ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ - ПОЛОСЫ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КРОМКЕ

Ананян А.К., Хачатрян А.А.

Ա. Կ. Անանյան, Ա. Ա. Խաչատրյան

Բեռնավորված ուղղագիծ եզրով կիսաանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդրի մասին

Աշխատանքում քննարկվում է օժանդակ ֆունկցիաների միջոցով սալերի ճշտգրտված տեսության հավասարումների բերումը ավելի պարզ հավասարումների, տարբեր եղանակնե-րով: Այդ հավասարումների հիման վրա դիտարկվում են իզոտրոպ նյութից պատրաստված կիսաանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդիրներ, հոդակապորեն ամրացված հանդիպակաց կիսաանվերջ կողմերով և տարբեր եղանակներով բեռնավորված վերջավոր երրորդ կողմով: Ստացված լուծումները թույլ են տալիս դատել ինչպես ծռման հավասարումների, այնպես էլ Կիրխհոֆի կլասիկ տեսության կիրառելիության սահմանների մասին եզրային պայմանների ճշգրտման դեպքում:

A. K. Ananyan, A. A. Khachatryan

On One Bending Problem of a Semi-Infinite Plat-Layer Loaded by Its Rectilinear Edge

Известно, что учет поперечных сдвигов в теории пластин приводит к повышению порядка уравнений изгиба пластин [1]. При этом появляется возможность более точного удовлетворения граничным условиям на кромке пластины. Более того, возможны некорректные постановки задач в рамках гипотезы Кирхгофа [2], а с учетом поперечных сдвигов эта некорректность устраняется. Решение задач изгиба плас-тин по уточненной теории С.А.Амбарцумяна в общем случае проводится к решению трех уравнений относительно прогиба срединной плоскости и двух перерезывающих усилий.

В статье обсуждаются различные варианты приведения уравнений уточненной теории пластин к более простым уравнениям с помощью вспомогательных функций. На основе этих уравнений рассматриваются задачи изгиба полубесконечной пластины - полосы, шарнирно опертой по полубесконечным кромкам при нагружениях различного вида на кромке ограниченного размера. Полученные решения позволяют судить как о применимости различных вариантов уравнений изгиба, так и о применимости гипотезы Кирхгофа при уточнении граничных условий.

1. Из уточненной теории анизотропных пластин [1] известно, что задача изгиба пластинки приводится к решению трех дифференциальных уравнений относительно нормального перемещения $W(x,y)$ и неизвестных $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ функций, с соответствующими граничными условиями. В частности, для изотропной пластинки уравнения за-

дачи изгиба следующие:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{1+\nu}{EI_0}Z\\
&-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+\frac{EI_1}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{EI_0}{1+\nu}\varphi\\
&-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{EI_1}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{EI_0}{1+\nu}\psi
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $I_1=\int\limits_{-h}^{h}zI(z)dz,\quad I_0=\int\limits_{-h}^{h}f(z)dz,\quad I(z)=\int\limits_{0}^{z}f(z)dz$

$f(z)$ - функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластинки, причем $f(-h)=f(h)=0$.

В [3] задача изгиба пластинки приведена к решению системы двух независимых уравнений относительно нормального перемещения и введенной новой искомой функции. В частности, в работе [3] введена новая $\Phi(x,y)$ функция, которая связана с функциями $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ следующим образом:

$$
\Phi(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}
\tag{1.2}
$$

С учетом (1.2) система уравнений (1.1), после некоторых несложных преобразований, приводится к следующей системе двух независимых уравнений относительно прогиба $W(x,y)$ и функции $\Phi(x,y)$:

$$
D\Delta\Delta W=Z-\frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\Delta Z,\quad \Delta\Phi-\frac{I_0}{I_1}\Phi=0
\tag{1.3}
$$

В работе [4] также введена новая функция $F(x,y)$, которая связана с функциями $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ следующим образом:

$$
\varphi(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \psi(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}
\tag{1.4}
$$

В этом случае система (1.1) приведена к следующим двум уравнениям:

$$
D\Delta\Delta W=Z-\frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\Delta Z,\quad \Delta F=-\frac{1+\nu}{EI_0}Z
\tag{1.5}
$$

Первое уравнение системы (1.5) получается при подстановке второго и третьего уравнений системы (1.1) в первое уравнение этой же системы с учетом первого уравнения. А при подстановке (1.4) в первое уравнение (1.1) получится второе уравнение системы (1.5). Таким образом, очевидно, что при получении системы (1.5) первое уравнение системы (1.1) было использовано дважды. Из вышесказанного следует, что система (1.5) не эквивалентна системе (1.1). Поэтому было предложено вместо второго уравнения системы (1.5) взять из системы (1.1) любое уравнение кроме первого. Это предложение тоже является некорректным, так как ее использование при решении задач цилиндрического изгиба пластин приводит к противоречию.

В настоящей работе сделана попытка преобразовать систему (1.1) с учетом (1.4), и привести ее к следующему виду:

$$D\Delta\Delta W = Z - \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\Delta Z, \quad -D\Delta W + \frac{2EI_1}{1-\nu^2}\Delta F = \frac{I_0 E}{1+\nu}F + A \qquad (1.6)$$

где $A = \text{const}$.

Теперь рассмотрим задачу изгиба изотропной полубесконечной пластинки-полосы с шарнирно опертыми противоположными полубесконечными сторонами, а на третьей стороне крутящий момент и перерезывающая сила равны нулю, а изгибающий момент равен M_0.

Пусть изотропная полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область пространства $0 \le x \le a$, $0 \le y < \infty$, $-h \le z \le h$. Согласно (1.6) для изотропной полубесконечной пластинки-полосы задача изгиба при отсутствии поперечной нагрузки приводится к решению следующих двух уравнений:

$$\Delta\Delta W = 0, \quad \Delta W = -\frac{I_0 E}{(1+\nu)D}F - \frac{A}{D} \qquad (1.7)$$

Выбранные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &x = 0, a, \quad W = 0, \quad M_1 = 0, \quad F = 0 \\ &y = 0, \quad M_2 = M_0, \quad N_2 = 0, \quad H = 0 \qquad (1.8) \\ &y \to \infty; \quad W \to 0, \quad F \to 0 \end{aligned}$$

Постоянная $A = 0$, так как $y \to \infty$: $W \to 0$, $F \to 0$.

Полагая функцию прогиба $W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \mu_n x$ (1.9)

где $\mu_n = \dfrac{n\pi}{a}$

и функцию $F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \mu_n x$ (1.10)

удовлетворяются поставленные условия шарнирного опирания.

Подставляя значения прогиба $W(x, y)$ из (1.9) в первое уравнение

(1.7) и удовлетворяя граничному условию $y \to \infty$ для функции прогиба получится следующее выражение:

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 + A_2 y) e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) и (1.11) во второе уравнение (1.7), для функции $F(x,y)$ получится

$$F(x,y) = \frac{2(1+\nu)D}{EI_0} A_2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \tag{1.12}$$

Как видно, постановка этой задачи некорректна, так как число постоянных равно двум, а на кромке $y=0$ даны три граничные условия. Во избежание такой неточности вместо крутящего момента и перерезывающей силы необходимо взять обобщенную перерезывающую силу, равной нулю. Тогда (1.8) запишется следующим образом:

$$x = 0, a, \quad W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F = 0$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = -\frac{M_0}{D} \tag{1.13}$$

$$-\frac{2h^3}{3} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + 2I_1 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + I_0 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$y \to \infty, \quad W \to 0, \quad F \to 0$$

где изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила выражены через искомые функции $W(x,y)$ и $F(x,y)$.

Представим M_0 в виде следующего ряда:

$$M_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \mu_n x \tag{1.14}$$

где a_n – известные постоянные. Умножая обе части (1.14) на $\sin \mu_k x$ и интегрируя в пределах от 0 до a, нетрудно получить значения этих постоянных

$$a_n = \frac{2M_0}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n} \tag{1.15}$$

Удовлетворяя граничным условиям на торце $y=0$ получается система алгебраических уравнений. Решая эту систему и подставляя постоянные в уравнение (1.11) и (1.12), с учетом (1.15), получится

$$W(x,y) = -\frac{2M_0 a^2}{(3+\nu)D\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{4I_1 \mu_n^2}{(1-\nu)I_0} - \mu_n y \right] \times$$

$$\times e^{-\mu_n y} \sin \mu_n x \tag{1.16}$$

$$F(x,y)=\frac{4(1+\nu)M_0}{(3+\nu)EI_0\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{-\mu_n y}\sin\mu_n x \tag{1.17}$$

2. Решим ту же задачу с теми же граничными условиями на основе системы (1.3). Согласно (1.3) задача изгиба при $Z=0$ приводится к решению следующих двух уравнений:

$$\Delta\Delta W=0,\quad \Delta\Phi-\frac{I_0}{I_1}\Phi=0 \tag{2.1}$$

Граничные условия (1.8) запишутся следующим образом:

$$x=0,a,\quad W=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$$

$$y=0,\quad \Delta W-(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{2I_1}{I_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta W+\frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=-\frac{M_0}{D}$$

$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W+2GI_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}+\frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta W-\frac{3I_1}{2h^3}\left[\Phi-\frac{2I_1}{I_0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]=0$$

$$y\to\infty\quad W\to 0\quad \Phi\to 0$$

где изгибающий и крутящий моменты, а также перерезывающая сила выражены через искомые функции $W(x,y)$ и $\Phi(x,y)$. Удовлетворении ем граничным условиям на торце $y=0$ получается система алгебраических уравнений. Решение указанной задачи имеет вид:

$$W(x,y)=-\frac{2M_0a^2}{(3+\nu)D\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\left[1+\frac{\omega_n}{3+\nu}\right]^{-1}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}-\mu_n y\right)\times \tag{2.2}$$

$$\times e^{-\mu_n y}\sin\mu_n x$$

$$\Phi(x,y)=\frac{4(1+\nu)M_0}{(3+\nu)EI_1\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left[1+\frac{\omega_n}{3+\nu}\right]^{-1}e^{-\mu_{0n}y}\cos\mu_n x \tag{2.3}$$

где $\omega_n=\dfrac{4I_1\mu_n(\mu_n-\mu_{0n})}{I_0}$, $\mu_n=\dfrac{n\pi}{a}$, $\mu_{0n}^2=\mu_n^2+\dfrac{I_0}{I_1}$

В работе [5] решена первоначальная система уравнений (1.1), в случае $f(z)=1-\dfrac{z^2}{h^2}$ и для прогиба получено следующее выражение:

$$W(x,y)=-\frac{4M_0a^2}{(3+\nu)D\pi^3}\sum_{n=1,3}^{\infty}\left[\frac{1+\nu}{(1-\nu)n^3}-\frac{\pi}{an^2}y\right]\times$$

$$\times\left(1-\frac{4}{3+\nu}\frac{nt_0}{nt_0+\sqrt{1+n^2t_0^2}}\right)^{-1} e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi}{a}y \tag{2.4}$$

где $t_0=\dfrac{2\pi h}{a\sqrt{10}}$

По классической теории пластинок соответствующее выражение для прогиба $W(x,y)$ следующее:

$$W^0(x,y)=-\frac{2M_0a^2}{(3+\nu)D\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}-\mu_n y\right]e^{-\mu_n y}\sin\mu_n x \tag{2.5}$$

Выбрав функцию $f(z)=1-\dfrac{z^2}{h^2}$, для I_0 и I_1 получится

$$I_0=\frac{4}{3}h \qquad I_1=\frac{8}{15}h^3 \tag{2.6}$$

В частном случае, когда $n=1$, подсчитаем максимальные значения прогиба с помощью формул (1.16), (2.2), (2.4), (2.5).

$$W\left(\frac{a}{2},0\right)=W_1=-\frac{4M_0a^2}{(3+\nu)D\pi^3}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}-\frac{8\pi^2}{1-\nu}\frac{h^2}{a^2}\right] \tag{2.7}$$

$$W\left(\frac{a}{2},0\right)=W_2=-\frac{4M_0a^2}{(3+\nu)D\pi^3}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[1-\frac{8\pi}{\sqrt{10}(3+\nu)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\frac{h}{a}\right)\frac{h}{a}\right]^{-1} \tag{2.8}$$

$$W\left(\frac{a}{2},0\right)=W_3=-\frac{4M_0a^2}{(3+\nu)D\pi^3}\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[1-\frac{4}{3+\nu}\frac{t_0}{t_0+\sqrt{1+t_0^2}}\right]^{-1} \tag{2.9}$$

$$W\left(\frac{a}{2},0\right)=W_4=-\frac{4M_0a^2}{D\pi^3}\frac{1+\nu}{(3+\nu)(1-\nu)} \tag{2.10}$$

Из полученных результатов очевидно, что отличие максимального прогиба, полученного из формулы (1.16), имеет порядок $\dfrac{h^2}{a^2}$, а остальные значения отличия максимального прогиба, вычисленные соответственно по формулам (2.2) и (2.4), имеют порядок $\dfrac{h}{a}$. То есть принятые формулы (1.4) в задачах изгиба пластин при отсутствии поперечной нагрузки приводят к более грубым результатам и применение этих формул нецелесообразно.

3. Принимается, что на кромке $y=0$ изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, а крутящий момент равен H_0. Здесь надо отметить, что эта задача по классической теории Кирхгофа не имеет смысла. В этом случае воспользуемся системой (2.1). Граничные условия записываются следующим образом:

$$x=0,a \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$$

$$y=0, \quad \Delta W-(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{2I_1}{I_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta W+\frac{3I_1^2(1-\nu)}{h^3 I_0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x}=0$$

$$D\frac{\partial}{\partial y}\Delta W+2GI_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}+\frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta W-\frac{3I_1}{2h^3}\left[\Phi-\frac{2I_1}{I_0}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]=-\frac{H_0(x)}{D(1-\nu)}$$

$$y\to\infty \quad W\to 0 \quad \Phi\to 0$$

Представим $H_0(x)$ в виде ряда

$$H_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\frac{n\pi}{a}x \tag{3.1}$$

где b_n - известные постоянные, которые выражаются следующим образом:

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a H_0(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx \tag{3.2}$$

Удовлетворением граничным условиям на торце $y=0$ получается система алгебраических уравнений. Решение указанной задачи имеет вид:

$$W(x,y)=\frac{1}{D(1-\nu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\mu_n^2}\frac{2+\omega_n+(1-\nu)\mu_n y}{3+\nu+\omega_n}e^{-\mu_n y}\sin\mu_n x \tag{3.3}$$

$$\Phi(x,y)=\frac{2(1+\nu)}{(3+\nu)EI_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left[1+\frac{\omega_n}{3+\nu}\right]^{-1}e^{-\mu_{0n}y}\cos\mu_n x \tag{3.4}$$

В частном случае возьмем $H_0(x)=H_0\cos\frac{\pi}{a}x$

Из (3.3) и (3.4) получим

$$W(x,y)=\frac{H_0 a^2}{(1-\nu)D\pi^2}\frac{2+\omega_1+(1-\nu)\mu_1 y}{3+\nu+\omega_1}e^{-\mu_1 y}\sin\mu_1 x \tag{3.5}$$

$$\Phi(x,y)=\frac{2(1+\nu)H_0}{(3+\nu)EI_1}\left[1+\frac{\omega_1}{3+\nu}\right]^{-1}e^{-\mu_{01}y}\cos\mu_1 x \qquad (3.6)$$

где ω_1 с учетом (2.6) будет

$$\omega_1=\frac{4\pi\sqrt{10}}{5}\frac{h}{a}\left[\frac{\pi\sqrt{10}}{5}\frac{h}{a}-\sqrt{1+\frac{2\pi^2h^2}{5a^2}}\right]$$

Выражение максимального прогиба из (3.5) будет равно

$$W\left(\frac{a}{2},0\right)=W_5=\frac{H_0a^2}{(1-\nu)D\pi^2}\frac{2+\omega_1}{3+\nu+\omega_1} \qquad (3.7)$$

Принимая отношение $\frac{h}{a}$ малой по сравнению с единицей $\left(\frac{h}{a}<<1\right)$ и подсчитывая отношения (3.7) и (2.8), получим

$$\left|\frac{W_5}{W_2}\right|=\frac{\pi}{2(1+\nu)}\frac{H_0}{M_0} \qquad (3.8)$$

Из формулы (3.8) видно, что при $\nu=1/3$ отношение $\frac{W_5}{W_2}$ приблизительно равно отношению $\frac{H_0}{M_0}$. Следовательно, если H_0 и M_0 имеют одинаковый порядок, их эффект на величину прогиба одинаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А.Теория анизотропных пластин.-М.: Госиздат, 1987.
2. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин. - МТТ, Изв. РБН, 1995, N 4, с. 140-149.
3. Хачатрян А.А. Некоторые задачи изгиба трансверсально-изотропных круглых пластинок. - Инж. ж. МТТ, Изв. АН СССР, 1966, т.3, с. 110-115.
4. Белубекян В.М. Канд. дисс. "Определение коэффициентов особенностей в некоторых задачах теории упругости секториальных тел". ЕГУ, 1991.
5. Хачатрян А.А. Об изгибе полубесконечной пластинки нагрузкой, распределенной по краю. - Изв. АН АрмССР, сер. - мат. н., 1965, т. 18, N 2, с. 39-47.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
31.05.1996