ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

ДОЖДЕВАЯ ЭРОЗИЯ ПОЧВЫ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ

Сагомонян А. Я.

Ա. Յա. Սաղոմոնյան
Հողի անձրևային էրոզիան բարձունքների լանջերին

Ուսումնասիրվում է հողի շարժումը բարձունքների լանջերին: Հողի վերին շերտի համար առաջարկվում է օգտագործել համասեռ, անսեղմելի հեղուկի մոդելը: Հողի շարժման արագության բաղադրիչները որոշվում են կվադրատուրաներով:

A. Ja. Sagomonian
Rain erosian of soil of hillsides

Исследуется движение почвы на склонах возвышенностей. Для верхнего слоя почвы предлагается использовать модель однородной несжимаемой жидкости. Компоненты скоростей движения почвы опрелделяются в квадратурах.

1. Как и в работе [1], предполагается, что жидкость капель дождя, достигнув поверхности склона, проникает (фильтрируется) в поры почвы. В результате, непосредственно под поверхностью склона образуется слой водонасыщенной почвы - суспензии, которая под действием силы тяжести и возникающих при движении диссипативных сил, стекает к подножию возвышенности. При этом часть жидкости, не проникающая в почву, образует на поверхности склона сплошной слой воды, также стекающий к подножию. Здесь весь этот процесс считается установившимся, а движение - плоскопараллельным. В пространстве дождя над склоном объемная концентрация ω жидкости капель постоянна и равномерно распределена. Граница между областью дождя и слоем жидкости над склоном является поверхностью разрыва параметров среды. Склон представляет собой пористую поверхность с концентрацией пор m, равной объемной концентрации (пористости) m. Величина m постоянна и равномерно распределена в почве. Поверхность склона является границей между слоями жидкости и суспензии. Вне слоя суспензии почва находится в покое. Различные виды почв после водонасы-

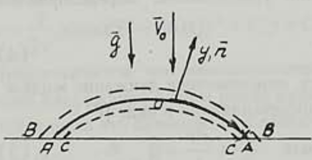
щения образуют стекающую в слое суспензию с различными физико-механическими свойствами. В зависимости от этих свойств исследование движения суспензии в слое можно проводить на основе модельных сред: вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, вязко-пластической несжимаемой среды и двухфазной среды - смеси жидкости с малыми твердыми частицами [2,3]. В настоящей работе суспензия моделируется однородной, несжимаемой ньютоновской жидкостью. Плотность суспензии определяется по формуле

$$\rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \tag{1}$$

где ρ - плотность воды, ρ_1 плотность вещества почвы. Динамическая вязкость суспензии μ (эффективный коэффициент вязкости) предполагается постоянной и заданной. Коэффициент μ больше коэффициента вязкости жидкости капель дождя η. При малой объемной концентрации c твердых сферических частиц в суспензии, А. Эйнштейном получена формула [3]

$$\mu = \eta\left(1 + \frac{5}{2}c\right), \quad c << 1 \tag{2}$$

При больших концентрациях, вязкость μ зависит от градиента скорости. Сведения о коэффициенте вязкости μ при больших концентрациях c содержатся в книге [4]. Схематично, картина движения в слоях, образованных в окрестности поверхности склона возвышенности, показана на фиг. 1. Горизонтальной линией на этой фигуре обозначена поверхность Земли. Векторы ускорения силы тяжести $\overline{g}$ и скорости капель дождя $\overline{V}_0$ параллельны и одинаково направлены к горизонтальной линии. Стрелками показаны направления движения в слоях. В плоскости движения ось x направлена вдоль поверхности склона вправо к подножию. Ось y - по внешней нормали к поверхности склона.



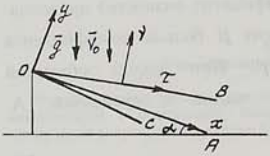
Фиг.1

Скорость фильтрации жидкости капель в почву $\overline{w}$ подчинено закону Дарси при ломинарном движении жидкости в порах [5]. Скорость $\overline{w}$ определяется как секундный расход жидкости на единицу площади поперечного сечения почвы. Эта скорость связана с действительной скоростью $\overline{w}_0$ жидкости в порах почвы равенством

$$w = mw_0 \tag{3}$$

Величины w_0 и w имеют порядок нескольких миллиметров в секунду, скорость v_0 капель дождя имеет порядок 7-9 метров в секунду. Предполагается , что отношения характерных толщин слоев к среднему радиусу кривизны поверхности склона малы. Так же малы отношения порядков величин скоростей вдоль осей x и y. При этих ограничениях будут выполнены условия, при которых можно пользоваться приближенными уравнениями Рейнольдса для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в слоях [6].

Ниже, при исследовании, поверхность склона считается плоскостью, наклонную к горизонтальной поверхности Земли под углом α (фиг. 2).



Фиг.2

В плоскости движения на фиг.2 линия ОА изображает плоскость склона, ОВ есть граница между областью дождя и слоем жидкости, линия ОС разделяет слой суспензии от остальной неподвижной части почвы возвышенности. Изменением поверхности склона в процессе эрозии пренебрегается. Начало неподвижной системы координат берется в вершине возвышенности, ось x направляется вдоль плоскости выбранного склона возвышенности, вниз к подножию, ось y - перпен-дикулярно к оси x (фиг. 2). Предполагается, что подлежащие опреде-лению кривые OB и OC сходятся в одной и той же точке - в начале координат (вершине возвышенности). Представим эти линии соответственно уравнениями, определяющими толщину слоев

$$y = H(x), \quad y > 0; \quad y = h(x), \quad y < 0 \tag{4}$$

Приближенные уравнения Рейнольдса, описывающие движение жидкости в слое над поверхностью склона, представляются в виде [6]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin\alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

где v, w - компоненты скорости жидкости вдоль x и y. На граничной поверхности разрыва между слоем и областью дождя уравнения сохранения массы и количества движения несжимаемой жидкости представляются равенствами

$$v_\tau = V_{0\tau}, \quad v_\nu = \omega V_{0\nu}, \quad \rho\omega V_{0\nu}(V_{0\nu} - v_\nu) = P_s - P_a \tag{6}$$

Здесь $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ - единичные векторы вдоль касательной и нормали к граничной линии, символы с индексами τ, ν суть проекции вектора на эти направления; P_s, P_a - давления за и перед поверхностью разрыва. Из уравнения количества движения в формуле (6) следует, что давле-ние за разрывом P_x мало отличается от давления. Например, при $\omega = 10^{-2}$, $V_0 = 10$ м/с для воды давление P_x отличается от P_a меньше одного процента. Из первых двух равенств (6) с помощью первого уравнения (4), в согласии с фиг.2, нетрудно получить соотношения

$$\frac{v_\tau}{V_0} = \frac{H' + \mathrm{tg}\alpha}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)^{1/2}}, \quad -\frac{v_v}{\omega V_0} = \frac{1+\mathrm{tg}\alpha H'}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)^{1/2}}$$

$$H' = \frac{dH}{dx} \tag{7}$$

Пусть v*, w* обозначают значения компонент скорости v, w в слое, непосредственно за граничной поверхностью разрыва. Эти значения определяются следующими выражениями

$$\frac{v^*}{V_0} = \frac{\mathrm{tg}\alpha(1+\omega H'^2) - (1-\omega)H'}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)}, \quad \frac{w^*}{V_0} = \frac{(1-\omega)\mathrm{tg}\alpha H' - (\omega + H'^2)}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)} \tag{8}$$

$$y = H(x)$$

Теперь проинтегрируем второе уравнение в формуле (5) и полученное подставим в левую часть первого уравнения этой формулы. В результате придем к уравнениям

$$P - P_a = -\rho g \cos\alpha (y - H(x))$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{g}{\nu}(\cos\alpha H'(x) - \sin\alpha), \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{9}$$

Последнее уравнение дважды проинтегрируем по:

$$v = \frac{g}{2\nu}(\cos\alpha H' - \sin\alpha)y^2 + C_1 y + C_2 \tag{10}$$

Предполагается, что непосредственно за граничной поверхностью разрыва напряжение сдвига равно нулю. В рамках принятых приближений Рейнольдса это приводит к условию

$$y = H(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Значение скорости v за этой граничной поверхностью определено первым равенством формулы (3). Оба эти условия достаточны для нахождения величин C_1 и C_2 в формуле (10). В результате получим

$$v = \frac{g}{2\nu}(\cos\alpha H(x) - \sin\alpha)(y - H)^2 + v^*$$

$$\frac{v^*}{V_0} = \frac{\mathrm{tga}(1+\omega H'^2) - (1-\omega)H'}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)} \tag{12}$$

Выше было показано, что $P_x \approx P_a$. На поверхности склона ($y=0$) скорость $v = V$, где

$$V = \frac{gH^2}{v}(\cos\alpha H'(x) - \sin\alpha) + v^* \qquad (13)$$

2. Слой суспензии под поверхностью склона моделируется несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ_0 и постоянным коэффициентом динамической вязкости μ. Концентрация жидкости капель дождя в порах суспензии в процессе движения остается постоянной. Компоненты скорости суспензии вдоль осей x, y обозначим через u и w_1. Движение в слое подчиним приближенным уравнениям Рейнольдса, приведенным в формуле (5). Выкладки аналогичные, сделанным выше, приводят к следующей формуле для давления в суспензии

$$P - P_a = P_0 g\cos\alpha(\varepsilon H(x) - y), \quad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad y \le 0 \qquad (14)$$

Для скорости частиц суспензии вдоль оси x, эти выкладки приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{g}{v_0}(\varepsilon\cos\alpha H(x) - \sin\alpha), \quad v_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \qquad (15)$$

Отсюда интегрированием по y получим

$$u = \frac{g}{2v_0}(\varepsilon\cos\alpha H(x) - \sin\alpha) + C_1 y + C_2 \qquad (16)$$

Обозначим значение скорости u на поверхности склона ($y=0$) через U. На поверхности склона должны выполняться условия

$$y = 0, \quad V = U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (17)$$

Граничные условия (17) и (13) определяют величины C_1, C_2 в формуле (16). В результате получим

$$u = \frac{g}{2v_0}(\varepsilon\cos\alpha H' - \sin\alpha)y^2 - \frac{\eta}{\mu}\frac{g}{v}(\cos\alpha H' - \sin\alpha)Hy + U,$$

$$U = V \qquad (18)$$

На другой границе слоя суспензии отсутствует движение частиц вдоль оси x:

$$y = -h(x), \quad u = 0 \qquad (19)$$

Используя это условие из (18), получим уравнение, определяющее толщину слоя суспензии

$$\frac{g}{2v_0}(\varepsilon\cos\alpha H' - \sin\alpha)h^2 + \frac{\eta g}{\mu v}(\cos\alpha H' - \sin\alpha)Hh + V = 0 \qquad (20)$$

или в другой записи

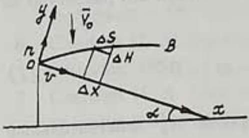
$$(\varepsilon H' - \mathrm{tg}\alpha)h^2 + 2\frac{\eta}{\mu}\frac{v_0}{v}(H' - \mathrm{tg}\alpha)Hh + 2V\frac{v_0}{g}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 0 \qquad (21)$$

где скорость V берется по формуле (13). Секундный расход суспензии в слое, стекающей к подножию возвышенности, определяется интегралом

$$Q = \rho_0\int_{-h}^{0} u dy = \frac{\rho_0 g}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\left[(\varepsilon H' - \mathrm{tg}\alpha)\frac{h^3}{6v_0} - \frac{\eta}{\mu}(H' - \mathrm{tg}\alpha)\frac{Hh^2}{2v}\right] + \qquad (22)$$

$$+\rho_0 Vh$$

Для производства расчетов по полученным выше формулам необходимо определить толщину слоя жидкости $H(x)$ над поверхностью склона.



Фиг.3

Воспользуемся интегральным выражением закона сохранения массы установившегося движения в этом слое. Выделим элемент объема $ABCD$ между границами слоя, как показано на фиг.3. Условие о том, что изменение массы несжимаемой жидкости в этом объеме за время Δt равно нулю, записывается так

$$\int_0^H \mathrm{v}dy - \int_0^{H+\Delta H}\mathrm{v}dy + \omega V_0(\alpha - \beta)\Delta s - mw_0^l\Delta x = \frac{\partial}{\partial t}\left[H\Delta x + \frac{\Delta H\Delta x}{2}\right]\Delta t = 0$$

или, после сокращений

$$-\int_H^{H+\Delta H}\mathrm{v}dy + \omega V_0\cos(\alpha - \beta)\Delta s - mw_0^1\Delta x = 0$$

После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta H \to 0$, так как

$$dx = ds\cos\beta,\quad dH = H'(x)dx,\quad tg\beta = H'(x) = \frac{dH}{dx},$$

из последнего выражения получим

$$-\mathrm{v}^* H' + \omega V_0\frac{1+\mathrm{tga}H'}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} - mw_0^l = 0 \qquad (23)$$

Скорость v^* определена по формуле (8). Символом w_0^l обозначена средняя действительная скорость проникания жидкости в поры почвы на поверхности склона $(y=0)$. Заменив значение v^* по формуле (8), из (23) получим

$$\left(1-\frac{m}{V_0}w_0'\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right)H'^2-(1-\omega)\mathrm{tga}H'-$$
$$-\left(\frac{m}{V_0}w_0'\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}-\omega\right)=0 \qquad (24)$$

Дифференциальное уравнение (24) решается при заданном значении скорости w_0' и граничном условии

$$x=0,\quad H=0 \qquad (25)$$

В ряде работ, например [7,8] принято, что скорость w_0' пропорциональна давлению на поверхности склона. В рассматриваемой работе такая зависимость записывается в виде

$$w_0'=\gamma\rho g\cos\alpha H(x)=\gamma\rho g\frac{H(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \qquad (26)$$

где γ - коэффициент пропорциональности. Используя это равенство из (24), получим

$$\left(1-\frac{m\gamma\rho g}{V_0}H\right)H'^2-(1-\omega)\mathrm{tg}\alpha H'-\left(\frac{m\gamma\rho g}{V_0}H-\omega\right)=0 \qquad (27)$$

Заметим, что при постоянном значении скорости w_0' действительные решения уравнения (24), удовлетворяющие условия (25) будут прямыми линиями, исходящими из начала координат. Если допустить, что граничная линия $y=H(x)$ мало отличается от прямой так, что в уравнении (24) H'^2 малая величина и в этом уравнении можно пренебречь первым членом, то придем к выражению

$$(1-\omega)\mathrm{tg}\alpha H'+\frac{m}{V_0}w_0'\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}-\omega=0$$

Подставив в этом уравнении значение w_0' по формуле (26) и интегрируя его при условии (25), придем к решению

$$B-H(x)=B\overline{e}^{\beta x},\quad B=\frac{\omega V_0}{m\gamma\rho g},\quad \beta=\frac{m\gamma\rho g}{(1-\omega)tg\alpha V_0} \qquad (28)$$

Из решения (28) следует, что толщина слоя жидкости асимптотически при $x\to\infty$ приближается к величине B: $0\le H\le B$. Решения квадратного относительно производной $H'(x)$, уравнения (27) определяются квадратурой. Действительные решения удовлетворяют условию (25). При этом производная $H'(x)$ должна быть положительной: $H'>0$.