

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОГО СОСТАВНОГО  
ЛИНЕЙНО-УПРУГОГО КЛИНА ПРИ ПЛОСКОЙ  
ДЕФОРМАЦИИ

Акопян А.Г.

Ա.Գ. Հակոբյան

Օրոշորոպ - բաղադրյալ գծային առածգական սեպի թերլարվածային վիճակը հարթ  
դեֆորմացիայի դեպքում

Դիտարկվում է գծային առածգական, անիզոտրոպ նյութերից բաղադրյալ սեպի կոնստակտային մակերևույթի եզրի թերլարվածության խնդիրը հարթ դեֆորմացիայի դեպքում: Նյութը համարվում է գլանային օրոտրոպ: Անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքները համընկնում են գլանային կոորդինատների համակարգի առանցքների հետ, որի սկիզբը գտնվում է սեպի գագաթին:

Ցույց է տրված անիզոտրոպիայի ազդեցությունը թերլարվածության տիրույթների վրա:

A.G Hakobian

Low-stress level of a linearly elastic orthotropic-compound wedges under plane strain

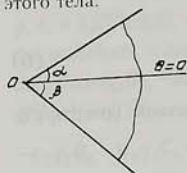
Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной поверхности анизотропного составного клина из линейно-упругих материалов при плоской деформации. Материал считается цилиндрически ортотропным. Главные оси анизотропии совпадают с осями цилиндрической системы координат, начало которой помещено в вершине клина.

Показано влияние анизотропии на зоны малонапряженности.

Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной поверхности анизотропного составного клина из линейно-упругих материалов при плоской деформации. Явление малонапряженности впервые исследовано в работе [1]. Исследование напряженного состояния окрестности угловой точки поверхности соединения составного тела проведено также в работах [2-7] и ряд других.

**1. Основные уравнения задачи.** Пусть клин, состоящий из двух спаянных между собой по общей части боковых поверхностей двух цилиндрических тел с различными характеристиками упругости, находится в состоянии плоской деформации. Оба тела обладают свойством цилиндрической ортотропии. В угловой точке контактной поверхности поместим начало цилиндрической системы координат, ось  $\theta = 0$  проведем по контактной поверхности, ось  $z$  - по продольному

направлению. Главные оси анизотропии совпадают с этими осями. Принимаем, что в окрестности угловой точки  $r=0$  внешние боковые грани свободны от нагрузок. На фиг. 1 показано поперечное сечение этого тела.



Фиг. 1

Для цилиндрически ортотропного тела закон Гука при плоской деформации имеет вид [8]

$$\varepsilon_r = \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta, \quad \gamma_{r\theta} = \beta_{66}\tau_{r\theta}$$

где  $\beta_{ij}$  - приведенные упругие характеристики, выражающиеся через технические упругие константы

$$\beta_{11} = \frac{1 - \nu_r \nu_{r\theta}}{E_r}, \quad \beta_{12} = -\frac{\nu_{r\theta} + \nu_r \nu_{\theta r}}{E_r}$$

$$\beta_{22} = \frac{1 - \nu_r \nu_{r\theta}}{E_\theta}, \quad \beta_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}$$

Компоненты напряжений через функцию напряжений Эри  $F$  в полярных координатах выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{F}{r} \right) \quad (2)$$

а для  $\sigma_z$  имеем

$$\sigma_z = \nu_{r\theta} \sigma_r + \nu_{\theta r} \sigma_\theta \quad (3)$$

Функция напряжений  $F(r, \theta)$  при плоской деформации удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [8]:

$$a_4 \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + a_5 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + a_1 \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + 2a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \quad (4)$$

$$- a_5 \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (2a_1 + a_5) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + a_1 \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

где  $a_1 = \beta_{11}$ ,  $a_3 = \beta_{22}$ ,  $a_5 = 2\beta_{12} + \beta_{66}$

**2. Граничные условия.** Величины, соответствующие клину с углом  $\alpha$ , обозначим индексом  $i=1$ , а с углом  $\beta$  - индексом  $i=2$ . В уравнениях (1)-(4) индекс  $i$  опущен.

Отсутствие нагрузок на внешних поверхностях клина в окрестности точки  $r=0$  приводит к условиям

$$F_1(r, \alpha) = 0, \quad \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0$$

$$F_2(r, -\beta) = 0, \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \right|_{\theta=-\beta} = 0 \quad (5)$$

Из непрерывности напряжений на контактной поверхности  $\theta = 0$  следует

$$F_1(r, 0) = F_2(r, 0), \quad \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \quad (6)$$

Условия непрерывности перемещений на контактной поверхности заменяются эквивалентными условиями [1,6]

$$\left. \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \right|_{\theta=0}, \quad \left. \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial r^2} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial r^2} \right|_{\theta=0}$$

последние два условия можем выразить через функции напряжений  $F_i$  при  $\theta = 0$ .

$$\beta_{11}^{(1)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta^2} \right) + \beta_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} = \beta_{11}^{(2)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2} \right) + \beta_{12}^{(2)} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2}, \quad (7)$$

$$\beta_{66}^{(1)} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F_1}{\partial r^2 \partial \theta} \right) + \beta_{11}^{(1)} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F_1}{\partial \theta^3} \right) + \beta_{12}^{(1)} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F_1}{\partial r^2 \partial \theta} = \quad (8)$$

$$\beta_{66}^{(2)} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F_2}{\partial r^2 \partial \theta} \right) + \beta_{11}^{(2)} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F_2}{\partial \theta^3} \right) + \beta_{12}^{(2)} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F_2}{\partial r^2 \partial \theta}.$$

**3. Решение задачи и основные результаты.** Следуя Вильямсу [4] функцию напряжений в окрестности точки  $r = 0$  представим в виде

$$F_i(r, \theta) = r^{\lambda+1} f_i(\theta, \lambda) \quad (9)$$

Из уравнения (4), для каждой из областей клина, следует

$$a_1^{(i)} f_i^{IV} + (\lambda^2 a_5^{(i)} + 2a_1^{(i)}) f_i'' + [\lambda^4 a_3^{(i)} - \lambda^2 (a_4^{(i)} + a_1^{(i)}) + a_1^{(i)}] f_i = 0 \quad (10)$$

Общее решение (10) можно представить в виде

$$f_i(\theta, \lambda) = A_i \operatorname{ch} \varepsilon_i \theta \cos \eta_i \theta + B_i \operatorname{sh} \varepsilon_i \theta \cos \eta_i \theta + C_i \operatorname{ch} \varepsilon_i \theta \sin \eta_i \theta + D_i \operatorname{sh} \varepsilon_i \theta \sin \eta_i \theta \quad (11)$$

где  $\varepsilon_i$ ,  $\eta_i$  определяются из соотношения

$$z = \pm(\varepsilon_i \pm i\eta_i) = \pm \sqrt{\frac{-\lambda^2 a_5^{(i)} - 2a_1^{(i)} \pm \sqrt{\lambda^4 (a_3^{(i)2} - 4a_1^{(i)} a_3^{(i)}) + 4\lambda^2 (a_1^{(i)} a_5^{(i)} + a_1^{(i)} a_3^{(i)} + a_1^{(i)2})}}{2a_1^{(i)}}} \quad (12)$$

С помощью (11), удовлетворив восьми граничным условиям (5) (8), получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно восьми  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  коэффициентов:

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 = 0, \quad \varepsilon_1 B_1 + \eta_1 C_1 - \varepsilon_2 B_2 - \eta_2 C_2 = 0 \\
\omega_1^{(1)}(\alpha)A_1 + \omega_2^{(1)}(\alpha)B_1 + \omega_3^{(1)}(\alpha)C_1 + \omega_4^{(1)}(\alpha)D_1 = 0 \\
\omega_1^{(2)}(\beta)A_2 + \omega_2^{(2)}(\beta)B_2 + \omega_3^{(2)}(\beta)C_2 + \omega_4^{(2)}(\beta)D_2 = 0 \\
p_1 A_1 + 2\beta_{11}^{(1)} \varepsilon_1 \eta_1 D_1 - p_2 A_2 - 2\beta_{11}^{(2)} \varepsilon_2 \eta_2 D_2 = 0 \\
\text{ch} \varepsilon_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha A_1 + \text{sh} \varepsilon_1 \alpha \cos \eta_1 \alpha B_1 + \text{ch} \varepsilon_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha C_1 + \text{sh} \varepsilon_1 \alpha \sin \eta_1 \alpha D_1 = 0 \\
\text{ch} \varepsilon_2 \beta \cos \eta_2 \beta A_2 - \text{sh} \varepsilon_2 \beta \cos \eta_2 \beta B_2 - \text{ch} \varepsilon_2 \beta \sin \eta_2 \beta C_2 + \text{sh} \varepsilon_2 \beta \sin \eta_2 \beta D_2 = 0 \\
\beta_{11}^{(1)} (\varepsilon_1^2 - \eta_1^2) A_1 + \varepsilon_1 q_1 B_1 + \eta_1 q_1 C_1 + 2\beta_{11}^{(1)} \varepsilon_1 \eta_1 D_1 - \beta_{11}^{(2)} (\varepsilon_2^2 - \eta_2^2) A_2 - \\
- \varepsilon_2 q_2 B_2 - \eta_2 q_2 C_2 - 2\beta_{11}^{(2)} \varepsilon_2 \eta_2 D_2 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

В уравнениях системы (13) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\omega_1^{(i)}(x) = \varepsilon_i \text{sh} \varepsilon_i x \cos \eta_i x - \eta_i \text{ch} \varepsilon_i x \sin \eta_i x, \quad \omega_2^{(i)}(x) = \varepsilon_i \text{ch} \varepsilon_i x \cos \eta_i x - \eta_i \text{sh} \varepsilon_i x \sin \eta_i x, \\
\omega_3^{(i)}(x) = \varepsilon_i \text{sh} \varepsilon_i x \sin \eta_i x + \eta_i \text{ch} \varepsilon_i x \cos \eta_i x, \quad \omega_4^{(i)}(x) = \varepsilon_i \text{ch} \varepsilon_i x \sin \eta_i x + \eta_i \text{sh} \varepsilon_i x \cos \eta_i x, \\
p_i = \beta_{11}^{(i)} (\lambda + 1 + \varepsilon_i^2 - \eta_i^2) + \beta_{12}^{(i)} \lambda (\lambda + 1), \quad q_i = \beta_{06}^{(i)} + (\lambda + 1) [\lambda (\beta_{12}^{(i)} + 1) + \beta_{11}^{(i)} - 1]
\end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (13) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_i, B_i, C_i, D_i$  необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, \varepsilon_i, \eta_i) = 0 \tag{14}$$

Если параметры анизотропии такие, что взамен (12) имеет место соотношение

$$z = \pm i b_k^{(i)} \tag{15}$$

то общее решение (10) будет иметь вид

$$f_i(\theta, \lambda) = A_i \cos b_1^{(i)} \theta + B_i \sin b_1^{(i)} \theta + C_i \cos b_2^{(i)} \theta + D_i \sin b_2^{(i)} \theta \tag{16}$$

С помощью (16), удовлетворив граничным условиям (5)-(8), взамен (13) будем иметь следующую систему линейных однородных уравнений относительно восьми  $A_i, B_i, C_i, D_i$  коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\cos b_1^{(1)} \alpha A_1 + \sin b_1^{(1)} \alpha B_1 + \cos b_2^{(1)} \alpha C_1 + \sin b_2^{(1)} \alpha D_1 = 0 \\
b_1^{(1)} \sin b_1^{(1)} \alpha A_1 - b_1^{(1)} \cos b_1^{(1)} \alpha B_1 + b_2^{(1)} \sin b_2^{(1)} \alpha C_1 - b_2^{(1)} \cos b_2^{(1)} \alpha D_1 = 0 \\
\cos b_1^{(2)} \beta A_2 - \sin b_1^{(2)} \beta B_2 + \cos b_2^{(2)} \beta C_2 + \sin b_2^{(2)} \beta D_2 = 0 \\
b_1^{(2)} \sin b_1^{(2)} \beta A_2 + b_1^{(2)} \cos b_1^{(2)} \beta B_2 + b_2^{(2)} \sin b_2^{(2)} \beta C_2 - b_2^{(2)} \cos b_2^{(2)} \beta D_2 = 0 \\
A_1 + C_1 - A_2 - C_2 = 0 \\
b_1^{(1)} B_1 + b_2^{(1)} D_1 - b_1^{(2)} B_2 - b_2^{(2)} D_2 = 0 \\
\omega_{11} A_1 + \omega_{21} C_1 - \omega_{12} A_2 - \omega_{22} C_2 = 0 \\
b_1^{(1)} q_{11} B_1 + b_2^{(1)} q_{21} D_1 - b_1^{(2)} q_{12} B_2 - b_2^{(2)} q_{22} D_2 = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

где обозначено

$$\omega_{ki} = \beta_{11}^{(i)}(\lambda + 1) - \beta_{11}^{(i)}b_k^{(i)} + \beta_{12}^{(i)}\lambda(\lambda + 1),$$

$$q_{ki} = \beta_{12}^{(i)}\lambda(\lambda + 1) + \beta_{66}^{(i)}\lambda^2 + \beta_{11}^{(i)}(\lambda + 1 - b_k^{(i)2})$$

Для существования нетривиального решения (17) необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, b_k^{(i)}) = 0 \quad (18)$$

Из (2) и (9) следует, что если  $0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$ , то при приближении к краю поверхности соединения ( $r \rightarrow 0$ ) напряжения неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен  $|\operatorname{Re} \lambda - 1|$ . А если  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$ , напряжения убывают до нуля при приближении к вершине угла.

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения составного анизотропного тела при плоской деформации приводится к отысканию корня  $\lambda$  трансцендентного уравнения (14) или (18) с наименьшей положительной действительной частью для фиксированных углов и механических характеристик соединяемых материалов.

Численные расчеты проведены для различных групп значений параметров анизотропии:

I.  $\nu_r^{(1)} = \nu_r^{(2)} = 0,3$ ;  $\nu_{zr}^{(1)} = \nu_{zr}^{(2)} = 0,2$ ;  $\nu_{\theta z}^{(1)} = \nu_{\theta z}^{(2)} = \nu_{z\theta}^{(1)} = \nu_{z\theta}^{(2)} = 0,25$ ;

$$\nu_{r\theta}^{(1)} = \nu_{r\theta}^{(2)} = 0,35$$

$$E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 10^5$$
;  $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 16 \cdot 10^5$ ; ( $\gamma = 16$ );  $G_{r\theta}^{(i)} = E_r^{(i)} / 2(1 + \nu_r^{(i)})$ .

II.  $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 2 \cdot 10^5$ ;  $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 10^5$ ; ( $\gamma = 1/2$ ) остальные параметры имеют такие же значения, как в 1) случае.

III.  $E_j^{(1)} = 2 \cdot 10^5$ ;  $E_j^{(2)} = 10^5$ ; ( $\gamma = 1/2$ );  $G_{r\theta}^{(i)} = \frac{E_r^{(i)}}{2(1 + \nu_r^{(i)})}$  ( $\nu_{jk}^{(i)} = 0,3$  изотропный случай)

IV.  $E_j^{(1)} = 10^5$ ;  $E_j^{(2)} = 16 \cdot 10^5$ ; ( $\gamma = 16$ );  $G_{r\theta}^{(i)} = \frac{E_r^{(i)}}{2(1 + \nu_r^{(i)})}$

( $\nu_{jk}^{(i)} = 0,3$  изотропный случай)

V.  $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 2 \cdot 10^5$ ;  $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 10^5$ ; ( $\gamma = 1/2$ );

$$G_{r\theta}^{(i)} = 0,4 \frac{E_r^{(i)}}{(1 + \nu_r^{(i)})}$$
;  $\nu_{jk}^{(i)}$  - как в I.

VI.  $E_j^{(1)} = E_j^{(2)} = 10^5$  ( $\gamma = 1$  однородное тело),

$$G_{r\theta}^{(i)} = 0,4 \frac{E_r^{(i)}}{(1 + \nu_r^{(i)})}$$
;  $\nu_{jk}^{(i)}$  - как в I.

VII.  $E_j^{(1)} = E_j^{(2)} = 10^5$  ( $\gamma = 1$  однородное тело),

$$G_{r,\theta}^{(i)} = 0,75 \frac{E_r^{(i)}}{(1 + \nu_{rz}^{(i)})}; \nu_{jk}^{(i)} - \text{как в I.}$$

VIII.  $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)} = 2 \cdot 10^5$ ;  $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 10^5$ ; ( $\gamma = 1/2$ );

$$G_{r,\theta}^{(i)} = 0,75 \frac{E_r^{(i)}}{(1 + \nu_{rz}^{(i)})}; \nu_{jk}^{(i)} - \text{как в I.}$$

IX.  $E_j^{(1)} = E_j^{(2)} = 10^5$ ;  $E_r^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 2 \cdot 10^5$ ; ( $\gamma = 2$ );

$$G_{r,\theta}^{(i)} = 0,75 \frac{E_r^{(i)}}{(1 + \nu_{rz}^{(i)})}; \nu_{jk}^{(i)} - \text{как в I.}$$

Здесь  $\gamma = E_j^{(2)} / E_j^{(1)}$ ;  $i = 1, 2$ ;  $j = r, \theta$ ;  $k = r, \theta, z$ , а  $E, G$  даны в МПа.

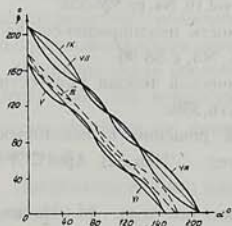
Во всех численных расчетах учтено замечание Фойгта на счет равенства  $E_r^{(1)} = E_\theta^{(1)}$  [8].

Результаты численных расчетов приведены в табл. 1.

Можем построить кривые, которые при фиксированных значениях механических характеристик материалов, на плоскости  $\alpha\beta$ , разделяют области конечных и бесконечных напряжений [1-3]. Предполагая, что вблизи границы области высокой концентрации напряжений наименьший корень уравнения (18) действительный, поставим в нем  $\lambda = 1$  и найдем наименьшие положительные значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от параметров анизотропии. Отметим, что предварительно освободились от трехкратного корня  $\lambda = 1$  этого уравнения. Для этого все элементы четвертой и восьмой столбцов разделили на  $b_2^{(i)}$ . Тогда элементы  $a_{14}$  и  $a_{38}$  определителя (18) превращаются в неопределенность типа  $0/0$ . Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 1$  ( $b_2^{(i)} \rightarrow 0$ ) получим  $a_{14} = \alpha$ ,  $a_{38} = -\beta$ . Геометрические места найденных таким образом

точек в плоскости  $\alpha\beta$  образуют те предельные кривые, которые разделяют концентрационную область (выше кривых от областей мало напряженности (ниже кривых) (фиг.2). Для точек этих кривых численным анализом проверяем обоснованность вышеупомянутого предположения [3]. При обнаружении комплексных корней в (18) полагаем  $\text{Re } \lambda = 1$ .

Из графиков и таблицы видно, что зона мало напряженности может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от характеристик анизотропии.



Фиг. 2

$$\alpha + \beta = \pi$$

Таблица 1

$\alpha^\circ$	$\lambda_1$				
	I	II	III	IV	V
10	1,166	0,94	0,913	1,116	0,82
20	1,34	0,91	0,882	1,26	0,79
30	1,57	0,91	0,733	1,12	0,80
40	1,33	0,95	0,921	1,30	0,82
50	1,118	1,01	0,968	1,10	0,86
60	0,97	1,06	0,846	0,98	0,89
70	0,88	1,06	1,018	0,86	0,90
80	0,81	1,02	0,992	0,80	0,88
90	0,78	1,00	0,964	0,77	0,86
100	0,77	0,97	0,94	0,76	0,85
110	0,79	0,98	0,95	0,77	0,86
120	0,86	1,01	0,986	0,84	0,88
130	0,95+0,1i	1,06	1,01	0,93+0,08i	0,92
140	0,86	1,13	1,09	0,83	0,97
150	0,75	1,17	1,129	0,73	0,991
160	0,68	1,15	1,1	0,66	0,97
170	0,66	1,10	1,05	0,64	0,93

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд.-во АН Армении, 1987. 338с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 382с.
3. Аксентян О.К., Луцик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного // Изв.АН СССР. МТТ, 1978. N5, с.102-108.
4. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of extension // J.Appl.Mech., 1952, vol.19, N4, pp.526-528.
5. Акопян А.Г., Задоян М.А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев // Изв. Росс. АН. МТТ. 1992. N5, с.88-96.
6. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропных тел. -Ереван: Изд.-во ЕГУ, 1976.536с.
7. Геворгян С.Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел // Изв.АН Арм.ССР. Механика, 1968, Т.21, N4, с.30-39.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. -М. Наука. 1977. 416с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
28.02.1995

Уравнения состояния запишутся аналогично [3].

Компоненты деформации и уравнения равновесия представляются известным образом [1].

Учитывая, что при  $\gamma = 0$   $U_1 = U(\alpha)$ ,  $U_2 = 0$ ,  $U_3 = W(\alpha)$ , для компонент перемещения какой-либо точки оболочки, согласно (1.1), получим

$$U_1 = U(\alpha) - \gamma \frac{dW}{d\alpha}, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = W(\alpha) \quad (1.2)$$

Пусть поверхности оболочки  $\gamma = \pm h/2$  электропроводны и заданы значения электрического потенциала  $\varphi(\alpha, \gamma)$  на этих поверхностях:

$$\varphi = \varphi(\alpha, \gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \quad (1.3)$$

Уравнения электродинамики для пьезосреды в электростатическом приближении запишутся следующим образом [3]:

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0 \quad (1.4)$$

Введя электрический потенциал  $\varphi$  по формуле

$$E = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.5)$$

тождественно удовлетворим второму уравнению (1.4), так как

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}, \quad (1.6)$$

а первое уравнение переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial D_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_3}{\partial \gamma} = 0 \quad (1.7)$$

Решая уравнения состояния относительно  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и подставляя  $e_{ij}$  с учетом (1.2) получим следующие значения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= S_{11} \left[ \frac{dU}{d\alpha} + \nu \frac{W}{R} - \gamma \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right] - B'_1 E_3, \\ \sigma_{22} &= S_{11} \left[ \nu \frac{dU}{d\alpha} + \frac{W}{R} - \nu \gamma \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \right] - B'_1 E_3, \\ \sigma_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $R$  - радиус кривизны срединной поверхности оболочки,

$$S_{11} = \frac{S_{11}^E}{\Delta} = \frac{1}{S_{11}^E (1 - \nu^2)}, \quad \Delta = (S_{11}^E) - (S_{12}^E)^2,$$



$$B_1' = \frac{d_{31}(S_{11}^E - S_{12}^E)}{\Delta} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)}, \quad \nu = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}$$

С помощью (1.8), определяя внутренние силы и моменты с точностью  $1 \pm \frac{\gamma}{R_i} \approx 1$  и подставляя их значения в уравнения равновесия,

добавляя к этим уравнениям (1.7), приходим к системе трех уравнений относительно трех искоемых функций  $U, W, \varphi$ :

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dW}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^4 W}{d\alpha^4} + \frac{12}{h^2} \left[ \frac{\nu}{R} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{W}{R^2} \right] + \frac{12}{h^3} \frac{B_1'}{S_{11}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} d\gamma = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + [a_2 - 2a_1] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} + \frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = 0 \quad (1.9)$$

где  $a_1 = \frac{B_1' d_{31}}{\varepsilon_{11}^T}$  - коэффициент электромеханической связи,  $a_2 = \frac{\varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{11}^T}$ .

2. Рассмотрим задачу изгиба пьезокерамической полубесконечной цилиндрической оболочки, когда край  $\alpha = 0$  шарнирно закреплен и на краю действует изгибающий момент  $M$

$$W = 0, \quad M_1 = M, \quad T_1 = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad (2.1)$$

Исключая из системы (1.9)  $U(\alpha)$ , получим

$$\frac{d^4 W}{d\alpha^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} W + \frac{12}{h^3} \frac{B_1'}{S_{11}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} d\gamma = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + [a_2 - 2a_1] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2} + \frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\varepsilon_{11}^T} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = 0$$

а) Решение системы (2.2) представим в виде

$$W = A \exp\left(-P \frac{\alpha}{h}\right), \quad \varphi = \psi(\gamma) \exp\left(-P \frac{\alpha}{h}\right) \quad (2.3)$$

где  $A, P$  - искоемые постоянные.

В этом случае граничные условия (2.1) будут

$$W = 0, \quad \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = -\frac{12}{S_{11}h^3} M, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \psi(\gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad (2.4)$$

Из (1.3) для  $\Psi(\gamma)$  получим

$$\psi(\gamma) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm h/2 \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3) во второе уравнение системы (2.2), приходим к диффе-

рещиальному уравнению относительно  $\Psi(\gamma)$ , решение которого будет

$$\Psi(\gamma) = C_1 \cos \frac{P}{h} \sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}} \gamma + C_2 \sin \frac{P}{h} \sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}} \gamma - A \frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\epsilon_{11}^T} \quad (2.6)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5), получим

$$\Psi(\gamma) = A \frac{(1+\nu)S_{11}d_{31}}{\epsilon_{11}^T} \left[ \frac{\cos \frac{P}{h} \sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}} \gamma}{\cos \frac{P}{2} \sqrt{\frac{1}{a_2 - 2a_1}}} - 1 \right], \quad (2.7)$$

при  $C_2 = 0$ .

Подставляя (2.7) в первое уравнение системы (2.2), приходим к следующему трансцендентному уравнению относительно  $P$

$$P^4 - 12(1+\nu)a_1 P^2 + 24(1+\nu)a_1 \sqrt{a_2 - 2a_1} P \operatorname{tg} \frac{P}{2} \frac{1}{\sqrt{a_2 - 2a_1}} + 12(1-\nu^2) \frac{h^2}{R^2} = 0 \quad (2.8)$$

Разлагая тригонометрическую функцию в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P^4 + 12(1-\nu^2) \frac{h^2}{R^2} \frac{a_2 - 2a_1}{a_2 - (1-\nu)a_1} = 0 \quad (2.9)$$

Сохранение следующих членов ряда  $\operatorname{tg} \frac{P}{2} \frac{1}{\sqrt{a_2 - 2a_1}}$  с точки зрения построения решения задачи не имеет смысла, так как число искомых постоянных будет превышать число граничных условий.

Нас будут интересовать те решения, для которых  $\operatorname{Re} P$  положителен. Так как для пьезоэлектриков, приведенных в табл. 1 [4], второй член уравнения (2.9) положителен, будет два таких  $P$ . Третье  $P$  получится при  $C_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_3 = 2\pi \sqrt{a_2 - 2a_1} \quad \Psi_3(\gamma) = C_2 \sin 2\pi \frac{\gamma}{h}$$

Удовлетворяя (2.3) граничным условиям (2.4), определим искомые постоянные, откуда и получим решение задачи.

б) Решение системы (2.2) представим в виде

$$W = A \exp\left(-q \frac{\alpha}{h}\right), \quad \varphi = \Phi(\alpha) \left[1 - \frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \quad (2.10)$$

где  $A, q$  - искомые постоянные.

Таблица 1

НАИМЕНОВАНИЕ	ФОРМУЛА	КЛАСС	$S_{10}^h, 10^{-12}$ еА. СГСЭ	$S_{12}^h, 10^{-12}$ еА. СГСЭ	$d_{31}, 10^{-8}$ еА. СГСЭ	$d_{33}, 10^{-8}$ еА. СГСЭ	$d_{31}, 10^{-8}$ еА. СГСЭ	$\epsilon_{11}^T$	$\epsilon_{33}^T$	$a_1$	$a_2$
Дигидрофосфат аммония	$NH_4H_2PO_4$	$\bar{4}2m$	1.82	0.19				56.4	16.4		0.291
Арагонит	$CaCO_3$	$mmm$						9.8	6.6		0.673
Виннокислый калий	$C_4H_4O_6$	2	2.24	-0.08				6.44	6.49		1.008
Кварц	$SiO_2$	32	1.279	-0.1535				4.5	4.6		1.072
Дефторированный дигидрофосфат калия	$KH_2PO_4$	$\bar{4}2m$	1.65	-0.4				4.6	21.8		4.739
Кремний	Si	$m\bar{3}m$	0.768	-0.214				12	12		1
Дигидрофосфат рубидия	$RbH_2PO_4$	$\bar{4}2m$	19	-4	-12.4	16.8	53.9	3.51	3.54	$2.92 \cdot 10^{-4}$	1.0085
Рубин	$Al_2O_3$	$\bar{3}m$	0.2353	-0.0716				8.6	10.55		1.227
Рутил	$TiO_2$	$4/mmm$						86	170		1.977
Сульфид кадмия	CdS	$6mm$	2.22	-0.87	-1.7	-3.4	4.7	9.3	10.3	$0.23 \cdot 10^{-4}$	1.1075
Поляризованная титаната бария	$BaTiO_3$	$\infty m$			-2.35	5.73	7.8	1596			
Турмалин		$3m$	0.385	0.048	1.03	5.5	10.9	8.2	7.5	$0.38 \cdot 10^{-4}$	0.915
PZT-4			1.23	-0.405	-123	289	496	1475	1300	$12.4 \cdot 10^{-4}$	0.881

Граничные условия (2.1) будут

$$W = 0, \quad \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = -\frac{12}{S_{11} h^3} M, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0, \quad \Phi(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad (2.11)$$

Интегрируя второе уравнение (2.2) по  $\gamma$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2$  и подставляя (2.10) в (2.2), при этом, исключая из этой системы  $\Phi(\alpha)$ , приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^3 + 12[(1-\nu)a_1 - a_2]\lambda^2 + 12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}\lambda + 144(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2}[2a_1 - a_2] = 0 \quad (2.12)$$

где  $\lambda = q^2$ .

Для большинства пьезоэлектриков дискриминант уравнения (2.12) положителен, следовательно, это уравнение имеет одно действительное и два комплексно сопряженных решения.

Обозначая нужные нам решения уравнения (2.12) через  $q_1, q_2, q_3$ , для  $W$  и  $\Phi(\alpha)$  будем иметь

$$W = \sum_{i=1}^3 A_i \exp\left(-q_i \frac{\alpha}{h}\right), \quad \Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^3 C_i \exp\left(-q_i \frac{\alpha}{h}\right) \quad (2.13)$$

где постоянные  $C_i$  связаны с  $A_i$  следующим образом:

$$C_i = -\frac{1}{q_i^2} \left[ q_i^4 + 12(1-\nu^2)\frac{h^2}{R^2} \right] \frac{S_{11}}{8B'_1} A_i \quad (2.14)$$

Удовлетворяя (2.13) граничным условиям (2.11), с учетом (2.14) получим искомые постоянные, следовательно и решение

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{12M}{S_{11}h} \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{[q_1^2 - q_2^2][q_1^2 - q_3^2]} \left[ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_2^2 q_3^2} \right] \\ A_2 &= \frac{12M}{S_{11}h} \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{[q_2^2 - q_1^2][q_2^2 - q_3^2]} \left[ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_3^2} \right] \\ A_3 &= \frac{12M}{S_{11}h} \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{[q_3^2 - q_1^2][q_3^2 - q_2^2]} \left[ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

В табл. 2 приведены собственные значения характеристических уравнений (2.9) и (2.12) для некоторых пьезокристаллов.

$q_i^0$  - собственные значения характеристического уравнения (2.12), когда отсутствует явления пьезоэффекта ( $d_{ij} = 0$ ).

При отсутствии явления пьезоэффекта ( $d_{ij} = 0$ )

$$W = \frac{M}{2K^2 D} \exp(-K\alpha) \sin K\alpha, \quad (2.16)$$

Таблица 2

	$h/R$	$i$	1.2	3
CdS	0.1	$P_i$	0.399175(1±i)	6.608798
		$q_i$	0.399175(1±i)	3.645522
		$q_i^0$	0.399177(1±i)	3.645545
	0.01	$P_i$	0.12623(1±i)	6.608798
		$q_i$	0.12623(1±i)	3.645522
		$q_i^0$	0.126231(1±i)	3.645545
PZT-4	0.1	$P_i$	0.404239(1±i)	5.886206
		$q_i$	0.404246±0.404234i	3.249923
		$q_i^0$	0.404429(1±i)	3.251461
	0.01	$P_i$	0.127832(1±i)	5.886206
		$q_i$	0.127832(1±i)	3.249925
		$q_i^0$	0.127892(1±i)	3.251461
RbH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	0.1	$P_i$	0.411454(1±i)	6.304807
		$q_i$	0.411455±0.411453i	3.478395
		$q_i^0$	0.41149(1±i)	3.478793
	0.01	$P_i$	0.130113(1±i)	6.304807
		$q_i$	0.130113(1±i)	3.478395
		$q_i^0$	0.130125(1±i)	3.478793

где  $K = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R^2}}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — жесткость оболочки.

Известно, что (2.16) достигает своего максимума при  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4K}$  [5]

$$W_{\max} = \frac{M}{2\sqrt{2}K^2 D} \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.17)$$

Для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT-4, сравнивая значения (2.13) и (2.17) и определяя значение электрического потенциала (2.10) в точке  $\alpha_0$ , получим

$$\frac{W}{W_{\max}} = 0,999, \quad \varphi(\alpha_0, \gamma) = 6,221 \cdot 10^{-10} \frac{M}{h} \left[1 - \frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \quad \text{при } \frac{h}{R} = 0,1$$

$$\frac{W}{W_{\max}} = 0,999, \quad \varphi(\alpha_0, \gamma) = 6,054 \cdot 10^{-10} \frac{M}{h} \left[1 - \frac{4\gamma^2}{h^2}\right] \quad \text{при } \frac{h}{R} = 0,01$$

3. Пусть заданы следующие граничные условия:

$$W = 0, \quad M_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{при } \alpha = 0 \quad (3.1)$$

Решение системы (2.2) будем искать в виде, аналогичном представлению (2.10) в случае б), согласно которому получается

характеристическое уравнение (2.12). Обозначая необходимые решения уравнения (2.12) через  $q_1, q_2, q_3$ , для  $W$  и  $\Phi(\alpha)$  будем иметь (2.13)

Удовлетворяя (2.13) граничным условиям (3.1), с учетом (2.14) получим

$$\begin{aligned} A_1 &= 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{[q_1^2 - q_2^2][q_1^2 - q_3^2]} \left[ \frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_2^2 q_3^2} \right] \\ A_2 &= 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{[q_2^2 - q_1^2][q_2^2 - q_3^2]} \left[ \frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_3^2} \right] \\ A_3 &= 12(1+\nu)d_{31}\varphi_0 \frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{[q_3^2 - q_1^2][q_3^2 - q_2^2]} \left[ \frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{R^2}{h^2} - \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.13), получим решение задачи.

Например, в табл.3 приводятся значения параметра  $b(\alpha)$  и  $\Phi(\alpha)$  в точке  $\alpha_0$  для оболочки, изготовленной из пьезокерамики PZT-4

где  $b(\alpha) = \frac{W(\alpha)}{d_{31}\varphi_0}$ .

Таблица 3

$h/R$	$b(\alpha_0)$	$\Phi(\alpha_0)$
0.1	30.91	-0.005 $\varphi_0$
0.01	313.57	-0.002 $\varphi_0$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. - М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. -М.: Наука, 1974. 446 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитноупругости пластин. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Переломова Н.В., Тагиева М.М. Задачник по кристаллофизике. М.: Наука, 1982. 285 с.
5. Бабаян А.В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки под действием изгибающего момента. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, №1, с. 77-81.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
29.05.1996