ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЗАМКНУТОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б.

Գ. Ռ. Ղուլղազարյան, Կ. Բ. Ղազարյան
Ռելեի տիպի ալիքները կիսաանվերջ, փակ, ոչ շրջանային գլանային թաղանթում

Դիտարկվում է հարթ, ռելեի տիպի ալիքի, տարածման հարցը, որը մարում է կիսաանվերջ գլանային թաղանթի ազատ ծայրից ծնիչների ուղղությամբ:
Հետազոտումը կատարվում է իզոտրոպ, ճկուն կիսաանվերջ թաղանթի համար, երբ ծռման կոշտությունը ընդունվում է հավասար զրո (անմոմենտ թաղանթ):

G.R.Gulgazaryan, C.B.Kazaryan

The waves of reyleigh kind in the semi-infinite closed noncircular cylindrical shell

В работе исследуется вопрос распространения плоских (не изгибных) волн Рэлея затухающих от свободного торца полубесконечной оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для изотропной упругой полубесконечной оболочки, когда жесткость на изгиб принимается равной нулю (безмоментная оболочка).

В работе исследуется вопрос распространения плоских (не изгибных) волн типа Рэлея, затухающих от свободного торца полубесконечной оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для изотропной упругой полубесконечной оболочки, когда жесткость на изгиб принимается равной нулю (безмоментная оболочка).

Предполагается, что квадрат радиуса кривизны направляющей кривой имеет вид

$$R^2(\beta) = R^2\left(1+\varepsilon\cos\frac{2\pi}{s}\beta\right) \quad (1)$$

$0<\varepsilon<1, \quad 0\le\beta\le s$

Здесь $R=\text{const}$, β - длина переменной дуги направляющей кривой срединой поверхности, s - полная длина.

Приведен численный анализ, показывающий зависимость фазовой скорости от ε и от волнового числа m.

Вопросы распространения плоской волны типа Рэлея, затухающей от свободного торца полубесконечной круговой цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующей, изучены в [1].

В качестве исходных уравнений безмоментной теории цилиндрических оболочек возьмем следующие уравнения [2]:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\sigma\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\lambda u_1 \qquad (2)$$

$$-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial w}{\partial\beta}=\lambda u_2$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\sigma\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+w=\lambda R^2(\beta)w$$

Здесь $R(\beta)$ - радиус кривизны направляющей, u_1, u_2, $u_3 = R(\beta)w$ - проекции смещения точки срединной поверхности, α и β - ортогональные координаты точки срединной поверхности,

$$\lambda=(1-\sigma^2)\omega^2\rho/E \qquad (3)$$

где ρ - удельная плотность материала оболочки, E - модуль Юнга, σ - коэффициент Пуассона, ω - угловая частота.

Для дальнейшей цели удобно систему (2) заменить системой уравнения [3]

$$(\Delta\Delta+\lambda(3-\sigma)/(1-\sigma)\Delta+2\lambda^2/(1-\sigma))u_1=$$
$$=\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+\sigma\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}+2\lambda\sigma/(1-\sigma)\frac{\partial w}{\partial\alpha}$$

$$(\Delta\Delta+\lambda(3-\sigma)/(1-\sigma)\Delta+2\lambda^2/(1-\sigma))u_2= \qquad (4)$$
$$=(2+\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\partial\alpha^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+2\lambda/(1-\sigma)\frac{\partial w}{\partial\beta}$$

$$\lambda(\Delta\Delta+\lambda(3-\sigma)/(1-\sigma)\Delta+2\lambda^2/(1-\sigma))R^2(\beta)w-$$
$$-((1-\sigma^2)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+\lambda\Delta+2(1+\sigma)\lambda\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\lambda^2/(1-\sigma))w=0$$

Здесь Δ - оператор Лапласа.

Граничные условия принимают вид :

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_1}{\partial\beta}\right|_{\alpha=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-w\right)\right|_{\alpha=0}=0 \qquad (5)$$

$$u_i(\alpha,0)=u_i(\alpha,s),\quad w(\alpha,0)=w(\alpha,s),\quad i=1,2$$

Периодическое решение системы (4) ищем в виде

$$u_1(\beta) = \exp \chi\alpha \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos p_m \beta,$$

$$u_2(\beta) = \exp \chi\alpha \sum_{m=0}^{\infty} v_m \sin p_m \beta \qquad (6)$$

$$w(\beta) = \exp \chi\alpha \left(w_0 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \cos p_m \beta \right)$$

где $p_m = 2m\pi / s$. Подставим (6) в (4).

Из первых двух уравнений (4) получим

$$u_m = \frac{\chi(\sigma\chi^2 + p_m^2 + 2\lambda\sigma / (1-\sigma))w_m}{(\chi^2 - p_m^2)^2 + \lambda(\chi^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)}$$

$$v_m = \frac{-p_m((2+\sigma)\chi^2 - p_m^2 + 2\lambda / (1-\sigma))w_m}{(\chi^2 - p_m^2)^2 + \lambda(\chi^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} \qquad (7)$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$.

При $m = 0$ в (7) w_0 заменяется на $w_0 / 2$. Из третьего уравнения (4), учитывая, что

$$R^2(\beta)w(\beta) = R^2\Big[w_0 / 2 + \varepsilon w_1 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2} w_{m-1} + w_m + \frac{\varepsilon}{2} w_{m+1}\right)\cos p_m \beta\Big]\exp \chi\alpha$$

получим бесконечную систему уравнений

$$a_0 w_0 + \varepsilon b_0 w_1 = 0,$$

$$\frac{\varepsilon}{2} b_m w_{m-1} + a_m w_m + \frac{\varepsilon}{2} b_m w_{m+1} = 0 \qquad (8)$$

$m = 1, 2, \ldots$,

где

$$a_m = (\lambda - (1-\sigma^2)/R^2)\chi^4 - \lambda((3+2\sigma)/R^2 + 2p_m^2 - \lambda(3-\sigma)/(1-\sigma))\chi^2 + \lambda(2\lambda/(1-\sigma) - p_m^2)(\lambda - p_m^2 - 1/R^2),$$

$$b_m = \lambda(\chi^2 - p_m^2 + \lambda)(\chi^2 - p_m^2 + 2\lambda/(1-\sigma)).$$

Чтобы система (8) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее бесконечный определитель (он называется определителем Хилла) равнялся нулю.

$$D(\chi, \varepsilon) = 0 \qquad (10)$$

Уравнение (10) устанавливает функциональную зависимость: $\chi = \chi(R, \lambda, \sigma, m, \varepsilon)$. В явной форме эту зависимость можно установить следующим образом. Возьмем определитель (10) при конечном n

и приравниваем нулю:

$$D_{n+1}(\chi,\varepsilon)=0 \tag{11}$$

Найдем χ_n решение алгебраического уравнения (11). Точное решение получится из χ_n при $n\to\infty$. Заметим, что определитель $D_{n+1}(\chi,\varepsilon)$ вычисляется следующей рекуррентной формулой:

$$D_1=a_0,\quad D_2=a_1a_0-\varepsilon^2/2b_1b_2, \tag{12}$$

$$D_{n+1}=a_nD_n-\varepsilon^2/4b_nb_{n-1}D_{n-1},\quad n\ge 2$$

Пусть

$$(1-\sigma^2)/R^2<\lambda<0.5(1-\sigma)p_m^2 \tag{13}$$

Тогда легко проверить, что при условии (13) уравнение $a_m=0$ имеет два отрицательных $\chi_i^{(m)}(i=1,2)$ корня.

Имеет место следующее утверждение.

При достаточно малом ε и при фиксированном m уравнение (10) имеет два формальных отрицательных решения вида

$$\chi_i=-((\chi_i^{(m)})^2+\alpha_i^{(m)}\varepsilon^2+\cdots)^{1/2},\quad i=1,2 \tag{14}$$

Действительно, отрицательные корни уравнения (11) при $n=m+1$ в зоне (13) ищем в виде

$$\chi_{mi}=-((\chi_i^{(m)})^2+\alpha_i^{(m)}\varepsilon^2+\cdots)^{1/2},\quad i=1,2 \tag{15}$$

Так как

$$D_{m+2}(\chi,\varepsilon)=a_{m+1}a_mD_m-0{,}25\varepsilon^2a_{m+1}b_mb_{m-1}D_{m-1}- \tag{16}$$

$$-0{,}25\varepsilon^4b_{m-1}b_mD_m$$

то, подставляя (15) в уравнение $D_{m+2}(\chi,\varepsilon)=0$ и приравнивая коэффициенты при ε^2 нулю, получим

$$a_{m+1}(\chi_i^{(m)})a_m'(\chi_i^{(m)})D_m(\chi_i^{(m)},0)\alpha_i^{(m)}-0{,}25b_m(\chi_i^{(m)})\times \tag{17}$$

$$\times(a_{m+1}(\chi_i^{(m)})b_{m-1}(\chi_i^{(m)})D_{m-1}(\chi_i^{(m)},0)-b_{m+1}(\chi_i^{(m)})D_m(\chi_i^{(m)},0))=0$$

Учитывая, что $D_n(\chi_i^{(m)},0)=a_{n-1}(\chi_i^{(m)})D_{n-1}(\chi_i^{(m)},0)$, $n\ge 2$, получим

$$\alpha_i^{(m)}=\frac{b_m(\chi_i^{(m)})\left[a_{m+1}(\chi_i^{(m)})b_{m-1}(\chi_i^{(m)})+b_{m+1}(\chi_i^{(m)})a_{m-1}(\chi_i^{(m)})\right]}{4a_{m+1}(\chi_i^{(m)})a_{m-1}(\chi_i^{(m)})a_m'(\chi_i^{(m)})} \tag{18}$$

$i=1,2$

Докажем, что если использовать определители более высокого порядка, чем $m+2$ и искать нули этого определителя в виде (15), то коффициенты при ε^2 не изменяются.

Действительно, так как $D_{m+2}(\chi_{mi},\varepsilon)=O(\varepsilon^4)$, $D_{m+1}(\chi_{mi},\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$ и то

$$D_{m+3}(\chi_{mi},\varepsilon)=a_{m+2}D_{m+2}(\chi_{mi},\varepsilon)-0{,}25\varepsilon^2b_{m+2}b_{m+1}D_{m+1}(\chi_{mi},\varepsilon),$$

$D_{m+3}(\chi_m, \varepsilon) = O(\varepsilon^4)$. Методом математической индукции можно доказать, что $D_n(\chi_m, \varepsilon) = O(\varepsilon^4)$ при $n \geq m+2$. Таким образом, при $n \to \infty$ $\alpha_i^{(m)} (i = 1, 2)$ не изменяются, т. е. справедливо представление (14).

Пусть $(w_0^{(i)}, w_1^{(i)}, \ldots, w_m^{(i)}, \ldots)$ $i = 1, 2$ являются нетривиальными решениями системы (8) при $\chi = \chi_1$ и $\chi = \chi_2$ соответственно.

Решение задачи (2), (5) ищем в виде

$$u_1 = \sum_{i=1}^{2} \exp \chi_i \alpha \sum_{m=0} u_m^{(i)} \cos p_m \beta, \quad u_2 = \sum_{i=1}^{2} \exp \chi_i \alpha \sum_{m=0} v_m^{(i)} \sin p_m \beta \quad (19)$$

$$w = \sum_{i=1}^{2} \exp \chi_i \alpha \left(0.5 w_0^{(i)} + \sum_{m=1} w_m^{(i)} \cos p_m \beta \right)$$

Подставляя (19) в (5), придем к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{2} \chi_i u_0^{(i)} - 0.5 \sigma w_0^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{2} \chi_i v_m^{(i)} - p_m u_m^{(i)} = 0 \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{2} \chi_i u_m^{(i)} + \sigma p_m v_m^{(i)} - \sigma w_m^{(i)} = 0$$

Используя формулы (7), преобразуем (20) к виду

$$\begin{aligned} &B_0^{(1)} w_0^{(1)} + B_0^{(2)} w_0^{(2)} = 0, \\ &A_m^{(1)} w_m^{(1)} + A_m^{(2)} w_m^{(2)} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \\ &B_m^{(1)} w_m^{(1)} + B_m^{(2)} w_m^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$A_m^{(i)} = -\frac{2(1+\sigma) p_m \chi_i (\chi_i^2 + \lambda / (1+\sigma))}{(\chi_i^2 - p_m^2)^2 + \lambda (\chi_i^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)}$$

$$B_m^{(i)} = \frac{\chi_i^2 (\sigma\lambda - (1-\sigma^2) p_m^2) - \lambda \sigma p_m^2 + 2\sigma\lambda^2 / (1-\sigma)}{(\chi_i^2 - p_m^2)^2 + \lambda (\chi_i^2 - p_m^2)(3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} \quad (22)$$

$$B_0^{(i)} = \frac{0.5 \chi_i (\sigma \chi_i^2 + 2\lambda\sigma / (1-\sigma))}{\chi_i^4 + \lambda \chi_i^2 (3-\sigma)/(1-\sigma) + 2\lambda^2 / (1-\sigma)} - \sigma, \quad i = 1, 2$$

Из решений системы (21) возьмем то, в котором $w_m^{(1)}$ и $w_m^{(2)}$ не равны нулю, а остальные равны нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} A_m^{(1)} B_m^{(2)} - A_m^{(2)} B_m^{(1)} = (\sigma\lambda - (1-\sigma^2) p_m^2) \chi_1^2 \chi_2^2 + \\ + \lambda\sigma (2\lambda / (1-\sigma) - p_m^2)(\chi_1^2 + \chi_2^2) + \lambda(\lambda\sigma / (1-\sigma) + p_m^2) \times \\ \times \chi_1 \chi_2 + \lambda^2 \sigma (2\lambda / (1-\sigma) - p_m^2)/(1-\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (23) преобразуется к уравнению

$$\lambda(\lambda-(1-\sigma^2)/R^2)(\lambda-1/R^2-m^2/R^2)=$$
$$=(\lambda-(1-\sigma^2)/R^2-(1-\sigma^2)m^2/R^2)^2(2\lambda/(1-\sigma)-m^2/R^2) \tag{24}$$

которое совпадает с дисперсионным уравнением (11) из [1], где безразмерная характеристика фазовой скорости η и параметр λ связаны соотношением

$$\eta^2=2\lambda R^2/((1-\sigma)m^2) \tag{25}$$

Анализ показывает, что уравнение (24) в зоне (13) имеет только один корень.

В табл. 1 приведены значения η в зависимости от m и ε при $\sigma=0.33$.

В качестве направляющей кривой служит улитка Паскаля

$$\rho=R(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

$$0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0<\varepsilon<1,\quad R>0$$

Характеристика фазовой скорости η и параметр λ связаны соотношением

$$\eta^2=2\lambda/((1-\sigma)p_m^2)$$

В численных расчетах вместо (14) используются приближенные формулы

$$\chi_i=-((\chi_i^{(m)})^2+\alpha_i^{(m)}\varepsilon^2)^{1/2},\quad i=1,2$$

Таблица 1

m	η		
	$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0{,}405858$	$\varepsilon=0{,}5$
2	0,9769	0,9786	0,9804
3	0,9470	0,9442	0,9408
4	0,9342	0,9367	0,9382
5	0,9296	0,9301	0,9307
6	0,9264	0,9267	0,9271
7	0,9245	0,9247	0,9249
8	0,9232	0,9234	0,9236
9	0,9224	0,9225	0,9226
10	0,9218	0,9218	0,9220
11	0,9213	0,9213	0,9215
12	0,9209	0,9210	0,9211

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в

полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке. Волновые задачи механики, Нижний Новгород, 1992. 153 с.
2. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания токих упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. 383 с.
3. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некрутовой цилиндрической оболочки. Изв. НАН Армении. Механика, 1996, т. 49, N 1, с. 61-70.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
13.06.1995