

**ВОЛНЫ ИЗГИБА И ДРУГИЕ ДЛЯ ОДНОЙ
 ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ**

Мовсисян Л. А.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Մի պիեզոէլեկտրիկ սալում ծոման և այլ ալիքները

Ուսումնասիրվում է խորանարդային համակարգի $23, \overline{43} m$ դասի սալում միաչափ ալիքները: Հիմքում դրված է ուղիղների վարկածը ընդհանրացված ձևով: Կախված բյուրեղի սիմետրիայի առանցքների դիրքից տարբեր տիպի ալիքները (ծոման, սափքի, ծոման և ոլորման) տարբեր զուգորդումով են հանդես գալիս: Այդպիսին է նաև պիեզոէլեկտրիկը:

Movsisian L. A.

The bending and other waves in one piezoelectric plate

Изучаются одномерные волны в пластинке из пьезоэлектрика кубической системы класса $23, \overline{43} m$. В зависимости от ориентации его осей симметрии по отношению к сторонам пластинки различные волны появляются в различных сочетаниях. Эффект пьезоэлектричества также по-разному проявляется.

В основу положена гипотеза прямых в обобщенном виде.

1. Имеется бесконечная пластинка из пьезоэлектрика кубической системы (класс $23, \overline{43} m$). Волны распространяются по оси x , а ось z нормальна к срединной плоскости. Изгиб пластинки происходит в плоскости xz .

Принимаются следующие кинематические и геометрические предположения:

$$\sigma_z = e_y = 0$$

$$u_x = u + \frac{2}{h} z \varphi, \quad u_y = v + \frac{2}{h} z \psi, \quad u_z = w \quad (1.1)$$

h - толщина пластинки.

При этом компоненты деформаций суть следующие:

$$e_x = \varepsilon_1 + \frac{2}{h} z \chi_1, \quad e_{xy} = \varepsilon_2 + \frac{2}{h} z \chi_2, \quad e_{xz} = \gamma_1, \quad e_{yz} = \gamma_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \chi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{h} \varphi + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{h} \psi \quad (1.2)$$

(Величины σ_i и e_i определяются).

Напряженность электрического поля и электрическая индукция удовлетворяют уравнениям [1]

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0 \quad (1.3)$$

Считается, что внешние плоскости пластинки покрыты металлическим слоем, поэтому для электрического потенциала примем

$$\Phi = F(x, t) \left(1 - \frac{4}{h^2} z^2 \right), \quad E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (1.4)$$

Величины u, \dots, ψ характеризуют растяжение, сдвиг, изгиб и кручения. Вопрос ставится следующим образом, какие из этих волн появляются совместно и на какие волны пьезоэффект действует и как?

Определяющие уравнения в системе осей симметрии есть

$$\begin{aligned} e_i &= a_{ij} \sigma_j, & a_{ij} &= \begin{cases} a_{11}, & i = j \\ a_{12}, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{cases} \\ e_i &= a_{44} \sigma_i + dE_{i-3}, & i &= 4, 5, 6 \\ D_i &= d\sigma_{i+3} + \chi E_i, & i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

В обычных обозначениях уравнения движения пластинки будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial S}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= N_1 + \frac{\rho h^2}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, & \frac{\partial H}{\partial x} &= N_2 + \frac{\rho h^2}{6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

В случае, когда оси координат направлены по осям кристаллографической системы, то из искомого величин только ψ (кручение относительно оси x) зависит от электрического эффекта следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2} \psi - \frac{8d}{h} \frac{\partial F}{\partial x} \\ (A_{44} d^2 - \chi) \left(\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F \right) &+ \frac{h}{2} A_{44} d \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

И скорость волны кручения определяется

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{12}{h^2 k^2} + \frac{4\eta}{1-\eta} \left(1 - \frac{h^2 k^2}{12} \right), \quad c^2 = \frac{A_{44}}{\rho}, \quad \eta = \frac{A_{44} d^2}{\chi} \quad (1.8)$$

Как видно из последней формулы, чем длиннее волна, тем больше эф-

факт электричества и, чем больше параметр $\eta (\eta < 1)$, тем больше этот эффект.

2. Если ось x составляет угол α относительно оси симметрии кристалла (поворот относительно оси z), то определяющие уравнения будут

$$\begin{aligned} e_x &= a'_{11}\sigma_x + a'_{12}\sigma_y + a_{12}\sigma_z + a'_{16}\sigma_{yz} + d_1E_z \\ e_y &= a'_{12}\sigma_x + a'_{11}\sigma_y + a_{12}\sigma_z - a'_{16}\sigma_{yz} - d_1E_z \\ e_z &= a_{12}(\sigma_x + \sigma_y) + a_{11}\sigma_z \\ e_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz} + d_2E_x - d_3E_y \\ e_{xz} &= a_{44}\sigma_{xz} + d_3E_x - d_2E_y \\ e_{xy} &= a'_{16}(\sigma_x - \sigma_y) + a_{66}\sigma_{xy} + d_4E_z \\ D_x &= d_2\sigma_{yz} + d_3\sigma_{xz} + \chi E_x \\ D_y &= -d_3\sigma_{yz} + d_2\sigma_{xz} + \chi E_y \\ D_z &= d_1(\sigma_x - \sigma_y) + d_4\sigma_{xy} + \chi E_z \end{aligned} \quad (2.1)$$

значения новых коэффициентов податливости a'_y можно взять например из [2], а d_i есть

$$d_1 = 0,5d \sin 2\alpha, \quad d_2 = d \cos \alpha, \quad d_3 = d \sin \alpha, \quad d_4 = d \cos 2\alpha \quad (2.2)$$

В предположениях предыдущего пункта уравнения движений в перемещениях будут

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} A_{44} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{3} d_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ B_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{32}{h^2} D_1 \frac{\partial F}{\partial x} &= \\ = \frac{6}{h} A_{44} \left(\frac{2}{h} \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \\ B_{16} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{32}{h^2} D_2 \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{12}{h^2} A_{44} \psi + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ (A_{44} d_2 - \chi) \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + [C_{11} d_1^2 + (B_{16} + C_{66}) d_1 d_4 + \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$+ B_{66}d_4^2 - \chi]F + \frac{h^2}{8} A_{44}d_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + D_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Здесь

$$D_1 = \frac{h}{4} (A_{44}d_3 + C_{11}d_1 + B_{16}d_4)$$

$$D_2 = \frac{h}{4} (A_{44}d_2 + C_{66}d_1 + B_{66}d_4)$$

$$C_{11} = B_{11} \left(1 + \frac{a'_{12}}{a'_{11}} \right) - B_{16} \frac{a'_{16}}{a'_{11}}, \quad C_{66} = B_{16} \left(1 + \frac{a'_{12}}{a'_{11}} \right) - B_{66} \frac{a'_{16}}{a'_{11}}$$

$$A_{11} = a'_{11} - \frac{(a'_{12})^2}{a'_{11}}, \quad A_{16} = \frac{a'_{16}(a'_{11} + a'_{12})}{a'_{11}}, \quad A_{66} = a'_{66} - \frac{(a'_{16})^2}{a'_{11}}$$

$$B_{11} = \frac{A_{66}}{\Delta}, \quad B_{16} = -\frac{A_{16}}{\Delta}, \quad B_{66} = \frac{A_{11}}{\Delta}$$

$$\Delta = A_{11}A_{66} - A_{16}^2$$

Из полученных систем видно, что волны растяжения и сдвига распространяются без дисперсии, не вызывая электрического эффекта. Волны же изгиба и кручений присутствуют совместно, при этом сопровождаются электричеством.

Для выяснения картины изменения скоростей в зависимости от угла α рассмотрен пример материала Германат висмута (кл. 23) с данными [1].

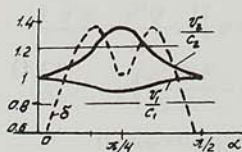
$$c_{11} = 128 \text{ ГПа}, \quad c_{12} = 30,5 \text{ ГПа}, \quad c_{44} = 25,5 \text{ ГПа}$$

$$c_{44} = A_{44}, \quad \rho = 9,23 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \quad (2.5)$$

$$c_{11} = (a_{11} + a_{12})\Delta_1^{-1}, \quad c_{12} = -a_{12}\Delta_1^{-1}, \quad c_{44} = a_{44}^{-1}, \quad \Delta_1 = (a_{11} - a_{12})(a_{11} + 2a_{12})$$

Пьезоэлектрический модуль равен $0,9 \text{ Кл/м}^2$.

Диэлектрическая проницаемость $\chi - c_{44}d^2 = 34,2 \cdot 10^{-11} \frac{\Phi}{\text{м}}$. На фиг. 1



Фиг. 1

приведены кривые относительных скоростей растяжения v_1/c_1 и сдвига v_2/c_2 в зависимости от α . Скорость c_1 и c_2 — соответствующие скорости при $\alpha = 0$, причем $c_1 = 3616 \text{ м·сек}^{-1}$, $c_1/c_2 = 2,176$. Как видно из фиг. 1, в интервале изменения α продольная скорость получает наименьшее значение при $\alpha = \pi/4$, в то время как сдвиговая, наоборот, наибольшее значение получает при этом. Изменение значения скоростей

поперечной и продольной волн в зависимости от угла поворота обсуждается в [3].

Получено выражение фазовой скорости изгибной волны (наименьшая среди (2.4)), с точностью $h^4 k^4$. Ниже приводится формула для нее в основном порядке (второй член из-за громоздкости не приводится).

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{h^2 k^2}{12} (1 + 2\delta), \quad a^2 = \frac{B_{11}}{\rho}$$

$$\delta = \frac{(C_{11}d_1 + B_{16}d_4 + 0,5A_{44}d_3)(C_{11}d_1 + B_{16}d_4)}{B_{11}(\chi - B_{11}d_1^2 - B_{66}d_4^2)}$$
(2.6)

Величина δ характеризует влияние пьезоэлектричества на скорость волны. На фиг. 1 пунктирная кривая - это δ для материала (2.5). Как видно из фигуры, пьезоэффект увеличивает скорость изгибной волны (в качестве единицы выбран δ при $\alpha = \pi/4$ - $\delta = 0,06737$).

3. При повороте кристаллов относительно оси y полученная система выглядит следующим образом:

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{16} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{66} \left(\frac{2}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
(3.1)

$$A_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{6}{h} B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{12}{h^2} B_{66} \left(\varphi + \frac{h}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2}{3} d_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
(3.2)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2} \psi - \frac{8}{h} d_3 \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$(A_{44}d^2 - \chi) \left(\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F \right) - \frac{h^2}{8} A_{44}d_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h}{2} A_{44}d_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Здесь, в отличие от предыдущего пункта,

$$A_{11} = a'_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}, \quad A_{16} = a'_{16}, \quad A_{66} = a'_{66}$$

Как видно (3.1) и (3.2), только волны сдвига и кручения относительно оси x зависят от пьезоэлектричества.

В табл.1 приведены значения относительной фазовой скорости кручения (1.8) (или (3.2) при $\alpha = 0$) для различных $\bar{\chi} = \chi / A_{44}d^2$ и $\beta = h^2k^2 / 12$

Таблица 1

$\bar{\chi} \backslash \beta$	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125
1,5	6,986	6,349	4,667	4,275	4,014
5	6,490	4,685	3,907	3,451	3,145
∞	6,403	4,582	3,786	3,317	3

Из табл. 1 виден вывод, сделанный в п.1

В табл. 2 приведены относительные фазовые скорости для волны сдвига (малые числа при одинаковом $\bar{\chi}$) и кручения (большие числа).

Таблица 2

$\bar{\chi} \backslash \beta$	0,25	0,05	0,075	0,1	0,125
1,5	6,633	4,982	4,250	3,827	3,548
	1,011	1,022	1,025	1,032	1,038
5	6,441	4,634	3,846	3,384	3,073
	1,001	1,003	1,004	1,005	1,006

Табл. 2 показывает:

а) чем длиннее волна, тем больше влияние пьезоэлектричества на волну кручения и тем меньше на волну сдвига,

б) с увеличением диэлектрической проницаемости ($\bar{\chi}$) обе скорости уменьшаются.

В обоих случаях изменение волны кручения существеннее, чем волны сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
2. Лехницкий С.Т. Анизотропные пластинки. М.:ГИТТЛ. 1957.463 с.
3. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Ново сибирск: Наука, 1982. 239 с.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
28.08.1995