ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Манукян В.Ф.

Վ.Ֆ. Մանուկյան
Միկրոբևեռ միջավայրում սահքի մակերևութային ալիքների գոյության մասին

Քննարկվում է միկրոբևեռ կիսատարածությունում սահքի հարթ մակերևութային ալիքների գոյության հարցը երկու ոչ սիմետրիկ մոդելներով. Ուգոդչիկովի կողմից առաջարկված մոդելով և Կոսերայի մոդելով: Ցուց է տրված, որ Ուգոդչիկովի մոդելով մակերևութային ալիք չի առաջանում: Կոսերայի մոդելի համար ստացվել են մակերևութային ալիքների գոյության պայմանները:

Manookian V. F.
On the existence of surface shear waves in a micropolar medium

Рассматривается вопрос существования плоских сдвиговых поверхностных волн в полупространстве из микрополярного материала для двух несимметричных моделей. Показано, что при использовании модели Угодчикова поверхностной сдвиговой волны не существует. Получено условие существования таких волн по модели Коссера.

Известно, что в классическом случае в полупространстве со свободной границей поверхностной SH-волны не существует.

Задача исследуется для двух моделей: модели, предложенной Угодчиковым [1,2] и теории микрополярной среды Коссера [3,4]. Показано, что по модели Угодчикова поверхностной сдвиговой волны не существует. При другой модели задача рассматривается в двух приближениях. Для этой модели получено условие существования поверхностной сдвиговой волны.

1. Рассмотрим полупространство $y \geq 0$, которое занято континуумом по модели Угодчикова [1] и предположим, что граница $y = 0$ свободна от нагрузок. Пусть $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$, а $u_3 \equiv w(x, y, t)$, где u_1, u_2, u_3 - компоненты вектора смещения.

Уравнение движения имеет вид [1]

$$\mu \Delta w + J \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где Δ -двухмерный оператор Лапласа, т. е. $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, μ -модуль сдвига, ρ - плотность среды, J - динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении [4])

Решение уравнения (1.1) представляем в виде

$$w = Ae^{-k\xi y} \exp i(\omega t - kx) \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в уравнение движения (1.1), получаем следующее выражение:

$$\xi^2 = \frac{1-(1+\theta)\eta}{1-\theta\eta} \tag{1.3}$$

где $\eta = \dfrac{\rho\omega^2}{\mu k^2}$, $\theta = \dfrac{Jk^2}{\rho}$

Из (1.3) получаем условие затухания в виде

$$0 < \eta < \frac{1}{1+\theta} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\theta} < \eta < \infty \tag{1.4}$$

Пренебрегая членом $\gamma\rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ на плоской границе $y = 0$, граничное условие примет вид [1]

$$\mu \frac{\partial w}{\partial y} + J \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} = 0 \tag{1.5}$$

Подставляя (1.2) в (1.5), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[(1+\theta)\eta - 1\right](\theta\eta - 1) = 0$$

Это уравнение имеет два решения: $\eta_1 = \dfrac{1}{1+\theta}$ и $\eta_2 = \dfrac{1}{\theta}$.

Эти значения не удовлетворяют условию (1.4). Следовательно, по модели Угодчикова поверхностной волны не существует. Случай, когда $\eta_1 = \dfrac{1}{1+\theta}$, дает предельную (объемную) волну. Значение $\eta_2 = \dfrac{1}{\theta}$, соответствует тривиальному случаю $(w \equiv 0)$.

2. О распространении поверхностной волны Рэлея в полупространстве из микрополярного материала посвящен раздел XXVI работы [3] А. Эрингена.

Рассмотрим вопрос о существовании поверхностной SH -волны в рамках микрополярной теории Коссера. В этом случае имеем $u_1 \equiv 0, u_2 \equiv 0, u_3 \equiv w(x,y,t), \varphi_z \equiv 0, \varphi_x = \varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y = \varphi_y(x,y,t)$, где $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ - компоненты вектора микровращения.

Уравнение движения теории микрополярной упругости имеет вид [3]

$$(\mu+\chi)\Delta w+\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}\right)-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

$$(\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+\gamma\Delta\varphi_x+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}-2\varepsilon\varphi_x-\rho j\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2}=0 \qquad (2.1)$$

$$(\alpha+\beta)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+\gamma\Delta\varphi_y-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}-2\varepsilon\varphi_y-\rho j\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial t^2}=0$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ - дополнительные упругие коэффициенты изотропной микрополярной упругости, j - мера инерции при вращении.

Рассмотрим волны, которые распространяются в направлении оси x с амплитудой, затухающей в направлении оси y:

$$\varphi_x = A\exp(-k\xi y)\exp i(\omega t-kx)$$
$$\varphi_y = B\exp(-k\xi y)\exp i(\omega t-kx) \qquad (2.2)$$
$$w = C\exp(-k\xi y)\exp i(\omega t-kx)$$

Подставляя (2.2) в уравнения (2.1), получим однородную систему уравнений для A, B, C. Система будет иметь ненулевые решения, если его определитель равен нулю. Это дает

$$\left[(\theta_1+\theta_2+\chi)(\xi^2-1)+\eta-\frac{2k_0^2}{k^2}\right]\left\{\left[\chi(\xi^2-1)+\eta-\frac{2k_0^2}{k^2}\right]\times\right. \qquad (2.3)$$
$$\left.\times\left[(1-\nu)(\xi^2-1)+\eta\right]+\nu\frac{k_0^2}{k_2}(\xi^2-1)\right\}=0$$

где

$$\theta_1\equiv\frac{\alpha}{j\mu},\ \theta_2\equiv\frac{\beta}{j\mu},\ \chi\equiv\frac{\gamma}{j\mu},\ \nu\equiv\frac{\varepsilon}{\mu},\ k_0^2\equiv\frac{\varepsilon}{j\mu},\ \eta\equiv\frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}.$$

Для поверхностных волн мы должны рассмотреть только случай положительных корней ξ_1,ξ_2,ξ_3. Решение (2.2) теперь можно представить в виде

$$\varphi_y=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k A_k\exp(-k\xi_k y)\exp i(\omega t-kx)$$

$$\varphi_x=\sum_{k=1}^{3}\mu_k A_k\exp(-k\xi_k y)\exp i(\omega t-kx)$$

$$w=\sum_{k=1}^{3}\gamma_k A_k\exp(-k\xi_k y)\exp i(\omega t-kx) \qquad (2.4)$$

где

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \frac{(\mu+\varepsilon)(\xi_3^2-1)k^2+\rho\omega^2}{i\varepsilon k(1-\xi_3^2)}$$

$$\mu_1 = \frac{i}{\xi_1},\ \mu_2 = i\xi_2,\ \mu_3 = i\xi_3\frac{(\mu+\varepsilon)(\xi_3^2-1)k^2+\rho\omega^2}{i\varepsilon k(1-\xi_3^2)}$$

$$\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \frac{i\varepsilon k(1-\xi_3^2)}{(\mu+\varepsilon)(\xi_3^2-1)k^2+\rho\omega^2},\ \gamma_3 = 1$$

Предполагая, что плоскость $y=0$ свободна от напряжений, имеем условия [3]

$$(\mu+\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon\varphi_x = 0,\quad \beta\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + (\alpha+\beta+\gamma)\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} = 0$$

Подстановка (2.4) в уравнение (2.5) приводит к однородным уравнениям относительно A_1, A_2, A_3. Из условия нетривиальности решений этой системы получаем

$$\frac{\xi_2-\xi_3}{(1-\xi_3^2)[(1+\nu)(\xi_2^2-1)+\eta]}\Big\{\big[(1+\nu)(\xi_2^2-1)+\eta\big]\big[(1+\nu)(\xi_3^2-1)+\eta\big]\times$$
$$\times(\theta_2+\chi)(\chi-\xi_2\xi_3)+\eta(-\xi_1\xi_2\xi_3(\theta_2+\chi)^2(1+\nu)(\xi_2+\xi_3)+ \tag{2.6}$$
$$+\big[-\theta_1+(\theta_1+\theta_2+\chi)\xi_1^2\big]\big[(1+\nu)\theta_2(1+\xi_2\xi_3)+\chi\xi_2\xi_3\times$$
$$\times(\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_2\xi_3-1)+\eta(\chi\xi_2\xi_3-\theta_2)\big]\big)\Big\}=0$$

Из (2.6) предполагаем, что $\xi_2=\xi_3\neq 1$, для $\nu<<1$ получаем следующее дисперсионное выражение:

$$\eta \approx \frac{2k_0^2}{k^2(1-\chi)} \tag{2.7}$$

Учитывая, что $\xi_2=\xi_3>0$, будем иметь условие

$$0<\eta<\frac{2(\chi+\frac{k_0^2}{k^2})}{\chi+1} \tag{2.8}$$

Для существования поверхностной волны (2.7) необходимо удовлетворить условию (2.8), следовательно, имеем

$$k^2 > \frac{2k_0^2}{1-\chi} \tag{2.9}$$

Таким образом, в приближении $\nu<<1$ для существования волны будем иметь условие (2.9) и $\chi < 1$. Корни ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнения (2.3) в приближении $\nu = 0$ имеют вид

$$\xi_1 = \sqrt{1 - \frac{\eta}{\theta_1 + \theta_2 + \chi}}, \quad \xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\eta}{\chi}}, \quad \xi_3 = \sqrt{1 - \eta} \tag{2.10}$$

В таком приближении уравнение (2.6) имеет следующий вид:

$$L(\eta) = \nu \left\{ \frac{\eta(\theta_2 + \chi)(\xi_2\xi_3 - \chi)(\chi - 1 - \nu)}{\chi(\xi_2 + \xi_3)} - \xi_1\xi_2\xi_3(\theta_2 + \chi)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\theta_2(1 + \xi_2\xi_3)(\theta_2 + \chi - \eta)}{\xi_2 + \xi_3} \right\} + \sqrt{1 - \eta}\{\eta^2 - 2\eta(\theta_2 + \chi) + \tag{2.11}$$
$$+ (\theta_2 + \chi)^2(1 - \xi_1\xi_2)\} = 0$$

При $\chi < 1$ из (2.10) получим условие $0 < \eta < \chi$. Легко показать, что это условие выполняется. Действительно, полагая $\eta = 0$, получаем $L(0) = -\nu\chi(\theta_2 + \chi) < 0$. С другой стороны, при $\eta = \chi$ имеем $L(\chi) = \dfrac{1 + \nu - \chi}{\sqrt{1 - \chi}}(\theta_2^2 + \nu\chi(\theta_2 + \chi)) > 0$. Отсюда следует, что уравнение (2.11) имеет корень η, удовлетворяющий условию $0 < \eta < \chi$. При $\chi > 1$ не всегда существует корень, удовлетворяющий условию затухания.

Сравним результаты, полученные на основе двух разных моделей. В случае, когда полупространство $y \geq 0$ занято континуумом по модели Угодчикова, поверхностной плоской SH-волны не существует. При исследовании задачи по модели Коссера такие волны при условиях (2.9) и $\chi < 1$ существуют.

В заключение выражаю свою благодарность профессору М. В. Белубекяну за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Угодчиков А.Г. Об уравнениях динамики диформируемого твердого тела /ДАН СССР, 1991, т. 317, №1, с. 859-863.
2. Угодчиков А.Г. Моментная динамика линейно-упругого тела /Докл. РАН, 1995, т. 340, №1, с. 56-59.
3. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение. Т.2. М.: Изд. Мир, 1975, с. 646-751.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд. Мир, 1975, с. 872.