ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ГИБКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ С ЗАДАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц., Маркарян С.Э.

Է. Վ. Բելուբեկյան, Վ. Ց. Գնունի, Ս. Է. Մարգարյան

Տրված սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում ճկուն ուղղանկյուն սալի ամրությունը և կոշտությունը

Տրված սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում քննարկվում են ճկուն սալի ամրության և կոշտության պայմաններից սկզբնական գրգռումների մեծագույն արժեքի որոշման խնդիրները:

Դիտարկվում են դեպքեր, երբ սալը պատրաստված է իզոտրոպ և օրտոտրոպ նյութերից:

E.V. Belubekian, V.Ts.Gnuni, S.E. Markarian

The Strength and Rigidness of a Flexible Rectangular Plate in Case of Oscillation with given Initial Conditions

Ставятся задачи определения наибольшего значения начального возмущения гибкой пластинки из условий прочности и жесткости при колебаниях с заданными начальными условиями. Рассматриваются случаи, когда пластинка изготовлена из изотропного и ортотропного материалов.

Рассматриваются колебания шарнирно опертой по контуру гибкой прямоугольной пластинки размерами a, b, h при заданных начальных условиях.

Пластинка принимается отнесенной к прямоугольной системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, ось Ox направлена по стороне a, ось Oy - по стороне b пластинки.

Ставятся задачи определения наибольшего значения начального возмущения (прогиба или скорости) пластинки: а) из условия прочности пластинки, б) из условия жесткости пластинки с последующей проверкой условия прочности.

Рассматриваются случаи пластинки из изотропного и ортотропного материала, полученного путем поочередной укладки монослоев ортотропного композиционного материала (КМ) по толщине пластинки под углами $\pm\varphi$ к оси Ox. Во втором случае появляется возможность нахождения оптимального по углу φ проекта пластинки.

1. В случае изотропного материала система дифференциальных уравнений гибкой пластинки имеет вид [1]

$$D\nabla^4 w - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 = 0$$

где $w(x,y,t)$ функция прогибов пластинки, $\phi(x,y,t)$ - функция усилий, ρ - плотность материала, t время, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ - изгибная жестокость, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Начальные условия для простоты выкладок принимаются в виде

$$w\big|_{t=0} = C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \chi C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (2)$$

где C и χC соответственно, максимальные значения начальных прогиба и скорости.

Функции прогибов w и усилий ϕ, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания пластинки, принимаются в виде

$$w = f(t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \quad \phi = \Psi(t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (1), условия (2) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина к системе (1), получаются уравнения для определения функций $f(t)$ и $\Psi(t)$.

$$f''(t) + \omega^2 f(t) + \gamma f^3(t) = 0 \qquad (4)$$

$$\Psi(t) = -\frac{16}{3}\frac{Ea^2b^2h}{\pi^2(a^2+b^2)^2}f^2(t) \qquad (5)$$

С начальными условиями

$$f(t)\big|_{t=0} = C, \quad f'(t)\big|_{t=0} = \chi C \qquad (6)$$

где

$$\omega^2 = \frac{D\pi^4(a^2+b^2)^2}{\rho h a^4 b^4}, \quad \gamma = \frac{512E}{9\rho(a^2+b^2)^2}. \qquad (7)$$

ω - первая (наименьшая) частота собственных колебаний пластинки.

Уравнение (4) подстановкой $f'(t) = y$ и $f''(t) = y dy/dt$ с учетом условий (6) приводится к виду :

$$f'(t) = \sqrt{\chi^2 C^2 + \omega^2 C^2 + \frac{\gamma}{2} C^4 - \omega^2 f^2 - \frac{\gamma}{2} f^4} \tag{8}$$

Решение этого уравнения с использованием эллиптических интегралов представляется в виде [2]

$$t = \pm \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{k}{\delta_1} \left(F(k,\alpha) - F(k,\alpha_0) \right) \tag{9}$$

где

$$F(k,\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}),$$

$$k = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \quad (0 < k < 1), \quad \delta_{1,2} = \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\sqrt{1 + 2\frac{C_1 \gamma}{\omega^4}} \pm 1}$$

$$C_1 = \chi^2 C + \omega^2 C^2 + \frac{\gamma}{2} C^4, \quad \alpha_0 = \arccos \frac{C}{\delta_1},$$

$$f(t) = \delta_1 \cos\alpha \tag{10}$$

При заданных значениях параметров C, χ и времени t из уравнения (9), с помощью таблиц эллиптических интегралов [3], можно определить параметр α, а из (10) - значение $f(t)$. Соответствующие значения $\Psi(t)$, w и ϕ определятся из (5) и (3).

Рассматривается задача определения допустимого из условия прочности значения максимального начального возмущения (C или χC).

Условие прочности пластинки принимается в виде

$$\Pi(\sigma_i) = \frac{1}{[\sigma]} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{1/2} \le 1 \tag{11}$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение материала пластинки ; σ_1, σ_2 - главные напряжения, определяемые по известным формулам через напряжения по главным геометрическим направлениям пластинки σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}, которые, в свою очередь, определяются по формулам обощенного закона Гука через деформации

$$e_{xx} = \frac{1}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{Eh} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_{yy} = -\frac{\nu}{Eh}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{1}{Eh}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad e_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Наибольшее значение допустимого максимального начального возмущения (C или χC) определяется из условия

$$\max_{t,x,y,z}\Pi(\sigma_i) = 1 \tag{12}$$

Очевидно, что наибольшее по времени значение $\Pi(\sigma_i)$ будет достигнуто в то время, когда прогибы примут наибольшее значение, т.е. при условии

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \tag{13}$$

откуда, с учетом (8), определяется наибольшее значение амплитуды колебаний

$$\max_t f(t) = \left(-\frac{\omega^2}{\gamma} - \left(\frac{\omega^4}{\gamma} + C^4 + \frac{2(\omega^2+\gamma^2)}{\gamma^2}C^2\right)^{1/2}\right)^{1/2} \tag{14}$$

Таким образом, становится возможным определение $f_{\max}(t)$ без обращения к решению (8), связанному с определенными сложностями вычислительного характера.

Используя (14), из условия (12) при заданном значении χ определятся допустимое значение максимального начального возмущения. Задача определения допустимого из условия жесткости

$$w \le w^*$$

значения максимального начального возмущения сводится к решению уравнения

$$\max_t f(t) = w^* \tag{15}$$

где w^* - заданная величина предельного прогиба.

Здесь очевидно, что

$$\max_{x,y} w(x,y,t) = w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},t\right) = f(t)$$

Из уравнения (15), с использованием (14), получается выражение для определения допустимого значения максимального начального возмущения

$$C = \left(\frac{\omega^2+\chi^2}{\gamma}\left(\left(1+\frac{\gamma^2}{(\omega^2+\chi^2)^2}w^{*4} + \frac{2\omega^2\gamma}{(\omega^2+\chi^2)^2}w^{*2}\right)^{1/2} - 1\right)\right)^{1/2} \tag{16}$$

Здесь необходимо также произвести проверку выполнения условия прочности пластинки (11).

Произведены числовые расчеты для материала пластинки со следующими характеристиками :

$$[\sigma]=0{,}4\cdot 10^{-2}\frac{E}{1-\nu^2},\quad \nu=0{,}3$$

В табл. 1 приведены допустимые из условия прочности приведенные значения максимального начального возмущения $\overline{C}=C/h$ или $\overline{\chi}\overline{C}$ ($\overline{\chi}=\chi(12\rho a^4/(1-\nu^2)h^2\pi^4 E)^{1/2}$) при $\overline{\chi}=0{,}1,\infty$ для $\overline{h}=h/b=$ $=0{,}02$ и различных значений отношения сторон пластинки a/b.

Здесь $\overline{\chi}=0$ соответствует отсутствию начальной скорости ($\chi C=0$), а формально принятое $\overline{\chi}=\infty$ соответствует отсутствию начального прогиба ($C=0$).

Таблица 1

a/b	$\overline{\chi}=0$	$\overline{\chi}=1$	$\overline{\chi}=\infty$
	$\overline{C}$		$\overline{\chi}\overline{C}$
0.5	0,53	0,41	0,67
1	1,17	1,09	2,65
1.5	1,66	1,62	6,39
2	1,94	1,92	11,10

В табл.2 приведены допустимые из условия жесткости приведенные значения максимального начального возмущения $\overline{C}$ или $\overline{\chi}C$ при $\overline{\chi}=1,\ \infty$, различных значениях приведенного предельного прогиба $\overline{w}^*=\overline{w}/h$, для $\overline{h}=0{,}01$ и различных значений a/b

Случай $\overline{\chi}=0$, т. е. отсутствие начальной скорости, не рассмотрен, так как при этом значение начального прогиба и заданного предельного прогиба совпадают.

Для полученных результатов проведена проверка выполнения условия прочности. Приведенные в табл. 2 значения, соответствующие нарушению условия прочности, взяты в скобки

Таблица 2

a/b	$\overline{C}$ ($\overline{\chi}=1$)				$\overline{\chi}\overline{C}$ ($\overline{\chi}=\infty$)			
	$\overline{w}^*$							
	1	2	3	4	1	2	3	4
0.5	0,80	(1,68)	(2,65)	(3,67)	1,30	(2,89)	(4,94)	(7,59)
1	0,92	1,91	2,92	(3,93)	2,19	5,36	10,0	(16,3)
1.5	0,96	1,96	2,96	3,97	3,48	8,17	14,8	23,7
2	0,98	1,98	2,97	3,98	5,20	11,50	19,8	30,4

Как видно из табл. 2, некоторые значения допустимых из условия жесткости максимальных начальных возмущений не приемлемы, так как не удовлетворяют условиям прочности пластинки.

2. Рассматривается случай ортотропной пластинки, когда она изготовлена из монослоев КМ, уложенных под углом $\pm\varphi$ к оси $0x$ пластинки.

Ставится задача оптимального выбора угла укладки φ монослоев КМ, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное начальное возмущение пластинки при ее колебаниях.

Начальные условия принимаются в виде (2).

Выбирая функции прогибов и усилий в виде (3) и подставляя их в систему дифференциальных уравнений гибкой ортотропной пластинки [4]

$$
\begin{gathered}
D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\\
-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (17)\\
a_{11}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2=0
\end{gathered}
$$

в начальные условия (2) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина к системе (12), для определения функции $f(t)$ получается уравнение (4) с начальными условиями (6), а для функции $\Psi(t)$ выражение

$$\Psi(t)=-\frac{16}{3}\frac{a}{\pi^2 b^3}\frac{f^2(t)}{a_{11}+(a_{66}-2a_{12})\frac{a^2}{b^2}+a_{22}\frac{a^4}{b^4}} \qquad (18)$$

Уравнениям (4), (17) и (18) соответствуют обозначения

$$
\begin{gathered}
D_{ik}=B_{ik}h^3/12,\quad C_{ik}=B_{ik}h,\quad a_{ik}=C_{ik}/(C_{11}C_{22}-C_{12})^2 \qquad (19)\\
\omega^2=\frac{\pi^4}{a^4\rho h}\left(D_{11}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{a^2}{b^2}+D_{22}\frac{a^4}{b^4}\right)\\
\gamma=\frac{512}{9b^4\rho h}\frac{1}{a_{11}+(a_{66}-2a_{12})\frac{a^2}{b^2}+a_{22}\frac{a^4}{b^4}}
\end{gathered}
$$

B_{ik} - характеристики упругости монослоя КМ по главным геометрическим направлениям пластинки, которые выражаются через характеристики упругости КМ по ее главным физическим направлениям B_{ik}^0 по известным формулам поворота [4].

Условие прочности принимается в виде [5]

$$\Pi(\sigma_{ik}) = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \le 1 \tag{20}$$

где σ_{B1}, σ_{B2}, τ_{B0} прочностные характеристики КМ.

Напряжения σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} по главным физическим направлениям пластинки определяются по формулам :

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{12}, \quad \sigma_{22} = B_{12}^0 e_{11} + B_{22}^0 e_{22}, \quad \sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12}$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} деформации пластинки по тем же направлениям, выражаемые через деформации e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} по главным геометрическим направлениям, которые определяются по формулам

$$e_{xx} = a_{22}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - a_{12}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_{yy} = -a_{12}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + a_{11}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{xy} = -a_{66}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Наибольшее значение допустимого максимального начального возмущения (C или χC) в зависимости от угла φ определяется из условия

$$\max_{t,x,y}\Pi(\sigma_{ik}) = 1 \tag{21}$$

Как и в случае изотропной пластинки, наибольшее по времени значение $\Pi(\sigma_{ik})$ будет достигнуто при максимальном значении амплитуды колебаний $\max_t f(t)$, которое определяется по формуле (14). Соответственно по формулам (18) и (3) определятся функции прогибов w и усилий ϕ.

Далее, из условия (21) определится значение максимального возмущения C в зависимости от параметра φ. Наибольшее по φ значение C будет соответствовать оптимальному проекту пластинки.

Задача определения оптимального угла укладки φ, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия жесткости максимальное начальное возмущение пластинки, сводится к нахождению $\max C$, где для C, как и в случае изотропной пластинки, получается выражение (16).

Для полученного наибольшего значения начального максимального возмущения производится проверка условия прочности (20).

Числовые расчеты произведены для КМ СВАМ 5 : 1 со следующими характеристиками :

$$B_{22}^0 = 0{,}62 B_{11}^0,\quad B_{12}^0 = 0{,}12 B_{11}^0,\quad B_{66}^0 = 0{,}16 B_{11}^0$$

$$\sigma_{B1} = 1{,}89 \cdot 10^{-2} B_{11}^0,\quad \sigma_{B2} = 0{,}77 \cdot 10^{-2} B_{11}^0,\quad \tau_{B0} = 0{,}5 \cdot 10^{-2} B_{11}^0$$

В табл. 3 приведены допустимые из условия прочности наибольшие приведенные значения максимального начального возмущения $\overline{C} = C/h$ или $\overline{\chi}\overline{C}(\overline{\chi} = \chi(12\rho a^4/\pi^4 B_{11}^0 h^2)^{1/2})$ при $\overline{\chi} = 0{,}1,\infty$ для $\overline{h} = h/b = 0{,}02$ и различных значений a/b.

В табл. 4 приведены допустимые из условия жесткости наибольшие приведенные значения $\overline{C}$ или $\overline{\chi}\overline{C}$ и соответствующие углы φ при $\overline{\chi} = 1,\infty$, различных значениях приведенного предельного прогиба $\overline{w}^* = w^*/h$ для $\overline{h} = 0{,}01$ и различных значений a/b.

Таблица 3

a/b	$\overline{\chi}=0$		$\overline{\chi}=1$		$\overline{\chi}=\infty$	
	$\overline{C}$	φ^0	$\overline{C}$	φ^0	$\overline{\chi}\overline{C}$	φ^0
0,5	1,80	0	1,41	0	2,18	0
1	3,29	0,90	3,15	0.90	9,05	45
2	5,13	90	5,10	90	38,8	30

Таблица 4

$\overline{\chi}$	a/b	$\overline{w}^*=1$		$\overline{w}^*=2$		$\overline{w}^*=3$		$\overline{w}^*=4$	
		$\overline{C}$	φ°	$\overline{C}$	φ°	$\overline{C}$	φ°	$\overline{C}$	φ°
1	0,5	0,76	20	1.60	25	2,55	60	3,57	60
1	1	0,90	45	1,89	45	2,91	45	3,92	45
1	2	0.98	70	1,97	60	2,97	30	3,97	30
χ		$\overline{\chi}\overline{C}$	φ°	$\overline{\chi}\overline{C}$	φ°	$\overline{\chi}\overline{C}$	φ°	$\overline{\chi}\overline{C}$	φ°
∞	0,5	1,15	15	2,50	25	4,21	30	6,53	60
∞	1	1,98	45	4,90	45	9,22	45	15,1	45
∞	2	4,61	75	10,0	65	16,8	60	26,1	30

Как показывают расчеты, при ограничении на прочность значения начальных возмущений, приведенные в табл. 3 для оптимальных проектов пластинки, оказывается существенно больше (от 7% до 40%) по сравнению с невыгодными проектами. В случае ограничения на жесткость влияние угла φ на величину начальных возмущений (таблица 4) оказывается несущественной (до 5%).

Следует отметить, что все результаты, приведенные в табл. 4, удовлетворяют условию прочности пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М. : Гостехтеориздат, 1956. 419 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. - М. : Наука, 1966. 800 с.
3. Янке Е., Эмде С., Леш Ф. Специальные функции. - М. : Наука, 1968.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М. : Наука, 1967. 534 с.
5. Баженов З.А., Гольденблат И.И. и др. Сопротивление стеклопластиков. - М. : Машгиз, 1968.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 15.05.1996