\varphi_0$
0.01	313.57	$-0.002\varphi_0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. - М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. -М.: Наука, 1974. 446 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Переломова Н.В., Тагиева М.М. Задачник по кристаллофизике. М.: Наука, 1982. 285 с.
5. Бабаян А.В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки под действием изгибающего момента. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №1, с. 77-81.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.05.1996