

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ РЕАЛЬНОГО  
ГАЗА В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Бабаджанян Г.А., Данциелян Л.Е.

Գ.Հ.Բաբաջանյան, Լ.Ե.Դանցիլյան

Իրական գազի ոչ ստացիոնար շարժումը ծակոտկեն պատերով խողովակներում

Գաղվածում քննարկվում է հարթ և զլանային ծակոտկեն (բախանցիկ) պատերով իրական (մածուցիկ) գազի ոչ ստացիոնար շարժումը: Երբ խախտվում է շարժման ստացիոնար եռօրինակ գազամուղի վերջնամասում հոսքի դադարեցման պատճառով:

Դրված խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանների տրուումով: Կատարելով հատուկ ձևով գծայնացում (ըստ Լ. Ս. Լեյբենզոնի) և օգտվելով ինտեգրալ մեթոդի հնարավորությունից, ստացվում են փակ ֆունկցիոնալ լուծումներ և որոշվում են գազի շարժման արագության, ճնշման, խտության երկայնական և ընդլայնական ելքի փոփոխման օրինաչափությունները, որպես ժամանակի և կետի կոորդինատների ֆունկցիա:

Գաղված է բվային օրինակ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ:

G. H. Babadjanian, L. E. Danichian

About nonstationary motion of real gas in pipes with penetrable walls

Рассматривается нестационарное движение реального газа в плоской и цилиндрической трубах с проницаемыми стенками. Задача сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые решаются методом интегральных преобразований. Определяются законы изменения давления, скорости, плотности а также продольные и поперечные расходы газа как функции от времени и координаты точки. Вычислен конкретный числовой пример и построены графики соответствующих газодинамических параметров.

1. Рассматривается одномерное, нестационарное изотермическое движение реального (вязкого) газа в трубах с проницаемыми стенками. Такие исследования, помимо теоретического значения, имеют и многие практические применения. Так, например, магистральные, промышленные и распределительные городские газопроводы, водопроводы и паропроводы часто работают при нестационарных режимах и имеют в ряде точек по длине трубопровода отбор или подкачку жидкости (газа). При исследовании таких задач дискретное распределение точек отбора (подкачки) можно во многих случаях заменить их непрерывным

распределением [1]. Поэтому исследование таких задач можно свести к изучению движения жидкости в трубах с проницаемыми стенками. В общем случае перепад давления, будучи переменным по длине и во времени, определяется потерями на трение, инерционным сопротивлением и разностью отметок трубопровода. Однако, для горизонтального, достаточно длинного газопровода с постоянным сечением, при движении газа с малой скоростью в уравнениях движения влиянием инерционного сопротивления, уклона трубопровода на изменение давления можно пренебречь [2].

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\xi \rho u^2}{D_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + D_2 p(p - p_b) = 0 \quad (1.1)$$

$$p - p_b = \rho zRT$$

В системе (1.1) первое уравнение - это уравнение движения; второе - уравнение неразрывности с учетом отбора (отсоса) или подкачки (вдува); третье - уравнение состояния газа. В этой системе  $p$ ,  $\rho$  и  $u$  - средние по сечению трубы давление, плотность и скорость газа,  $\xi$  - коэффициент сопротивления,  $p_b$  - внешнее давление,  $R$  - газовая постоянная,  $T$  - абсолютная температура,  $z$  - коэффициент сжимаемости газа,  $D_1$  и  $D_2$  - постоянные, зависящие от геометрических характеристик трубы и от степени проницаемости стенок. В формулах (1.1) при  $p - p_b > 0$  имеет место отсос жидкости, а при  $p - p_b < 0$  - вдувание.

Для плоской трубы  $D_1 = 4h$ ,  $D_2 = \frac{k}{2h}$ , а для цилиндрической

$D_1 = 4a$ ,  $D_2 = \frac{2k}{a}$ , где  $k$  - коэффициент проницаемости;  $2h$  - ширина плоского канала;  $a$  - радиус трубы.

Известно, что при ламинарном режиме движения для плоской трубы  $\xi = \frac{12\nu}{hu}$ , а для цилиндрической  $\xi = \frac{32\nu}{au}$ , где  $\nu$  - кинематический коэффициент вязкости.

Исключая из системы (1.1) переменные  $u(x,t)$ ,  $\rho(x,t)$  и вводя обозначение  $(p(x,t) - p_b)^2 = P(x,t)$ , получим

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{kP}{h} \quad (1.2)$$

- для плоской трубы и

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{b_1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{4kP}{a} \quad (1.3)$$

для цилиндрической трубы.

$$\text{Здесь } b = \frac{3\mu}{h^2}, \quad b_1 = \frac{8\mu}{a^2}$$

где  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости.

Поставленная нестационарная задача решается при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad P &= P_H = (p_H - p_b)^2 \\ \text{при } x=L \quad \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \text{при } t=0 \quad P &= P_0(x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $P_H$  - давление в начальном сечении трубы;  $L$  - длина трубопровода;  $P_0(x)$  - закон изменения квадрата давления при стационарном режиме работы.

Второе граничное условие системы (1.4) показывает, что в конце трубы расход газа прекращается мгновенно, вследствие чего и возникает нестационарный режим движения.

Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3) с краевыми условиями (1.4).

2. Точное функциональное решение дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3) невозможно. Их решают численными или приближенными методами. Воспользуемся приближенным методом решения [3]. Для нахождения первого приближения примем переменный коэффициент при  $\frac{\partial P}{\partial t}$  постоянным и равным среднему значению давления в трубе при стационарном режиме работы, т. е.  $\sqrt{P} = p_{0cp} = \text{const}$ . Тогда уравнения (1.2) и (1.3) примут следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - A_2 P \quad (2.1)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{p_{0cp}}{b} = \frac{p_0 h^2}{3\mu}, \quad A_2 = \frac{kp_{0cp}}{h} \quad \text{для плоской трубы и}$$

$$A_1 = \frac{p_0}{b_1} = \frac{p_0 a^2}{8\mu}, \quad A_2 = \frac{4kp_{0cp}}{a} \quad \text{для цилиндрической трубы. Решение уравнения (2.1) ищем в виде}$$

$$P(x,t) = P_0(x) + P_1(x,t) \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) получим два дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 P_0}{dx^2} - \frac{A_2}{A_1} P_0 = 0 \quad (2.3)$$

и

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - A_2 P_1 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) описывает стационарное движение газа со следующими граничными условиями:

$$\text{при } x=0 \quad P_0 = P_H = (p_H - p_v)^2 = \text{const}$$

$$\text{при } x=0 \quad \frac{dP_0}{dx} = -2b(p_H - p_v)u_H = \text{const} \quad (2.5)$$

Решением уравнения (2.3) при граничных условиях (2.5) будет

$$P_0(x) = P_H \operatorname{ch} \sqrt{\frac{kb}{h}} x - 2bu_H \sqrt{P_H} \sqrt{\frac{h}{kb}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{kb}{h}} x \quad (2.6)$$

- для плоской трубы и

$$P_0(x) = P_H \operatorname{ch} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} x - b_1 u_H \sqrt{P_H} \sqrt{\frac{a}{kb_1}} \operatorname{sh} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} x \quad (2.7)$$

- для цилиндрической трубы.

Перейдем к решению уравнения (2.4).

Исходя из постановки задачи, при решении уравнения (2.4) нужно задавать следующие краевые условия:

$$\text{при } x=0 \quad P_1 = 0$$

$$\text{при } x=L \quad \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial P_0}{\partial x} \right|_{x=L} = 2bu_H(p_H - p_v) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{kb}{h}} L -$$

$$- P_H \sqrt{\frac{kb}{h}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{kb}{h}} L = B_1$$

$$\text{при } t=0 \quad P_1 = 0 \quad (2.8)$$

- для плоской трубы и

$$\text{при } x=0 \quad P_1 = 0$$

$$\text{при } x=L$$

$$\left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial P_0}{\partial x} \right|_{x=L} = 2b_1 u_H (p_H - p_v) \operatorname{ch} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} L -$$

$$-2P_{II} \sqrt{\frac{kb_1}{a}} \operatorname{sh} 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}} L = B_2$$

при  $t=0$   $P_1 = 0$  (2.9)

- для цилиндрической трубы.

Применяя к уравнению (2.4) и краевым условиям (2.8) преобразования Лапласа, получим

$$\frac{d^2 \bar{P}_1}{dx^2} - \frac{A_2 + s}{A_1} \bar{P}_1 = 0$$
 (2.10)

при  $x=0$   $\bar{P}_1 = 0$

при  $x=L$   $\frac{d\bar{P}_1}{dx} = \frac{B_1}{s}$  (2.11)

где  $\bar{P}_1 = \int_0^{\infty} e^{-st} P_1 dt$ ,  $s$  - параметр преобразования.

Решением уравнения (2.10) будет

$$\bar{P}_1 = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}$$
 (2.12)

здесь  $\beta = \sqrt{\frac{s + A_2}{A_1}}$

С помощью граничных условий (2.11), определяя постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , решение дифференциального уравнения (2.10) примет вид:

$$\bar{P}_1 = \frac{B_1 \operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{sch} \beta L}$$
 (2.13)

Применяя обратное преобразование Лапласа и проведя все математические вычисления, для оригинала функции  $P_1(x, t)$  получим следующие выражения:

$$P_1(x, t) = B_1 \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} x}{\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} L} + 2 \frac{A_1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n x}{L} e^{s_n t}}{s_n \sin \mu_n} \right]$$
 (2.14)

- для плоской трубы и

$$P_1(x,t) = B_2 \left[ \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} x}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} L} + 2 \frac{A_1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_n x}{L} e^{\mu_n t}}{s_n \sin \mu_n} \right] \quad (2.15)$$

для цилиндрической трубы

В формулах (2.14) и (2.15)

$$s_n = -A_2 - \frac{\mu_n^2 A_1}{L^2}, \quad \mu_n = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (2.16)$$

Подставляя  $P_0(x)$ ,  $P_1(x,t)$  из формул (2.6), (2.7), (2.14) и (2.15) в равенство (2.2) и переходя к старым переменным, для давления газа окончательно получим

$$\begin{aligned} p(x,t) = p_b + \{ (p_H - p_b)^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} x - \frac{6\mu}{h^2} (p_H - p_b) u_H \sqrt{\frac{h^3}{3\mu k}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} x + \\ + \left[ \frac{6\mu}{h^2} (p_H - p_b) u_H \operatorname{ch} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} L - (p_H - p_b)^2 \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} L \right] \times \\ \times \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} x}{\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} L}} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{\pi}{L} \exp \left( -p_{0,c} \left[ \frac{k}{h^2} + \frac{h^2 (2n-1)^2}{3\mu L^2} \pi^2 \right] t \right)}{\left( \frac{3\mu k}{h^3} + \frac{\mu_n^2}{L^2} \right) L} \right] \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

для плоской трубы и

$$\begin{aligned} p(x,t) = p_b + \{ (p_H - p_b)^2 \operatorname{ch} 2 \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} x - \frac{8\mu}{a^2} u_H (p_H - p_b) \sqrt{\frac{a^3}{8\mu k}} \operatorname{sh} 2 \times \\ \times \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} x + \left[ \frac{8\mu}{a^2} u_H (p_H - p_b) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} L - 2 (p_H - p_b)^2 \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}} L \right] \times \\ \times \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}} x}{\sqrt{\frac{32\mu k}{a^3} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}} L}} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{\pi}{L} \exp \left( -p_{0,c} \left[ \frac{k}{a^2} + \frac{h^2 (2n-1)^2}{3\mu L^2} \pi^2 \right] t \right)}{\left( \frac{3\mu k}{a^3} + \frac{\mu_n^2}{L^2} \right) L} \right] \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \exp \left( -p_{0cp} \left[ \frac{4k}{a} + \frac{a^2 (2n-1)^2 \pi^2}{8\mu L^2} \right] t \right)}{\left( \frac{32\mu k}{a^3} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} \right) L} \right\}^{1/2}$$

- для цилиндрической трубы.

Скорость, плотность, продольный и поперечный расходы газа определяются по формулам

$$u(x, t) = -\frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\rho(x, t) = \frac{p - p_b}{zRT} \quad (2.20)$$

$$G_{\text{прод.}}(x, t) = 2hu(x, t)\rho(x, t) \quad (2.21)$$

$$G_{\text{попер.}}(x, t) = k(p - p_b)\rho(x, t) \quad (2.22)$$

- для плоской трубы и

$$u(x, t) = -\frac{1}{b_1} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.23)$$

$$\rho(x, t) = \frac{p - p_b}{zRT} \quad (2.24)$$

$$G_{\text{прод.}}(x, t) = \pi a^2 \rho(x, t) u(x, t) \quad (2.25)$$

$$G_{\text{попер.}}(x, t) = 2\pi a k (p - p_b) \rho(x, t) \quad (2.26)$$

- для цилиндрической трубы.

В формулах (2.21), (2.22), (2.25), (2.26) расходы вычислены в единице времени.

Для нахождения решения задачи во втором приближении переменный коэффициент  $\sqrt{P}$  в уравнениях (1.2) и (1.3) примем в следующем виде:

$$\sqrt{P} = p_H + (p_{0cp} - p_H) e^{-\frac{\lambda t}{2}} = p_{0cp} \left[ \frac{p_H}{p_{0cp}} + \left( 1 - \frac{p_H}{p_{0cp}} \right) e^{-\frac{\lambda t}{2}} \right] =$$

$$= p_{0cp} f(t) \quad (2.27)$$

где  $\lambda$  - постоянная, зависящая от среднего давления, геометрических характеристик трубы и степени проницаемости стенок.



$\lambda = \frac{p_0 k}{h}$  - для плоской трубы и  $\lambda = \frac{4p_0 k}{a}$  - для цилиндрической трубы [3].

Выбор переменного коэффициента  $\sqrt{P}$  в виде (2.27) обосновывается тем, что при  $t \rightarrow \infty$  давление в трубе стремится к давлению в начальном сечении ( $p(x, \infty) \rightarrow p_H$ ), а при  $t \rightarrow 0$  - к среднему давлению стационарного режима движения газа ( $p(x, 0) \rightarrow p_{0cp}$ )

Подставляя (2.27) в уравнение (1.2) и (1.3), получим

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{p_{0cp}}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{kp_{0cp}}{h} P \quad (2.28)$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{p_{0cp}}{b_1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{4kp_{0cp}}{a} P \quad (2.29)$$

где

$$\tau = \int_0^t f(t) dt = \frac{p_H}{p_{0cp}} t + \frac{2}{\lambda} \left( 1 - \frac{p_H}{p_{0cp}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\lambda t}{2}} \right) \quad (2.30)$$

Как видно, уравнение (2.28) и (2.29) отличаются от соответствующих уравнений (1.2) и (1.3) тем, что в них переменная  $t$  заменяется на  $\tau$  с помощью выражения (2.30). Поэтому для нахождения решения задачи во втором приближении достаточно в формулах (2.17)-(2.26) переменную  $t$  заменить на  $\tau$ , определяемую формулой (2.30).

Можно построить решение задачи и в третьем приближении, принимая переменный коэффициент  $\sqrt{P}$  в уравнениях (1.2) и (1.3) в следующем виде:

$$\sqrt{P} = p_{0cp} f(t) \varphi(x) \quad (2.31)$$

где  $f(t)$  определяется по формуле (2.27), а  $\varphi(x)$  - известная функция, обусловленная законом распределения давления при стационарном режиме работы. Однако, нахождение решения в третьем приближении в данной работе не приводится, так как оно связано с большими математическими трудностями и вычислениями.

Отметим, что если в формулах (2.17) - (2.30) принять  $k = 0$ , то получим выражения, описывающие закономерности нестационарного движения газа в трубах со сплошными стенками.

3. Приведем численный пример для движения газа в цилиндрической трубе.



Для решения конкретного числового примера зададим следующие данные:

$$p_H = 5 \text{ атм}, \quad u_H = 10 \text{ м/сек.}, \quad L = 10^3 \text{ м.}, \quad a = 0,4 \text{ м}$$

$$k = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг сек.}, \quad \mu = 10^{-5} \text{ кг сек/м}^2$$

Предварительно вычислив  $P_{0cp}$  по формуле

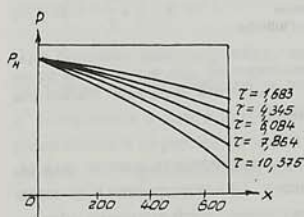
$$P_{0cp} = \frac{1}{L} \int_0^L P_0(x) dx$$

получаем  $P_{0cp} = 2,76$ .

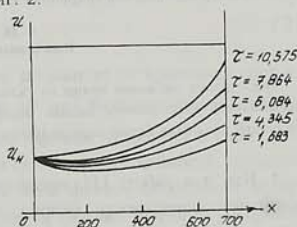
Численный пример вычисляется, ограничиваясь вторым приближением.

Изменения давления и скорости вычисляются соответственно по формулам (2.18) и (2.23).

Распределения давления вдоль трубопровода в различные моменты времени приведены на фиг. 1, а графики изменения скорости по времени и вдоль трубопровода приведены на фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабровский С.А., Щербаков С.Г., Гусейн-Заде М.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором. М.: Изд. Наука, 1972. 48 с.
2. Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е. Неуставившееся движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, N 6, с. 3-13.
3. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 11. - М.: Изд. АН СССР, 1953. 273 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию  
23.02.1995