

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В
 БЕСКОНЕЧНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ ПРИ
 НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.

Հ.Ե. Գասպարյան, Ա.Ա. Խաչատրյան
 Միաչափ ալիքների տարածումը անվերջ միկրոպոլար միջավայրում
 մագնիսական դաշտի հաշվառմամբ

Ուսումնասիրվում է մագնիսամիկրոպոլար ալիքների տարածումը, նրանց արագությունների կախվածությունը հաճախականությունից և արտաքին մագնիսական դաշտից:

A.E.Gasparian, A.A.Khachatryan
 Propagation one-dimensional wave in the infinitiv micropolar continuum
 with the magnetic field

Исследуется процесс распространения магнитомикрополярных волн, поведение их скоростей в зависимости от частоты и напряженности внешнего магнитного поля.

Уравнения, описывающие волновой процесс в магнитомикрополярной идеально-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля, имеют вид [1]

$$(c_1^2 + c_3^2) \text{grad div } \bar{U} - (c_2^2 + c_3^2) \text{rot rot } \bar{U} + c_3^2 \text{rot } \bar{\varphi} + \frac{1}{\rho} \bar{F}^{(e)} = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$(c_4^2 + c_5^2) \text{grad div } \bar{\varphi} - c_4^2 \text{rot rot } \bar{\varphi} + \omega_0^2 \text{rot } \bar{U} - 2\omega_0^2 \bar{\varphi} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} \quad (2)$$

где

$$c_1^2 = \frac{1}{\rho}(\lambda + 2\mu), c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, c_3^2 = \frac{\chi}{\rho}, c_4^2 = \frac{\gamma}{J\rho}, c_5^2 = \frac{\alpha + \beta}{J\rho}$$

$$\omega_0^2 = \frac{\chi}{J\rho} = \frac{c_3^2}{J}, \bar{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot rot } (\bar{U} \times \bar{H}_0)] \times \bar{H}_0 \quad (3)$$

Здесь \bar{U} - вектор смещения; $\bar{\varphi}$ - вектор микрополярного вращения; $\bar{F}^{(e)}$ - объемная сила электромагнитного происхождения (пондеромоторная сила); λ и μ - коэффициенты Ляме; ρ - плотность материала; χ, α, β и

γ -дополнительные упругие коэффициенты изотропной микрополярирной упругости; J -динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении); \vec{H}_0 -вектор напряженности внешнего магнитного поля.

Исследования простейшего типа волн сразу же выясняют существенные черты распространения магнитомикрополярирных волн, их характер, скорость распространения, дисперсию и затухание. Характер распространения волн легче всего проследить на примере монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси Ox_1 .

Предполагая, что в уравнениях (1) и (2) функции \vec{U} и $\vec{\varphi}$ зависят только от $x_1 \equiv x$ и t , получим систему уравнений для компонентов вектора смещения и вектора микрополярирного вращения

$$\begin{aligned} (c_1^2 + c_3^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F_1^{(e)} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (c_2^2 + c_3^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - c_3^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho} F_2^{(e)} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ (c_2^2 + c_3^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_3^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} F_3^{(e)} &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad c_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - c_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial x} - 2\omega_0^2 \varphi_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\ c_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + c_3^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - 2\omega_0^2 \varphi_3 &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}, \quad (c_4^2 + c_5^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - 2\omega_0^2 \varphi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $F_1^{(e)}$, $F_2^{(e)}$ и $F_3^{(e)}$ определяются из последнего соотношения (3) в виде

$$\begin{aligned} F_1^{(e)} &= (H_{20}^2 + H_{30}^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - H_{10} H_{20} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - H_{10} H_{30} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ F_2^{(e)} &= H_{10}^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - H_{10} H_{20} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad F_3^{(e)} = H_{10}^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - H_{10} H_{30} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

В зависимости от направления напряженности внешнего магнитного поля возможны следующих два варианта, когда система уравнений (4) упрощается

$$a) H_{10} = 0, \quad H_{20} \neq 0, \quad H_{30} \neq 0$$

Тогда

$$F_1^{(e)} = (H_{20}^2 + H_{30}^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad F_2^{(e)} = F_3^{(e)} = 0 \quad (6)$$

$$b) H_{10} \neq 0, \quad H_{20} = H_{30} = 0$$

$$\text{Тогда } F_1^{(e)} = 0, \quad F_2^{(e)} = H_{10}^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad F_3^{(e)} = H_{10}^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \quad (7)$$

1. Отметим, что в случае а) в системе (4) от второго по пятое уравнения не зависят от напряженности внешнего магнитного поля и это исследовано в работах [2,3], поэтому здесь их рассматривать не будем.

Что же касается первого уравнения, то оно в силу (6) приводится к виду

$$(c_1^2 + c_3^2 + v_A^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad v_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho} (H_{20}^2 + H_{30}^2) \quad (1.1)$$

Решения уравнения (1.1) ищем в виде

$$u_1(x, t) = A \exp[ik(x - vt)] \quad (1.2)$$

где $k = 2\pi/l$, l — длина волны, получим следующую фазовую скорость для распространяющейся волны:

$$v_1^2 = c_1^2 + c_3^2 + v_A^2 \quad (1.3)$$

которая совпадает с фазовой скоростью продольной магнитоупругой волны при $\chi = 0$ ($c_2^2 = 0$). Эти волны подобны классическим волнам без вращения и распространяются без дисперсии.

Последнее уравнение системы (4) описывает процесс распространения волн продольного микровращения [2]. В нем отсутствует напряженность магнитного поля. Скорость этих волн (v_2) зависит от волнового числа k

$$v_2^2 = c_4^2 + c_5^2 + 2\omega_0^2/k^2 \quad (1.4)$$

следовательно, распространяющиеся волны обладают дисперсией. Здесь, введя угловую частоту $\omega_i = kv_i$, фазовую скорость v_2 (1.4) можно представить в следующем виде:

$$v_2^2 = (c_4^2 + c_5^2) \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} \quad (1.5)$$

В случае б), подставляя (1.2) в первое уравнение системы (4), получим волны продольного смещения [2] с фазовой скоростью

$$v_1^2 = c_1^2 + c_3^2 \quad (1.6)$$

распространяющиеся без дисперсии.

Учитывая (7) для определения функций $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ и $\varphi_3(x, t)$ из системы (4) будем иметь

$$\begin{aligned} (c_2^2 + c_3^2 + v_A^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - c_3^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (c_2^2 + c_3^2 + v_A^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c_3^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ c_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - c_5^2 \frac{\partial u_3}{\partial x} - 2\omega_0^2 \varphi_2 &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \quad c_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + c_5^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - 2\omega_0^2 \varphi_3 = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \quad (1.7) \\ v_A^2 &= \frac{1}{4\pi\rho} H_{10}^2 \end{aligned}$$

Монохроматические волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Ox_1 , имеют следующий вид:

$$(u_2, u_3, \varphi_2, \varphi_3) = (u_{20}, u_{30}, \varphi_{20}, \varphi_{30}) \exp [ik(x - vt)] \quad (1.8)$$

где $u_{20}, u_{30}, \varphi_{20}$ и φ_{30} - постоянные.

Подставляя (1.8) в (1.7), получим следующее дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости распространения этих волн

$$Av^4 - Bv^2 + C = 0 \quad (1.9)$$

где $A = 1 - 2\omega_0^2 / \omega^2$, $C = c_4^2 (c_2^2 + c_3^2 + v_A^2)$

$$B = c_4^2 + (c_2^2 + v_A^2)(1 - 2\omega_0^2 / \omega^2) + c_3^2(1 - \omega_0^2 / \omega^2)$$

Дисперсионное уравнение (1.9) при произвольном значении ω имеет два корня:

$$v_3^2 = \frac{\omega^2}{2(\omega^2 - 2\omega_0^2)} [c_4^2 + (c_2^2 + v_A^2)(1 - 2\omega_0^2 / \omega^2) + c_3^2(1 - \omega_0^2 / \omega^2) + \sqrt{D}] \quad (1.10)$$

$$v_4^2 = \frac{\omega^2}{2(\omega^2 - 2\omega_0^2)} [c_4^2 + (c_2^2 + v_A^2)(1 - 2\omega_0^2 / \omega^2) + c_3^2(1 - \omega_0^2 / \omega^2) - \sqrt{D}] \quad (1.11)$$

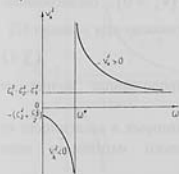
где дискриминант D всегда положителен и имеет следующий вид:

$$D = [c_4^2 - c_2^2 - c_3^2 - v_A^2 + 2\omega_0^2(c_2^2 + v_A^2 + c_3^2 / 2) / \omega^2]^2 + 4c_3^2 c_4^2 \omega_0^2 / \omega^2 \quad (1.12)$$

Таким образом, в бесконечной магнитомикрополяриной, как и в микрополяриной средах, существуют монохроматические волны, которые распространяются с четырьмя различными скоростями (v_1, v_2, v_3, v_4).

2 Как видно из (1.4) и (1.6), скорости v_1 и v_2 не зависят от напряженности внешнего магнитного поля и они рассмотрены в работе [2]. В этом пункте будем исследовать поведение скоростей волн v_3 и v_4 в зависимости от величины напряженности внешнего магнитного поля и частоты ω при условии

$$\frac{1}{4\pi\rho} H_{10}^2 = v_A^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} [c_4^2 - c_2^2 - c_3^2 + \omega_0^2(2c_2^2 + c_3^2) / \omega^2] \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Очевидно, что условие (2.1) имеет смысл при $\omega > \omega^* = \sqrt{2}\omega_0$. Это означает, что $\omega = \omega^*$ является критической частотой для распространения альфвеновских волн. Схематический график зависимости v_A^2 от ω приведен на фиг. 1.

Таким образом, если напряженность внешнего постоянного магнитного поля удовлетворяет условию (2.1), при $\omega > \omega^*$ в маг-

интомикрополяриной среде альфвеновская волна распространяется со скоростью $v_A^2 = H_{10}^2 / 4\pi\rho$, причем $v_A^2(\omega \rightarrow \infty) = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2$.

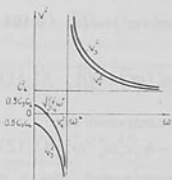
Из (1.12) с учетом (2.1) получим

$$D = 4c_1^2 c_4^2 \omega_0^2 / \omega^2 \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) и (2.2) для v_3^2 и v_4^2 из (1.10) и (1.11) будем иметь

$$v_3^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} (c_4^2 + c_1 c_4 \omega_0^2 / \omega^2) \quad (2.3)$$

$$v_4^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} (c_4^2 - c_1 c_4 \omega_0^2 / \omega^2) \quad (2.4)$$



Фиг. 2

Схематический график зависимости v_3^2 и v_4^2 от ω приведен на фиг. 2.

Здесь очевидно, что в промежутке $0 < \omega < \omega^*$ $v_3^2 < 0$; в промежутке

$0 \leq \omega \leq \omega^* \sqrt{c_1 / 2c_4} < \omega^*$ $v_4^2 > 0$, а в промежутке $\omega^* \sqrt{c_1 / 2c_4} < \omega < \omega^*$ $v_4^2 < 0$.

Поскольку условие (2.1) имеет смысл при $\omega > \omega^*$, следует, что скорости v_3 и v_4 будут существовать только при $\omega > \omega^*$.

Таким образом, при условии (2.1) в микрополяриной среде могут распространяться волны поперечного смещения v_3 и волны поперечного микровращения v_4 при $\omega > \omega^*$. При $\omega \rightarrow \infty$ скорости этих волн стремятся к одной и той же скорости c_4 .

3. Рассмотрим поведение скоростей волн v_3 и v_4 в зависимости от частоты ω с учетом напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

Если в (1.10) и (1.11) подставим $H_0 = 0$ ($v_A^2 = 0$), согласованное решение для v_3 и v_4 (то есть $v_3 > v_4$) будет возможно при условии [2]

$$c_4^2 \geq c_2^2 + c_1^2 \quad (3.1)$$

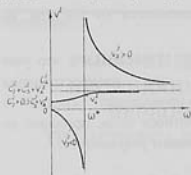
При нарушении условия (3.1) микрополяриные волны не существуют.

Ниже будем рассматривать случаи, при которых в зависимости от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля возможны согласованные решения для v_3 и v_4 .

1) При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho < c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 \quad (3.2)$$

анализ решений (1.11) показывает, что $(v_4^2)_{\omega} > 0$. Качественный вид зависимости для v_3^2 и v_4^2 от частоты ω приведен на фиг.3.



Фиг.3

Здесь при отсутствии магнитного поля ($v_A^2 = 0$), приведенные результаты совпадают с результатами, полученными в работе [2].

2) При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 \quad (3.3)$$

из (1.11) имеем $(v_4^2)_{\omega} > 0$. Схематический график зависимостей v_3^2 и v_4^2 от ω аналогичен фиг.3, но с той разницей, что скорости распространения волны v_3^2 и v_4^2 при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к одному и

тому же пределу $(c_2^2 + c_1^2 + v_A^2)$.

3) При условии

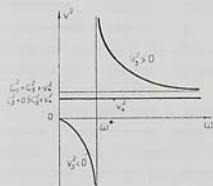
$$c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 < H_{01}^2 / 4\pi\rho < c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 / 2 \quad (3.4)$$

схематический график зависимостей v_3^2 и v_4^2 от частоты ω тоже аналогичен фиг.3, поэтому здесь не приводится.

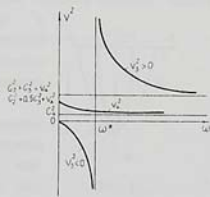
4) При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 / 2 \quad (3.5)$$

из (1.11) имеем $(v_4^2)_{\omega} = 0$, то есть волна распространяется с постоянной скоростью v_4 и схематический график зависимостей v_3^2 и v_4^2 от ω приведен на фиг.4.



Фиг.4



Фиг.5

5) При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho > c_4^2 - c_2^2 - c_3^2/2 \quad (3.6)$$

из (1.11) следует, что $(v_4^2)_{\omega} < 0$. Это означает, что имеем качественно новый схематический график для v_4^2 в зависимости от частоты ω (фиг. 5).

Таким образом, анализ решений (1.10) и (1.11) показывает, что учет внешнего постоянного магнитного поля при распространении магнитомикрополярных волн в идеально проводящих средах в зависимости от величины напряженности магнитного поля, приводит не только к количественным, но и к качественно новым результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. and Nowacki W. Wave-type Equations of Thermo-Magneto-Mikroelasticity-Bull. Acad. Polon. ser. sci. Techn., 13(1970), 155[277].
2. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение Т.2. М.: Мир, 1975, с.646-751.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
20.04.1993