ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ, НА ГРАНИ КОТОРОГО ВДАВЛИВАЮТСЯ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ КОНЕЧНЫЕ БАЛКИ, ВЫХОДЯЩИЕ К ВЕРШИНЕ

Григорян Э.Х., Аветикян В.Е.

Է. Խ. Գրիգորյան, Վ. Ե. Ավետիքյան
Կոնտակտային խնդիր սեպաձև տիրույթի համար, որի նիստերի վրա սեղմվում են դեպի սեպի գագաթը դուրս եկող սիմետրիկ դասավորված վերջավոր հեծաններ

Դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր առաձգական սեպի համար, երբ նրա երկու նիստերի վրա սեղմվում են միատեսակ վերջավոր հեծաններ, որոնք դուրս են գալիս դեպի սեպի գագաթը։ Սի խնդիրը հանգեցվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Մի մասնավոր դեպքի համար խնդիրը հանգեցվում է քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ գծային հավասարումների սիստեմի լուծմանը կոնտակտային լարումների ինտենսիվության Մելինի տրանսֆորմանտի մնացքների նկատմամբ։

E.K.Grigorian, V.E.Avetikian
The contact problem for a wedge region which verges are pressing with symmetric located finite beams emerging on the peak of the wedge

Рассматривается контактная задача для упругого клина, когда к его обеим граням вдавливаются две одинаковые конечные балки, выходящие к вершине клина. В угловой точке клина концы балок могут быть связаны различными способами. Задача сводится к решению фредгольмовского интегрального уравнения второго рода, допускающее решение с помощью метода последовательных приближений. В одном частном случае задача сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформанты Мелина интенсивности контактных напряжений.

Рассматривается следующая контактная задача. К обеим граням упругой клиновидной пластины $(0 \le r < \infty, \ -\alpha \le \vartheta \le \alpha)$ подкреплены две одинаковые конечные балки, выходящие к вершине клина, изгибаемые нормальными нагрузками $P_1(r)$ и $P_2(r)$. В угловой точке клина конца балок могут быть связаны различными способами. Касательные контактные напряжения между балками и клином отсутствуют. Эта задача в случае полубесконечных балок была рассмотрена в [5].

Задача решается путем разбиения на симметричную (1) и антисимметричную (2) задачи. Предполагаются решения задач (1) и (2) получить двумя методами.

1. Решения задач свести к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, решаемых методом последовательных приближений.

2. Решения задач свести к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно вычетов трансформантов контактных напряжений.

1. В симметричном случае обе балки будут нагружены нагрузкой $\frac{1}{2}(P_1(r)+P_2(r))$, в антисимметричном случае на грани $\vartheta=\alpha$ балка будет нагружена нагрузкой $\frac{1}{2}(P_1(r)-P_2(r))$, а на грани $\vartheta=-\alpha$ - нагрузкой $-\frac{1}{2}(P_1(r)-P_2(r))$. Ради простоты обозначения в дальнейшем нагрузку на балки обозначим через $P(r)$. Приступим к решению поставленной задачи.

Уравнения изгиба балок на грани $\vartheta=\alpha$ представим в виде :

$$D\frac{d^3\widetilde{V}_-^{(j)}(r)}{dr^3}=-q_j^-(r)+P^-(r)-N_j\delta''(r-a),\quad 0<r<\infty \tag{1.1}$$

$$q_j^-(r)=\theta(a-r)q_j(r),\quad \widetilde{V}_-^{(j)}(r)=\theta(a-r)\frac{d\widetilde{v}^{(j)}(r)}{dr},\quad N_j=\frac{d\widetilde{v}^{(j)}}{dr}\Big|_{r=a}$$

где $j=1$ соответствует симметричному случаю, $j=2$ -антисимметричному случаю, $q_j(r)$ нормальные контактные напряжения, $\widetilde{v}^{(j)}(r)$ - нормальные перемещения точек балок, $\theta(r)$ - функция Хевисайда, $\delta(r)$ - дельта функция Дирака, a - длина балок, D - жесткость балок на изгиб.

Условия равновесия балок для симметричной задачи в случаях свободного края или шарнирного соединения в точке r = 0 эквивалентны уравнениям

$$\int_0^\infty\left[q_1^-(r)-P^-(r)\right]r^k dr=0,\qquad (k=0;\ 1) \tag{1.2}$$

а в случае жесткого соединения

$$\int_0^\infty\left[q_1^-(r)-P^-(r)\right]dr=0,\quad \int_0^\infty\left[P^-(r)-q_1^-(r)\right]r^2dr=2N_1a^{-3} \tag{1.3}$$

где второе условие в (1.3) получается из условия $\frac{d\widetilde{v}^{(1)}}{dr}\Big|_{r=0}=0$. В случае антисимметричной задачи, независимо от типа соединения концов балок, имеем аналогичные (1.2) условия

$$\int_0^\infty\left[q_2^-(r)-P^-(r)\right]r^k dr=0,\qquad (k=0;\ 1) \tag{1.4}$$

Для деформации граничных точек пластины имеем

$$V_-^{(j)}(r,\alpha)+V_+^{(j)}(r,\alpha)=(-1)^{j-1}\frac{2(1-\nu^2)}{E}\int_0^\infty K_j\left(\frac{r}{t}\right)q_j^-(t)dt \tag{1.5}$$

$$K_j\left(\frac{r}{t}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}K_j(p,\alpha)\left(\frac{r}{t}\right)^{-(p+1)}dp, \quad (j=1;2)$$

$$\overline{K}_1(p,\alpha)=\sin(p+1)\alpha\sin(p-1)\alpha[\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha]^{-1} \tag{1.6}$$

$$\overline{K}_2(p,\alpha)=\cos(p+1)\alpha\cos(p-1)\alpha[\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha]^{-1} \tag{1.7}$$

$$V_-^{(j)}(r,\alpha)=\theta(a-r)\frac{dv^{(j)}(r,\alpha)}{dr}, \quad V_+^{(j)}(r,\alpha)=\theta(r-a)\frac{dv^{(j)}(r,\alpha)}{dr}$$

где $v^{(j)}(r,\alpha)$ перемещения граничных точек клина, E,ν соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, p - параметр интегрального преобразования Меллина, $-1+\varepsilon<c<0$, $\varepsilon<1$.

Отметим, что функции $q_j(r)$ ищутся в классе функций $q_j(r)\sim r^{-\varepsilon}$ при $r\to 0$ [1,2].

Далее, используя условие контакта $V_-^{(j)}(r,\alpha)=\tilde{V}_-^{(j)}(r)$ и переходя к безразмерным величинам, после применения преобразования Меллина из (1.1) и (1.5), получим следующие функциональные уравнения :

$$(-1)^{j-1}\overline{K}_j(p,\alpha)\overline{q}_j^-(p+1)-\lambda\prod_{n=1}^{3}(p+n)^{-1}\left[\overline{q}_j^-(p+4)-\overline{P}^-(p+4)\right]-$$

$$-\lambda\frac{N_j a^{-3}}{p+1}=E\left[2(1-\nu^2)\right]^{-1}\overline{V}_+^{(j)}(p+1), \quad (j=1;2), \tag{1.8}$$

$$-1+\varepsilon<\operatorname{Re}p<0$$

где $\overline{q}_j^-(p+1)=\int_0^\infty q_j^-(r)r^p dr$, $\lambda=Ea^3\left[2D(1-\nu^2)\right]^{-1}$

Функции $\overline{q}_j^-(p+1)$, $\overline{q}_j^-(p+4)$, $\overline{P}^-(p+4)$ и $\overline{V}_+^{(j)}(p+1)$ регулярны соответственно при $\operatorname{Re} p>-1+\varepsilon$, $\operatorname{Re}p>-4+\varepsilon$, $\operatorname{Re} p>-4+\varepsilon$ и $\operatorname{Re}p<0$.

Функциональные уравнения (1.8), являющиеся уравнениями типа Винера-Хопфа, представим в виде

$$-\overline{M}(p)\overline{G}_j(p,\alpha)\overline{q}_j^-(p+1)-\lambda_0\left[\overline{q}_j^-(p+4)-\overline{P}^-(p+4)\right]\times$$

$$\times\prod_{n=1}^{3}(p+n)^{-1}-\lambda_0\frac{N_j a^{-3}}{p+1}=E(1-\nu^2)^{-1}\overline{V}_+^{(j)}(p+1), \quad (j=1;2),$$

$$-1+\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0 \tag{1.9}$$

$$\overline{M}(p) = -\overline{M}^-(p)\overline{M}^+(p), \qquad \lambda_0 = 2\lambda,$$

$$\overline{G}_j(p,\alpha) = (-1)^j 2\operatorname{ctg} p\alpha \overline{K}_j(p,\alpha), \quad (j=1;2)$$

Далее, действуя аналогично [1-3], для $\overline{M}(p)$ и $\overline{G}_j(p,\alpha)$ получим

$$\overline{M}(p) = -\overline{M}^-(p)\overline{M}^+(p), \quad \overline{G}_j(p,\alpha) = \overline{L}_j^-(p)/\overline{L}_j^+(p), \tag{1.10}$$

$$\overline{M}^+(p) = \Gamma\left(-\frac{\alpha p}{\pi}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha p}{\pi}\right),$$

$$\overline{M}^-(p) = \Gamma\left(1+\frac{\alpha p}{\pi}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha p}{\pi}\right),$$

$\overline{M}^+(p)$ регулярна при $\operatorname{Re} p < 0$, $\overline{M}^-(p)$ регулярна при $\operatorname{Re} p > -\dfrac{\pi}{2\alpha}$,

$\overline{M}^+(p) \sim |p|^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{M}^-(p) \sim |p|^{-\frac{1}{2}}$, при $|p| \to \infty$ в своих областях регулярности,

$$\overline{L}_j^\pm(p) = \exp\left[\mp \overline{R}_j^\pm(p)\right],$$

$$R_j(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \ln \overline{G}_j(p,\alpha) r^{-(p+1)}dp, \quad -1+\varepsilon < c < 0.$$

Подставляя (1.10) в (1.9) и учитывая асимптотические поведения функции, входящие в (1.9), после некоторых выкладок и применения обобщенной теоремы Лиувилля, получим [1-3] :

$$\overline{q}_j^-(p+1) - \lambda_0\varphi_j^-(p+1)\left[\overline{M}^-(p)\overline{L}_j^-(p)\right]^{-1} - \frac{\lambda_0}{a^3}\frac{\overline{L}_j^+(-1)}{\overline{M}^+(-1)}\frac{N_j}{(p+1)}\times$$

$$\times\left[\overline{M}^-(p)\overline{L}_j^-(p)\right]^{-1} = (a_0 - \lambda_0\overline{\Psi}_j^-(p+1))\left[\overline{M}^-(p)\overline{L}_j^-(p)\right]^{-1},$$

$$-1+\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0; \tag{1.11}$$

$$\overline{\varphi}_j^-(p+1) = \int_0^1 \varphi_j(r)r^p dr, \quad \overline{\Psi}_j^-(p+1) = \int_0^1 \Psi_j(r)r^p dr,$$

$$\varphi_j(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\overline{L}_j^+(p)}{\overline{M}^+(p)}\frac{\overline{q}_j^-(p+4)}{\prod_{n=1}^{3}(p+n)} r^{-(p+1)}dp,$$

$$\Psi_j(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\overline{L}_j^+(p)}{\overline{M}^+(p)}\frac{\overline{P}_j^-(p+4)}{\prod_{n=1}^{3}(p+n)} r^{-(p+1)}dp,$$

где a_0 – неизвестная постоянная.

Далее, применяя обратное преобразование Меллина к (1.11), после применения теоремы о свертке и некоторых действий, для определения $q_j^-(r)$, получим следующие интегральные уравнения :

$$q_j^0(r) - \lambda_0^* \int_0^a \prod{}_j(r,\rho) q_j^0(\rho)\rho^2 d\rho = \qquad (j=1;2) \tag{1.12}$$

$$= a_0 D_j^-\left(\frac{r}{a}\right) - \lambda_0^* \int_0^a \prod{}_j(r,\rho) P(\rho)\rho^3 d\rho + \lambda_0^* N_j^0 C_j\left(\frac{r}{a}\right) a^{-3}.$$

$$q_j^0(r) = r q_j(r), \quad \prod{}_j(r,\rho) = \int_0^a D_j^-\left(\frac{r}{t}\right) D_j\left(\frac{t}{\rho}\right)\frac{dt}{t}.$$

$$D_j^-\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left[\overline{M}^-(p)\overline{L}_j^-(p)\right]^{-1}\left(\frac{r}{t}\right)^{-p} dp.$$

$$D_j\left(\frac{t}{\rho}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\overline{L}_j^+(p)\left(\frac{t}{\rho}\right)^{-p} dp}{\overline{M}^+(p)\prod\limits_{n=1}^{3}(p+n)}.$$

$$C_j^-\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{-p} dp}{(p+1)\overline{M}^-(p)\overline{L}_j^-(p)}.$$

$$D_j^-\left(\frac{r}{t}\right) = 0 \quad \text{при} \quad r > t, \quad N_j^0 = N_j \frac{\overline{L}_j^+(-1)}{\overline{M}^+(-1)}, \quad \lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{a^3}.$$

Используя асимптотические формулы, для $\prod_j(r,\rho)$ можно получить [1,2] :

$$\prod{}_j(r,\rho) = \tilde{\Pi}_j(r,\rho) + \frac{2}{\pi}\ln^2\frac{\rho}{r}\ln\left[\sqrt{\ln\frac{a}{r}} - \sqrt{\ln\frac{a}{\rho}}\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\ln^2\frac{\rho}{r}\ln\left|\frac{1}{\ln r - \ln\rho}\right| \tag{1.13}$$

Из (1.13) следует, что ядро интегральных уравнений (1.12) при $r = \rho$ и $r = \rho = a$ особенности не имеет.

Неизвестные постоянные a_0 и N_j^0 определяются из условий (1.2) в случаях свободного края и шарнирного соединения и из условий (1.3) в случае жесткого соединения в симметричной задаче, а в антисимметричной задаче - из условий (1.4).

Таким образом, решения задач (1) и (2) сведены к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода (1.12).

Интегральные уравнения (1.12) при условии

$$\lambda_0^*\left(\sup_{0<\rho<a}\int_0^a\left|\prod_j(r,\rho)\right|dr\right)<1,\quad (j=1;2)$$

допускают решение методом последовательных приближений.

Отметим, что при $\lambda_0\to 0$ из (1.12) получаются решения задач (1) и (2) в случаях жестких штампов в виде :

$$q_j(r)=\frac{a_0}{r}D_j^-\left(\frac{r}{a}\right). \qquad (1.14)$$

Исследования показывают, что контактные напряжения в вершине клина для симметричной задачи в случае свободного края или шарнирного соединения имеют следующее поведение : $q_1(r)=0(\ln r)$ для $\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и $q_1(r)=0(r^{\frac{\pi}{\alpha}-2})$ для $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, а в случае жесткого соединения концов балок $q_1(r)=0(1)$ для $\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и $q_1(r)=0(r^{\frac{\pi}{\alpha}-2})$ для $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ [5].

Для антисимметричной задачи, исследуя поведение контактных напряжений в вершине клина, обнаруживаем, что независимо от способа соединения концов балок при $r\to 0$: $q_2(r)=0(r)$ для $\alpha<\frac{\pi}{6}$,

$q_2(r)=0(r^{\frac{\pi}{2\alpha}-2})$ для

$\frac{\pi}{6}\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$, $q_2(r)=0(r^{\frac{\pi}{2\alpha}-2})$ для $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $q_2(r)=0(r)$ для $\alpha=\frac{\pi}{2}$,

$q_2(r)=0(r^{-\frac{\pi}{2\alpha}})$ для $\frac{\pi}{2}<\alpha\le\frac{3\pi}{4}$, $q_2(r)=0(r^{\min(-\frac{\pi}{2\alpha},\ \frac{3\pi}{2\alpha}-2)})$ для

$\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi.$

2. Приступим к сведению задач (1) и (2) к квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений отностительно вычетов трансформантов контактных напряжений. Здесь рассматривается частный случай задач (1) и (2), когда $P(r)=P\delta(a-r)$.

Задача (1) а). Рассмотрим симметричную задачу в случае свободного края или шарнирного соединения концов балок. Из (1.2) в этом случае имеем.

$$\overline{q}_1^-(1) = Pa^{-1}, \quad \overline{q}_1^-(2) = Pa^{-1} \tag{2.1}$$

Допустим $\alpha = \dfrac{\pi k}{m}$. Очевидно, что нулями функции $\overline{K}_1(p,\alpha)$ являются точки $a_n = \pm 1 \pm \dfrac{\pi n}{\alpha}$. Обозначим $p_1 = -1$ и через $p_n \ (n = 2,3,\ldots)$ нули функции $\sin(p+1)\alpha$, расположенные в порядке $p_n > p_{n+1}$, где $p_n < 0$, а через $\tilde{p}_n$ - нули функции $\sin(p-1)\alpha$, расположенные в аналогичном порядке, где $\tilde{p}_n < 0$.

Здесь и в дальнейшем, под $\overline{q}_j^-(p+1)$, $\overline{q}_j^-(p+4)$, $\overline{V}_+(p+1)$ будем подразумевать также их аналитические продолжения. Так как $\overline{V}_+(p+1)$ регулярна при $\mathrm{Re}\, p < 0$, $a\overline{q}_1^-(p+4)$ регулярна в точке $p = p_1$, из (1.8) заключим, что функция $\overline{q}_1^-(p+1)$ в точке $p = p_1$ имеет полюс второго порядка. В точке $p = p_1 - 3$ $\overline{q}_1^-(p+4)$ имеет полюс второго порядка. Так как $\overline{K}_1(p,\alpha)$ в этой точке не обращается в нуль, то $\overline{q}_1^-(p+1)$ в точке $p = p_1 - 3$ имеет полюс второго порядка. В точке $p = p_1 - 3m$ функция $\overline{q}_1^-(p+1)$ будет иметь полюс третьего порядка, в точке $p = p_1 - 6m$ - полюс четвертого порядка и т. д.

Поэтому будем рассматривать те случаи, когда α / π иррациональное число, так как в этом случае $\overline{K}_1(p,\alpha)$ в точках $p = p_1 - 3m$ не обращается в нуль и $\overline{q}_1^-(p+1)$ в этих точках имеет только полюсы второго порядка.

Далее, из (1.8) при $j = 1$ аналогично установим, что точки $p = p_n$ $(n = 2,3,\ldots)$, $p = \tilde{p}_n \ (n = 1,2,3,\ldots)$ для $\overline{q}_1^-(p+1)$ являются простыми полюсами. Так как $\overline{K}_1(p_n - 3k,\alpha) \neq 0$, $\overline{K}_1(\tilde{p}_n - 3k,\alpha) \neq 0$, то в точках $p = p_n - 3k$, $p = \tilde{p}_n - 3k$ $\overline{q}_1^-(p+1)$ будем иметь простые полюсы.

Обозначим

$$A_{-1}^{(n)} = \underset{p = p_n}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1), \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots), \tag{2.2}$$

$$B_{-1}^{(n)} = \underset{p = \tilde{p}_n}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2.3}$$

тогда $\underset{p=p_n-3k}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1)=b_n^{(k)}A_{-1}^{(n)}$, $(n=2,3,\ldots;\ k=1,2,3,\ldots)$,

$$b_n^{(k)}=\lambda^k\prod_{\ell=1}^{k}\left[\overline{K}_1(p_n-3\ell,\alpha)\prod_{t=1}^{3}(p_n-3\ell+t)\right]^{-1},\quad b_n^{(0)}=1, \tag{2.4}$$

$\underset{p=\tilde{p}_n-3k}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1)=d_n^{(k)}B_{-1}^{(n)}$, $(n;k=1,2,3,\ldots)$,

$$d_n^{(k)}=\lambda^k\prod_{\ell=1}^{k}\left[\overline{K}_1(\tilde{p}_n-3\ell,\alpha)\prod_{t=1}^{3}(\tilde{p}_n-3\ell+t)\right]^{-1},\quad d_n^{(0)}=1. \tag{2.5}$$

Так как в точках $p=p_1-3k$ $\overline{q}_1^-(p+1)$ имеет полюсы второго порядка, то его Лорановское разложение в этих точках будет иметь следующий вид :

$$\overline{q}_1^-(p+1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(p-p_1+3k)^n+\frac{A_{-1}^{(1+3k)}}{p-p_1+3k}+\frac{A_{-2}^{(1+3k)}}{(p-p_1+3k)^2}, \tag{2.6}$$

$(k=0,1,2,\ldots)$.

Имея в виду (2.6), из (1.8) получим следующие рекуррентные соотношения :

$$A_{-2}^{(1+3k)}=b_1^{(k)}A_{-2}^{(1)},\quad A_{-1}^{(1+3k)}=b_1^{(k)}A_{-1}^{(1)}+b_1^{(k)}B_kA_{-2}^{(1)}, \tag{2.7}$$

$$B_k=\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{H'(t)}{H(t)}-\frac{K'(t)}{K(t)}\right),\quad B_0=0,$$

$$K(t)=\overline{K}_1(p_1-3t,\alpha),\quad K'(t)=\left.\frac{d\overline{K}_1(p,\alpha)}{dp}\right|_{p=p_1-3t},$$

$$H(t)=\prod_{\ell=1}^{3}(p_1-3t+\ell)^{-1},\quad H'(t)=\frac{d}{dp}\left[\prod_{\ell=1}^{3}(p+\ell)^{-1}\right]_{p=p_1-3t}$$

Учитывая (2.2) - (2.7), для $\overline{q}_1^-(p+1)$ получим разложение :

$$\overline{q}_1^-(p+1)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{B_k}{p+1+3k}+\frac{1}{(p+1+3k)^2}\right)b_1^{(k)}A_{-2}^{(1)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b_n^{(k)}A_{-1}^{(n)}}{p-p_n+3k}+\frac{d_n^{(k)}B_{-1}^{(n)}}{p-\tilde{p}_n+3k}\right). \tag{2.8}$$

Далее, с использованием (2.8), получив аналогичное представление для $\overline{\varphi}_1^-(p+1)$ и $\overline{q}_1^-(p+4)$, после некоторых выкладок из (1.11), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [4, 6] :

$$\widetilde{A}_{-2}^{(1)} - \lambda\mu_1\left\{C^{(0)}\widetilde{A}_{-2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n^{(0)}\widetilde{A}_{-1}^{(n)} + \widetilde{C}_n^{(0)}\widetilde{B}_{-1}^{(n)}\right) = \mu_1 f_0,\right. \qquad (2.9)$$

$$\widetilde{A}_{-1}^{(m)} - \lambda\mu_m\left\{C^{(m)}\widetilde{A}_{-2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n^{(m)}\widetilde{A}_{-1}^{(n)} + \widetilde{C}_n^{(m)}\widetilde{B}_{-1}^{(n)}\right)\right\} = \qquad (2.10)$$

$$= \mu_m f_m, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\widetilde{B}_{-1}^{(m)} - \lambda\widetilde{\mu}_m\left\{\widetilde{C}^{(m)}\widetilde{A}_{-2}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(D_n^{(m)}\widetilde{A}_{-1}^{(n)} + \widetilde{D}_n^{(m)}\widetilde{B}_{-1}^{(n)}\right)\right\} = \qquad (2.11)$$

$$= \widetilde{\mu}_m \widetilde{f}_m, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

В (2.9) - (2.11) приняты следующие обозначения :

$$\widetilde{A}_{-2}^{(1)} = \overline{K}_1'(p_1,\alpha)A_{-2}^{(1)}, \quad \widetilde{A}_{-1}^{(m)} = \overline{K}_1'(p_m,\alpha)A_{-1}^{(m)},$$

$$\widetilde{B}_{-1}^{(m)} = \overline{K}_1'(\widetilde{p}_m,\alpha)B_{-1}^{(m)}, \quad \mu_m = \overline{M}^+(p_m)\left[\overline{L}_1^+(p_m)\right]^{-1},$$

$$C^{(0)} = Y_1\frac{\overline{L}_1^+(-1)}{\overline{M}^+(-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{B_k}{3+3k} + \frac{1}{(3+3k)^2}\right)\widetilde{b}_1^{(k)},$$

$$C_1^{(0)} = \frac{Y_1}{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{b}_1^{(k)}}{3+3k}, \quad C_n^{(0)} = \frac{Y_1}{\mu_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{b}_n^{(k-1)}}{-1+p_n+3k}, \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$C^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{T(-4-3k)}{3+3k}\left(B_k + \frac{1}{3+3k}\right) + \frac{T'(-4-3k)}{3+3k} + \right.$$

$$+\sum_{j=2}^{3}\frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)}\left(\frac{B_k}{4-j+3k} + \frac{1}{(4-j+3k)^2}\right)\frac{Y_j}{j-1} +$$

$$\left.+\frac{Y_1}{\mu_1}\left(\frac{B_k}{3+3k} + \frac{1}{(3+3k)^2}\right)\lim_{p=-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p+1)\overline{M}^+(p)}{\overline{L}_1^+(p)\overline{K}_1(p,\alpha)}\right]\right\}\widetilde{b}_1^{(k)}.$$

$$C_1^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{T(-4-3k)}{3+3k} + \sum_{j=2}^{3}\frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)}\frac{Y_j}{(j-1)(4-j+3k)} + \right.$$

$$\left.+\frac{Y_1}{\mu_1}\frac{1}{3+3k}\lim_{p=-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p+1)\overline{M}^+(p)}{\overline{L}_1^+(p)\overline{K}_1(p,\alpha)}\right]\right\}\widetilde{b}_1^{(k)},$$

$$C_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{T(p_n-3k)}{-1-p_n+3k} + \sum_{j=2}^{3}\frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)}\frac{Y_j}{(j-1)(-j-p_n+3k)} + \right.$$

$$\left.+\frac{Y_1}{\mu_1}\frac{1}{-1-p_n+3k}\lim_{p=-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p+1)\overline{M}^+(p)}{\overline{L}_1^+(p)\overline{K}_1(p,\alpha)}\right]\right\}\widetilde{b}_n^{(k-1)}, \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$\widetilde{b}_n^{(k-1)} = \frac{b_n^{(k-1)}}{\overline{K}_1'(p_n,\alpha)}, \quad \widetilde{d}_n^{(k-1)} = \frac{d_n^{(k-1)}}{\overline{K}_1'(\widetilde{p}_n,\alpha)}, \quad Y_1 = Y_3 = \frac{1}{2}, \quad Y_2 = -1,$$

$$Q_{mk} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{(p_m+j)(-j+4+3k)} + \frac{T(-4-3k)}{p_m+4+3k},$$

$$C^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ Q_{mk} B_k + \frac{T(-4-3k)}{(p_m+4+3k)^2} + \frac{T'(-4-3k)}{p_m+4+3k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{(p_m+j)(4-j+3k)^2} \right\} \widetilde{b}_1^{(k)}, \quad (m = 2, 3, \ldots),$$

$$C_1^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{mk} \widetilde{b}_1^{(k)}, \quad (m = 2, 3, 4, \ldots),$$

$$C_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{T(p_n-3k)}{p_m-p_n+3k} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{(p_m+j)(-j-p_n+3k)} \right] \widetilde{b}_n^{(k-1)},$$

$$T(p) = \frac{\overline{L}_1^+(p)}{\overline{M}^+(p)} \prod_{\ell=1}^{3} (p+\ell)^{-1}, \quad T'(p_n) = \left.\frac{dT(p)}{dp}\right|_{p=p_n},$$

$$f_0 \equiv = \frac{\lambda P}{a} \lim_{p=-1} \left[(p+1) \overline{\Psi}_1^-(p+1) \right] + \lambda \frac{N_1}{\mu_1} a^{-3}, \quad \overline{\Psi}_1^-(p+1) = \int_0^1 \Psi_1(r) r^p dr,$$

$$f_1 = \frac{a_0}{2} - \frac{\lambda P}{a} \lim_{p=-1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1)^2 \overline{M}^+(p) \overline{\Psi}_1^-(p+1)}{\overline{L}_1^+(p) \overline{K}_1(p,\alpha)} \right] +$$

$$+ \lambda \frac{N_1}{\mu_1 a^3} \lim_{p=-1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p+1) \overline{M}^+(p)}{\overline{L}_1^+(p) \overline{K}_1(p,\alpha)} \right], \quad \Psi_1(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\overline{L}_1^+(p) r^{-(p+1)} dp}{\overline{M}^+(p) \prod_{n=1}^{3} (p+n)}.$$

$$f_m = \frac{a_0}{2} - \frac{\lambda P}{a} \overline{\Psi}_1^-(p_m+1) + \lambda \frac{N_1}{a^3 \mu_1} \frac{1}{p_m+1}, \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Для получения $\widetilde{C}^{(m)}$, $\widetilde{C}_n^{(m)}$, $\widetilde{\mu}_n$, $\widetilde{f}_n$ необходимо соответственно в $C^{(m)}$, $C_n^{(m)}$, μ_n, f_n p_n заменить через $\widetilde{p}_n$ и $\widetilde{b}_n^{(k)}$ через $\widetilde{d}_n^{(k)}$, а для получения $D_n^{(m)}$ и $\widetilde{D}_n^{(m)}$ в $C_n^{(m)}$ и $\widetilde{C}_n^{(m)}$ заменить p_m чезез $\widetilde{p}_m$.

К системе уравнений (2.9) - (2.11) добавим уравнения (2.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\widetilde{b}_1^{(k)}}{(\ell+1+3k)^2} + \frac{\widetilde{b}_1^{(k)} B_k}{\ell+1+3k} \right\} \widetilde{A}_{-2}^{(1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{b}_n^{(k)}\tilde{A}_{-1}^{(n)}}{\ell-p_n+3k}+\frac{\tilde{d}_n^{(k)}\tilde{B}_{-1}^{(n)}}{\ell-\tilde{p}_n+3k}\right)=Pa^{-1},\quad (\ell=0;1). \tag{2.12}$$

Квазивполная регулярность системы (2.9) - (2.11) следует из того, что

$$\left|C^{(m)}\right|<\infty,\quad \left|\tilde{C}^{(m)}\right|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|C_n^{(m)}\right|<\infty,\quad \left|f_m\right|<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\tilde{C}_n^{(m)}\right|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|D_n^{(m)}\right|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\tilde{D}_n^{(m)}\right|<\infty,$$

в котором нетрудно убедиться, поскольку $\mu_m;\ \tilde{\mu}_m=0\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)$ при $m\to\infty$.

После решения системы (2.9) - (2.11) контактные напряжения можно вычислить по формуле

$$q_1(r)=\ln\left(\frac{r}{a}\right)A_{-2}^{(1)}+A_{-2}^{(1)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k+\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)b_1^{(k)}\left(\frac{r}{a}\right)^{3k}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[b_n^{(k)}A_{-1}^{(n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-p_n+3k-1}+d_n^{(k)}B_{-1}^{(n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-\tilde{p}_n+3k-1}\right]. \tag{2.13}$$

В случае жестких штампов решение будет иметь следующий вид, где $\dfrac{\alpha}{\pi}$ может быть и рациональное число :

$$q_1(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\overline{M}^+(p_n)}{\overline{L}_1^+(p_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}+\frac{\overline{M}^+(\tilde{p}_n)}{\overline{L}_1^+(\tilde{p}_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-2+\frac{\pi n}{\alpha}}\right]\frac{a_0}{\alpha}+$$
$$+\frac{a_0\pi}{2\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\overline{M}^+(p_n)}{\overline{L}_1^+(p_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}-\frac{\overline{M}^+(\tilde{p}_n)}{\overline{L}_1^+(\tilde{p}_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-2+\frac{\pi n}{\alpha}}\right] \tag{2.14}$$

Как видно из (2.14), при $r\to a$ $q_1(r)$ имеет корневую особенность, поскольку при $n\to\infty$ $\mu_n;\ \tilde{\mu}_n=0\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Этот результат совпадает с результатом (1.14), где a_0 необходимо определить из первого уравнения (1.2).

Задача (1) б). Рассмотрим случай жестокого соединения концов балок. Из (1.3) имеем

$$\overline{q}_1^-(1)=Pa^{-1},\quad \overline{q}_1^-(3)=Pa^{-1}-2N_1a^{-3}. \tag{2.15}$$

Обозначим $p_1=-2$, $p_2=-1$ и через $p_n(n=2,3,4,\ldots)$ нули функции $\sin(p+1)\alpha$, расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а через $\tilde{p}_n (n = 2, 3, 4, \ldots)$ нули функции $\sin(p-1)\alpha$ при $\operatorname{Re} p < 0$, причем $p_n > p_{n+1}$ и $\tilde{p}_n > \tilde{p}_{n+1}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Аналогично (1) а) установим, что в точках $p = p_n - 3k$, $p = \tilde{p}_n - 3k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ $\overline{q}_1^-(p+1)$ при условии, что $\dfrac{\alpha}{\pi}$ – иррациональное число, имеет простые полюсы.

Обозначим

$$A_{-1}^{(n)} = \underset{p = p_n}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1), \quad B_{-1}^{(n)} = \underset{p = \tilde{p}_n}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1) \tag{2.16}$$

тогда из (1.8) установим, что

$$\underset{p = p_n - 3k}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1) = b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}, \quad (n;\ k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_n^{(k)} = \lambda^k \prod_{\ell=1}^{k} \left[\overline{K}_1(p_n - 3\ell, \alpha) \prod_{t=1}^{3} (p_n - 3\ell + t) \right]^{-1}, \quad b_n^0 = 1, \tag{2.17}$$

$$\underset{p = \tilde{p}_n - 3k}{\text{Выч}}\ \overline{q}_1^-(p+1) = d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}, \quad (n = 2, 3, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$d_n^{(k)} = \lambda^k \prod_{\ell=1}^{k} \left[\overline{K}_1(\tilde{p}_n - 3\ell, \alpha) \prod_{t=1}^{3} (\tilde{p}_n - 3\ell + t) \right]^{-1}, \quad d_n^{(0)} = 1$$

Для $\overline{q}_1^-(p+1)$ с использованием (2.16) и (2.17) получим

$$\overline{q}_1^-(p+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_1^{(k)} A_{-1}^{(1)}}{p - p_1 + 3k} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}}{p - p_n + 3k} + \frac{d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}}{p - \tilde{p} + 3k} \right] \tag{2.18}$$

Далее, получив аналогичные представления для $\overline{q}_1^-(p+4)$ и $\overline{\varphi}_1^-(p+1)$, после некоторых выкладок из (1.11), получим

$$\begin{cases} \tilde{A}_{-1}^{(m)} - \lambda \mu_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(C_n^{(m)} \tilde{A}_{-1}^{(n)} + \tilde{C}_n^{(m)} \tilde{B}_{-1}^{(n)} \right) = \mu_m f_m, \quad (m = 1, 2, \ldots), \\ \tilde{B}_{-1}^{(m)} - \lambda \tilde{\mu}_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(D_n^{(m)} \tilde{A}_{-1}^{(n)} + \tilde{D}_n^{(m)} \tilde{B}_{-1}^{(n)} \right) = \tilde{\mu}_m \tilde{f}_m, \quad (m = 2, 3, \ldots), \end{cases} \tag{2.19}$$

$$B_{-1}^{(1)} = B_{-1}^{(1)} = 0,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[\dfrac{\tilde{b}_n^{(k)} \tilde{A}_{-1}^{(n)}}{-p_n + 3k} + \dfrac{\tilde{d}_n^{(k)} \tilde{B}_{-1}^{(n)}}{-\tilde{p}_n + 3k} \right] = Pa^{-1}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[\dfrac{\tilde{b}_n^{(k)} \tilde{A}_{-1}^{(n)}}{2 - p_n + 3k} + \dfrac{\tilde{d}_n^{(k)} \tilde{B}_{-1}^{(n)}}{2 - \tilde{p}_n + 3k} \right] = Pa^{-1} - 2N_1 a^{-3}. \end{cases} \tag{2.20}$$

$$C_n^{(1)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{b}_n^{(k-1)}}{\overline{K}_1(-2,\alpha)\mu_1(-2-p_n+3k)},$$

$$C_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(p_n-3k)\widetilde{b}_n^{(k-1)}}{p_1-p_n+3k},$$

$$C_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{L}_1^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{p_m+j} \frac{\widetilde{b}_n^{(k-1)}}{(-j-p_n+3k)} + \frac{T(p_n-3k)}{p_m-p_n+3k}\widetilde{b}_n^{(k-1)}\right],$$

$(m = 3, 4, 5, \ldots)$,

$$f_1 = -\frac{\lambda P}{a}\left[\overline{K}_1(p_1,\alpha)\right]^{-1} \lim_{p=p_1}\left[(p-p_1)\overline{\Psi}_1^-(p+1)\right],$$

$$f_2 = \frac{a_0}{2}, \quad f_m = \frac{a_0}{2} - \frac{\lambda P}{a}\overline{\Psi}_1^-(p_m+1) + \frac{\lambda}{a^3}\frac{N_1}{p_m+1}\frac{\overline{L}_1^+(-1)}{\overline{M}^+(-1)}.$$

Для получения $\widetilde{C}_n^{(m)}$ вместо p_n надо положить $\widetilde{p}_n$, а вместо $\widetilde{b}_n^{(k-1)}$ - соответственно $\widetilde{d}_n^{(k-1)}$. Для получения $D_n^{(m)}$, $\widetilde{D}_n^{(m)}$, $\widetilde{\mu}_m$ и $\widetilde{f}_m$ надо в $C_n^{(m)}$, $\widetilde{C}_n^{(m)}$, μ_m и f_m положить вместо p_m соответственно $\widetilde{p}_m$.

Далее, аналогично задаче (1) а) установим, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.19), (2.20) является квазивполне регулярной системой для любых λ.

В случае, когда $\lambda \to 0$, для $q_1(r)$ получается выражение (2.14), где a_0 нужно определить из второго уравнения (1.3), положив $N_1 = 0$.

Задача (2). Рассмотрим антисимметричную задачу. Из уравнений (1.8) при $j=2$ нетрудно установить, что точки $p = p_n$, $p = \widetilde{p}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где p_n - нули функции $\cos(p+1)\alpha$, а $\widetilde{p}_n$ - нули функции $\cos(p-1)\alpha$ при $\operatorname{Re} p < 0$, $p_n > p_{n-1}$, $\widetilde{p}_n > \widetilde{p}_{n-1}$, являются особыми точками $\overline{q}_2^-(p+1)$. Аналогично установим, что точки $p = p_n - 3k$, $p = \widetilde{p}_n - 3k$ $(n; k = 1, 2, 3, \ldots)$ при условии, что $\frac{\alpha}{\pi}$ -иррациональное число, для функции $\overline{q}_2^-(p+1)$ являются простыми полюсами.

Обозначим $\underset{p=p_n}{\text{Выч}}\ \overline{q}_2^-(p+1) = A_{-1}^{(n)}$, $\underset{p=\widetilde{p}_n}{\text{Выч}}\ \overline{q}_2^-(p+1) = B_{-1}^{(n)}$, тогда (1.8) установим, что

$$\underset{p=p_n-3k}{\text{Выч}}\ \overline{q}_2^-(p+1) = b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}, \qquad \underset{p=\widetilde{p}_n-3k}{\text{Выч}}\ \overline{q}_2^-(p+1) = d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)},$$

$(n; k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$b_n^{(k)} = (-1)^k \lambda^k \prod_{\ell=1}^{k} \left[\overline{K}_2(p_n - 3\ell, \alpha) \prod_{t=1}^{3} (p_n - 3\ell + t) \right]^{-1}, \quad b_n^{(0)} = 1,$$

$$d_n^{(k)} = (-1)^k \lambda^k \prod_{\ell=1}^{k} \left[\overline{K}_2(\tilde{p}_n - 3\ell, \alpha) \prod_{t=1}^{3} (\tilde{p}_n - 3\ell + t) \right]^{-1}, \quad d_n^{(0)} = 1,$$

Учитывая это, для $\overline{q}_2^-(p+1)$ получим

$$\overline{q}_2^-(p+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)}}{p - p_n + 3k} + \frac{d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)}}{p - \tilde{p} + 3k} \right].$$

Далее, действуя аналогично вышеизложенному, из (1.11) при $j = 2$ получим

$$\begin{cases} \widetilde{A}_{-1}^{(m)} + \lambda \mu_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(m)} \widetilde{A}_{-1}^{(n)} + \widetilde{C}_n^{(m)} \widetilde{B}_{-1}^{(n)} \right] = \mu_m f_m, \\ \qquad (m = 1, 2, \ldots) \\ \widetilde{B}_{-1}^{(m)} + \lambda \tilde{\mu}_m \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[D_n^{(m)} \widetilde{A}_{-1}^{(n)} + \widetilde{D}_n^{(m)} \widetilde{B}_{-1}^{(n)} \right] = \tilde{\mu}_m \tilde{f}_m, \end{cases} \qquad (2.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\tilde{b}_n^{(k)} \widetilde{A}_{-1}^{(n)}}{\ell - p_n + 3k} + \frac{\tilde{d}_n^{(k)} \widetilde{B}_{-1}^{(n)}}{\ell - \tilde{p}_n + 3k} \right] = Pa^{-1}, \quad (\ell = 0; 1), \qquad (2.22)$$

$$\widetilde{A}_{-1}^{(n)} = \overline{K}_2'(p_n, \alpha) A_{-1}^{(n)}, \quad \widetilde{B}_{-1}^{(n)} = \overline{K}_2'(p_n, \alpha) B_{-1}^{(n)},$$

$$\mu_m = \overline{M}^+(p_m) \left[\overline{L}_2^+(p_m) \right]^{-1}, \quad \tilde{\mu}_m = \overline{M}^+(\tilde{p}_m) \left[\overline{L}_2^+(\tilde{p}_m) \right]^{-1},$$

$$C_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{L}_2^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{p_m + j} \frac{\tilde{b}_n^{(k-1)}}{-j - p_n + 3k} + \frac{T(p_n - 3k) \tilde{b}_n^{(k-1)}}{p_m - p_n + 3k} \right],$$

$$\widetilde{C}_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\overline{L}_2^+(-j)}{\overline{M}^+(-j)} \frac{Y_j}{p_m + j} \frac{\tilde{b}_n^{(k-1)}}{-j - p_n + 3k} + \frac{T(\tilde{p}_n - 3k) \tilde{d}_n^{(k-1)}}{p_m - \tilde{p}_n + 3k} \right],$$

$$f_m = -\frac{a_0}{2} + \frac{\lambda P}{a} \overline{\Psi}_2^-(p_m + 1) - \frac{\lambda}{a^3} \frac{N_2}{p_m + 1} \frac{\overline{L}_2^+(-1)}{\overline{M}^+(-1)}, \quad (m = 1, 2, 3 \ldots).$$

Для получения $D_n^{(m)}$, $\widetilde{D}_n^{(m)}$ и $\tilde{f}_m$ в выражениях $C_n^{(m)}$, $\widetilde{C}_n^{(m)}$ и f_m p_m нужно заменить через $\tilde{p}_m$ соответственно. После решения системы (2.21), (2.22) для $q_2(r)$ получается следующее выражение :

$$q_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[b_n^{(k)} A_{-1}^{(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{-p_n + 3k - 1} + d_n^{(k)} B_{-1}^{(n)} \left(\frac{r}{a} \right)^{-\tilde{p}_n + 3k - 1} \right].$$

В случае $\lambda \to 0$ из (2.21) и (2.23) получаем. $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\alpha}{\pi}$ - может принимать и рациональное значение

$$q_2(r)=\frac{a_0}{2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\overline{M}^+(p_n)}{\overline{L}_2^+(p_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{2\alpha}}+\frac{\overline{M}^+(\tilde{p}_n)}{\overline{L}_2^+(\tilde{p}_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-2+\frac{\pi n}{2\alpha}}\right](1-(-1)^n)+$$

$$+\frac{a_0\pi}{4\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\overline{M}^+(p_n)}{\overline{L}_2^+(p_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{2\alpha}}-\frac{\overline{M}^+(\tilde{p}_n)}{\overline{L}_2^+(\tilde{p}_n)}\left(\frac{r}{a}\right)^{-2+\frac{\pi n}{2\alpha}}\right]n \tag{2.24}$$

Как видно из (2.24), при $r\to a$ $q_2(r)$ имеет корневую особенность, поскольку при $n\to\infty$

$$\frac{\overline{M}^+(p_n)}{\overline{L}_2^+(p_n)},\quad \frac{\overline{M}^+(\tilde{p}_n)}{\overline{L}_2^+(\tilde{p}_n)}\sim n^{-\frac{1}{2}},$$

которая совпадает с результатом (1.14).

Таким образом, решения задач (1) и (2) сведены к квазивполне регулярным бесконечным системам относительно вычетов трансформантов контактных напряжений для любого значения параметра λ в том случае, когда $\frac{\alpha}{\pi}$ иррациональное число.

Работа выполнена по заказу фирмы "Анушик".

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержайщей упругое конечное включение. - Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1982, N 2, с. 32-43.
2. Аветикян В.Е. Контактная задача для упругого клина, вдавливаемого конечной балкой, выходящей на его вершину. - Межвуз. сб. науч. трудов. Механика, Ереван : Изд. ЕГУ, 1986, N 4, с. 146-151.
3. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. - М. : ИЛ, 1962.
4. Григорян Э.Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости. - Межвуз. сб. науч. трудов. Механика, Ереван : Изд. ЕГУ, 1987, N 6, с. 127-133.
5. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. - ПММ, 1974, т. 39, вып. 6, с. 1100-1109.
6. Аветикян В.Е., Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для клина с конечной балкой. Юбилейная науч. конференция, посвящен. 60 -летию основания ГПИ им. М. Налбандяна, 1994, т. 1, с. 9-12.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
20.02.1995