ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ, УСИЛЕННЫМИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМИ НАКЛАДКАМИ

Григорян Э. Х.

Է. Խ. Գրիգորյան

Կոնտակտային լարումների եզակիության գործակիցների մասին, կտոր-առ-կտոր համասեռ վերադիրներով ուժեղացված առաձգական մարմինների վերաբերյալ խնդիրներում

Աշխատանքում դիտարկվում է հակահարթ խնդիր առաձգական կիսատարածության վերաբերյալ, որի եզրային մակերևույթի վրա գտնվում է նրա հետ ամրակցված կտոր-առ-կտոր համասեռ անվերջ շերտ: Շերտը կազմված է երկու տարբեր հատկություններով օժտված կիսաանվերջ շերտերից: Որոշվում են բարակապատ շերտի և կիսատարածության կոնտակտի տեղամասում գործող կոնտակտային լարումների եզակիության գործակիցները, ինչպես նաև երկու կիսաանվերջ շերտերի միացման տեղամասի կոնտակտային լարումների եզակիության գործակիցը:

E. K.Grigorian

About Coefficients of Singularity of Contact Stresses in Problems for Elastic Bodyes Reinforced with Partly-homogeneous Stiffeners

В работе рассматривается антиплоская задача для упругого полупространства, на граничной поверхности которого находится сцепленный с ним кусочно-однородный бесконечный слой. Слой состоит из двух полубесконечных слоев с различными упругими свойствами. Полупространство и слой деформируются под действием сил, приложенных на граничной поверхности слоя. Определяются коэффициенты особенности контактных напряжений, действующих на участке контакта тонкостенного слоя с полупространством, а также коэффициент особенности контактных напряжений, действующих на участке контакта между полубесконечными слоями.

В работе рассматривается антиплоская задача для упругого полупространства, на граничной поверхности которого находится сцепленный с ним кусочно-однородный бесконечный слой. Слой состоит из двух полубесконечных слоев с различными упругими свойствами. Полупространство и слой деформируются под действием сил, приложенных на граничной поверхности слоя. Предлагается метод решения поставленной задачи, который допускает получить решение задачи для тонкостенного слоя. Кроме того, определяются коэффициенты особенности контактных напряжений, действующих на участке контакта слоя с полупространством, а также коэффициент особенности контактных напряжений, действующих на участке контакта между полубесконечными слоями.

Решены многие задачи теории упругости для массивных тел в виде упругих полуплоскостей, полосы, клина, полупространства с тонкими покрытиями или, как принято говорить, накладками. Во всех этих задачах относительно накладки принимается гипотеза об одномерном континууме, заключающаяся в том, что при деформации толщина накладки считается неизменяемой, а напряженное состояние одноосным. После принятой гипотезы задачи значительно упрощаются и поддаются эффективному решению, а результаты считаются достаточно достоверными. Но когда накладка имеет края, несмотря на вышесказанное, возникают некоторые вопросы, требующие объяснения. Например, рассмотрим задачу для упругой полуплоскости, усиленной полубесконечной накладкой [1,2]. Здесь после принятой гипотезы об одномерном континууме, контактные напряжения в концевой точке накладки имеют корневую особенность, а в точной постановке показатель особенности должен зависеть от упругих констант материалов накладки и полуплоскости. Это говорит о том, что после принятия гипотезы, решение задачи в некоторой окрестности концевой точки накладки не соответствует истине. Поэтому нет смысла, после принятия гипотезы, говорить о коэффициенте особенности контактных напряжений. Поэтому возникает вопрос определения контактных напряжений в окресности концевой точки, при этом используя решение полученного после принятия гипотезы. Этому вопросу посвящена работа [3], где на примере антиплоской задачи для полупространства с полубесконечным слоем дается ответ поднятых выше вопросов.

Аналогичный вопрос возникает и в том случае, когда накладка кусочно-однородна. Здесь в точной постановке в точке соединения накладок контактные напряжения имеют особенность, показатель которой зависит от упругих констант материалов накладки и упругой полуплоскости, а в случае гипотезы - логарифмическую особенность [4]. Здесь опять возникает вопрос определения контактных напряжений в окрестности точки соединения накладок, при этом используя полученное решение после принятия гипотезы об одномерном континууме. Ответы на обсуждаемые вопросы будут даны ниже, на примере антиплоской задачи для упругого полупространства, граничная поверхность которого усилена бесконечным кусочно-однородным слоем.

Рассмотрим антиплоскую задачу для упругого полупространства, на граничной поверхности которого находится сцепленный с ним бесконечный слой. Слой состоит из двух полубесконечных слоев с различными упругими свойствами. Полупространство и слой деформируются под действием сил, приложенных на граничной поверхности слоя. Поставленная задача формулируется в виде следующих граничных задач для кусочно-однородного слоя и полупространства :

$$\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2}=0, \quad -h<y<0, \quad -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

$$\mu^-\frac{\partial W_s}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\tau(x), \quad \mu^-\frac{\partial W_s}{\partial y}\bigg|_{y=-h}=-f(x), \quad -\infty<x<0, \tag{2}$$

$$\mu^+\frac{\partial W_s}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\tau(x), \quad \mu^+\frac{\partial W_s}{\partial y}\bigg|_{y=-h}=-f(x), \quad 0<x<\infty, \tag{3}$$

$$\mu^-\frac{\partial W_s}{\partial x}\bigg|_{x=-0}=\mu+\frac{\partial W_s}{\partial x}\bigg|_{x=+0} \quad W_s(-0,y)=W_s(+0,y) \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0, \quad 0<y<\infty, \quad -\infty<x<\infty, \tag{5}$$

$$\mu\frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\tau(x), \quad -\infty<x<\infty \tag{6}$$

$$W(x,+0)=W_s(x,-0), \quad -\infty<x<\infty \tag{7}$$

Здесь $W_s(x,y)$ - перемещения точек кусочно-однородного бесконечного слоя по направлению оси z, $\tau(x)$ - контактные напряжения, $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ - интенсивность сил, действующих на слое, μ^-,μ^+, - модули сдвига слоя соответственно при $x<0$ и $x>0$, $W(x,y)$ - перемещения точек полупространства по направлению $z;\mu$ модуль сдвига упругого полупространства, h - толщина слоя.

Для решения граничной задачи (1), (2), (3) введем функции

$$W_s(x,y)=W_s^+(x,y)+W_s^-(x,y), \quad W_s^\pm(x,y)=\Theta(\pm x)W_s(x,y),$$

$$\tau(x)=\tau^+(x)+\tau^-(x), \quad \tau^\pm(x)=\Theta(\pm x)\tau(x),$$

$$f(x)=f^+(x)+f^-(x), \quad f^\pm(x)=\Theta(\pm x)f(x),$$

где $\Theta(x)$ - функция Хевисайда.

Очевидно, что $W_s^{\pm}(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) при $x>0$ и $x<0$ соответственно. Теперь, применив к (1) действительное преобразование Фурье, для $\overline{W}_s^{\pm}(\sigma,y)$ получим

$$\frac{d^2\overline{W}_s^{\pm}(\sigma,y)}{dy^2}-\sigma^2\overline{W}_s^{\pm}(\sigma,y)=\pm\frac{\partial W_s}{\partial x}\Big|_{x=\pm0}\mp i\sigma W_s(\pm0,y) \tag{8}$$

где

$$\overline{W}_s^{+}(\sigma,y)=\int_0^{\infty}W_s(x,y)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{W}_s^{-}(\sigma,y)=\int_{-\infty}^{0}W_s(x,y)e^{i\sigma x}dx,$$

$(-\infty<\sigma<\infty)$

Далее введем функции [5]

$$\overline{\Phi}(\sigma,y)=\overline{W}_s^{+}(\sigma,y)+\overline{W}_s^{+}(-\sigma,y),$$

$$\overline{\Psi}(\sigma,y)=\overline{W}_s^{-}(\sigma,y)+\overline{W}_s^{-}(-\sigma,y)$$

Сначала рассмотрим функцию $\overline{\Phi}(\sigma,y)$. Согласно (3) и (8) для $\overline{\Phi}(\sigma,y)$ будем иметь

$$\frac{d^2\overline{\Phi}(\sigma,y)}{dy^2}-\sigma^2\overline{\Phi}(\sigma,y)=2\frac{\partial W_s(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=+0} \tag{9}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned}&\frac{d\overline{\Phi}(\sigma,y)}{dy}\Big|_{y=0}=-\frac{1}{\mu^+}\left(\bar\tau^+(\sigma)+\bar\tau^+(-\sigma)\right),\\ &\frac{d\overline{\Phi}(\sigma,y)}{dy}\Big|_{y=-h}=\frac{1}{\mu^+}\left(\bar f^+(\sigma)+\bar f^+(-\sigma)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

Решение граничной задачи (9), (10) при y = 0 имеет вид

$$\overline{\Phi}(\sigma,0)=-\frac{\mathrm{cth}(\sigma h)}{\mu^+\sigma}\bar\tau^+(\sigma)-\frac{\mathrm{cth}(\sigma h)}{\mu^+\sigma}\bar\tau^+(-\sigma)-$$

$$-\frac{1}{\sigma\mathrm{sh}(\sigma h)}\int_{-h}^{0}\mathrm{ch}\left[|\sigma|(h+\eta)\right]g_1(\eta)d\eta+\bar f_1(\sigma),$$

где

$$\bar f_1(\sigma)=\frac{1}{\mu^+}\frac{\bar f^+(\sigma)+\bar f^+(-\sigma)}{\sigma\mathrm{sh}(\sigma h)},\quad g_1(y)=2\frac{\partial W_s}{\partial x}\Big|_{x=+0}$$

Далее, разрешив граничную задачу (5), (6) для трансформанты Фурье функции $W(x,0)$, получим

$$\overline{W}(\sigma,0)=\overline{W}^+(\sigma,0)+\overline{W}^-(\sigma,0)=\frac{1}{\mu|\sigma|}\left(\bar\tau^+(\sigma)+\bar\tau^-(\sigma)\right) \tag{11}$$

Тогда, учитывая условие контакта (7), получим

$$\overline{W}^{+}(-\sigma,0)-\overline{W}^{-}(\sigma,0)=-\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}-$$

$$-\frac{1}{\mu|\sigma|}\overline{\tau}^{-}(\sigma)-\frac{\operatorname{cth}(\sigma h)}{\mu^{+}\sigma}\overline{\tau}^{+}(-\sigma)+\bar{f}_1(\sigma)- \tag{12}$$

$$-\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}\int_{-h}^{0}\operatorname{ch}[|\sigma|(h+\eta)]g_1(\eta)d\eta$$

Далее из (8) и граничных (4), при учете (7), будем иметь

$$-\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}\int_{-h}^{0}\operatorname{ch}[|\sigma|(h+\eta)]g(\eta)d\eta=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{-}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau(\sigma)}}{|\sigma|}+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}-\left(\frac{\bar{f}^{+}(\sigma)}{\mu^{+}}+\frac{\bar{f}^{-}(\sigma)}{\mu^{-}}\right)\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}, \tag{13}$$

где

$$g(y)=\left.\frac{\partial W_{*}}{\partial x}\right|_{x=+0}-\left.\frac{\partial W_{*}}{\partial x}\right|_{x=-0}$$

Теперь, имея в виду (13) и что (4)

$$g(y)=\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{2\mu^{-}}g_1(y)$$

окончательно из (12) получим искомое функциональное уравнение

$$\left[\overline{W}^{-}(\sigma,0)-\overline{W}^{+}(-\sigma,0)\right]\left(\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{+}+\mu^{-}}\right)=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{+}(\sigma)}{|\sigma|}+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu^{-}+\mu^{+}}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^{-}(\sigma)}{|\sigma|}+ \tag{14}$$

$$+\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{+}(\mu^{+}+\mu^{-})}\operatorname{cth}(\sigma h)\frac{\overline{\tau}^{+}(-\sigma)}{\sigma}-\overline{F}_1(\sigma)$$

где

$$\overline{F}_1(\sigma)=\left(\frac{1}{\mu^{+}}\bar{f}^{+}(\sigma)+\frac{2}{\mu^{+}+\mu^{-}}\bar{f}^{-}(\sigma)+\frac{\mu^{+}-\mu^{-}}{\mu^{+}(\mu^{+}+\mu^{-})}\bar{f}^{+}(-\sigma)\right)\frac{1}{\sigma\operatorname{sh}(\sigma h)}$$

Использовав функцию $\overline{\Psi}(\sigma,0)$, можно аналогичным образом получить функциональное уравнение следующего вида :

$$\left[\overline{W}^{+}(\sigma,0)-\overline{W}^{-}(-\sigma,0)\right]\left(\frac{\mu^{-}-\mu^{+}}{\mu^{+}+\mu^{-}}\right)=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^{-}}\operatorname{cth}|\sigma|h\right)\frac{\overline{\tau}^{-}(\sigma)}{|\sigma|}+$$

$$+\left(\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu^-+\mu^+}\operatorname{cth}(|\sigma|h)\right)\frac{\overline{\tau}^+(\sigma)}{|\sigma|}+ \tag{15}$$

$$+\frac{\mu^- -\mu^+}{\mu^-(\mu^+ +\mu^-)}\operatorname{cth}(\sigma h)\frac{\overline{\tau}^-(-\sigma)}{\sigma}-\overline{F}_2(\sigma),$$

где

$$\overline{F}_2(\sigma)=\left(\frac{1}{\mu^-}\bar f^-(\sigma)+\frac{2}{\mu^+ +\mu^-}\bar f^+(\sigma)+\frac{\mu^- -\mu^+}{\mu^-(\mu^- +\mu^+)}\bar f^-(-\sigma)\right)\frac{1}{\sigma \operatorname{sh}(\sigma h)}$$

Далее продолжим следующим образом. Применив к (14), (15) обратное преобразование Фурье, после чего продифференцировав по x, в итоге получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^+}\right)\frac{1}{s-x}+\frac{\mu^- -\mu^+}{\mu^+(\mu^+ +\mu^-)}\frac{1}{s+x}\right]\tau(s)ds-$$

$$-\left(\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu^+ +\mu^-}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\tau(-s)}{s+x}ds+\frac{1}{\mu^+}\int_0^\infty r_1(x_1s)\tau(s)ds- \tag{16}$$

$$-\frac{2}{\mu^+ +\mu^-}\int_0^\infty K_1(x+s)\tau(-s)ds=\varphi(x),$$

$$\left(\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\mu^+ +\mu^-}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\tau(s)}{s+x}ds+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\mu^- -\mu^+}{\mu^-(\mu^+ +\mu^-)}\frac{1}{s+x}-\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^-}\right)\frac{1}{s-x}\right]\times$$

$$\times\tau(-s)ds-\frac{1}{\mu^-}\int_0^\infty r_2(x_1s)\tau(-s)ds+\frac{2}{\mu^+ +\mu^-}\int_0^\infty K_1(x+s)\tau(s)ds=\varphi(-x),$$

$(0<x<\infty)$

где

$$r_1(x,s)=K(s-x)+\frac{\mu^- -\mu^+}{\mu^+ +\mu^-}K(s+x)+\frac{\mu^+}{h(\mu^+ +\mu^-)},$$

$$r_2(x,s)=K(s-x)+\frac{\mu^+ -\mu^-}{\mu^+ +\mu^-}K(s+x)+\frac{\mu^-}{h(\mu^+ +\mu^-)},$$

$$K_1(x+s)=K(x+s)-\frac{1}{2h},\quad K(x)=\frac{1}{2h}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi x}{2h}\right)-\frac{1}{\pi x},$$

$$\varphi(x)=F_1(x)+\frac{1}{h(\mu^+ +\mu^-)}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)ds$$

$$\varphi(-x) = F_2'(-x) + \frac{1}{h\left(\mu^+ + \mu^-\right)} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds$$

$$F_j'(x) = \frac{dF_j(x)}{dx}, \quad j = 1{,}2.$$

Отметим, что выше использовалось условие равновесия слоя, которое записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds \tag{17}$$

Таким образом, задача свелась к решению сингулярных интегральных уравнений (16).

Для решения (16) произведем замену переменных $u = \ln s$, $v = \ln x$ в (16). После этого, применив к полученной системе уравнений комплексное преобразование Фурье, получим

$$\left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^+}\right)\mathrm{ch}\pi\alpha + \frac{\mu^- - \mu^+}{\mu^+\left(\mu^- + \mu^+\right)}\right]\overline{\tau}_1(\alpha) - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^+ + \mu^-}\right)\overline{\tau}_2(\alpha) =$$
$$= i\mathrm{sh}\pi\alpha \cdot \overline{A}(\alpha)$$
$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^+ + \mu^-}\right)\overline{\tau}_1(\alpha) - \left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^-}\right)\mathrm{ch}\pi\alpha + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^-\left(\mu^- + \mu^+\right)}\right]\overline{\tau}_2(\alpha) = \tag{18}$$
$$= i\mathrm{sh}\pi\alpha \cdot \overline{B}(\alpha)(-1 < \mathrm{Im}\alpha < -\omega)$$

где

$$\overline{A}(\alpha) = \overline{K}_2(\alpha) + \overline{R}_1(\alpha) + \overline{\varphi}_1(\alpha.), \quad \overline{B}(\alpha) = \overline{K}_1(\alpha) + \overline{R}_2(\alpha) + \overline{\varphi}_2(\alpha),$$

$$R_1(v) = -\frac{1}{\mu^+}\int_{-\infty}^{\infty} r_1\left(e^v, e^u\right)e^u\tau_1(u)du, \quad \tau_1(u) = \tau\left(e^u,\right).$$

$$R_2(v) = \frac{1}{\mu^-}\int_{-\infty}^{\infty} r_2\left(e^u, e^v\right)e^u\tau_2(u)du, \quad \tau_2(u) = \tau\left(-e^u\right)$$

$$K_1(v) = -\frac{2}{\mu^- + \mu^+}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(e^u + e^v\right)e^u\tau_1(u)du$$

$$K_2(v) = \frac{2}{\mu^- + \mu^+}\int_{-\infty}^{\infty} K_1\left(e^u + e^v\right)e^u\tau_2(u)du,$$

$$\varphi_1(u) = \varphi\left(e^u\right), \quad \varphi_2(u) = \varphi\left(-e^u\right),$$

$\alpha_1 = -i\omega$ является нулем определителя системы (18), находящейся в полосе $-1 < \mathrm{Im}\alpha < 0$, а под $\bar{t}(\alpha)$ понимается преобразование Фурье функции $t(u)$.

Причем

$$0<\omega=\frac{1}{\pi}\arccos\left(1-\frac{\mu(\mu^+-\mu^-)^2}{(\mu+\mu^+)(\mu+\mu^-)(\mu^++\mu^-)}\right)<\frac{1}{2}$$

Далее, определив из (18) $\bar{\tau}_1(\alpha)$, $\bar{\tau}_2(\alpha)$, после чего применив к ним обратное преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему Коши о вычетах, и переходя к переменным x, s, будем иметь

$$\tau(x)=\int_0^\infty R_{11}(x,s)\tau(s)ds+\int_0^\infty R_{12}(x,s)\tau(-s)ds+K^+x^{-\omega}+\Psi_1(x),$$

$$\tau(x)=\int_0^\infty R_{21}(x,s)\tau(s)ds+\int_0^\infty R_{22}(x,s)\tau(-s)ds+K^-x^{-\omega}+\Psi_2(x), \tag{19}$$

$(0<x<\infty)$

где

$$K^+=\frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^+\mu^-}{\mu(\mu^++\mu^-)+2\mu^+\mu^-}\left[\frac{\mu^+(\mu+\mu^-)}{\mu^-(\mu+\mu^+)}A(-i\omega)-B(-i\omega)\right], \tag{20}$$

$$K^-=\frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^+\mu^-}{\mu(\mu^++\mu^-)+2\mu^+\mu^-}\left[A(-i\omega)-\frac{\mu^-(\mu+\mu^+)}{\mu^+(\mu+\mu^-)}B(-i\omega)\right], \tag{21}$$

$$A(-i\omega)=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{2}{\mu^-+\mu^+}K_1(x+s)\tau(-s)-\frac{1}{\mu^+}r_1(x,s)\tau(s)\right)dsx^{\omega-1}dx+\bar{\varphi}_1(-i\omega),$$

$$B(-i\omega)=-\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{2}{\mu^-+\mu^+}K_1(x+s)\tau(s)-\frac{1}{\mu^-}r_2(x,s)\tau(-s)\right)dsx^{\omega-1}dx+\bar{\varphi}_2(-i\omega),$$

$$R_{11}(x,s)=-\frac{1}{\pi}\frac{\mu(\mu+\mu^-)(\mu^++\mu^-)}{(\mu^++\mu^-+2\mu)(2\mu^+\mu^-+\mu(\mu^++\mu^-))}\int_0^\infty T_1(x,t)r_1(s,t)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\mu}{\mu^++\mu^-+2\mu}\int_0^\infty T_2(x,t)q_1(s,t)dt,$$

$$R_{12}(x,s)=\frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^+}{(\mu^++\mu^-)\mu+2\mu^+\mu^-}\int_0^\infty T_2(x,t)q_2(s,t)dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{\mu\mu^+(\mu+\mu^-)}{(\mu^++\mu^-+2\mu)(2\mu^+\mu^-+\mu(\mu^++\mu^-))}\int_0^\infty T_1(x,t)K_1(s+t)dt,$$

$$R_{21}(x,s)=\frac{1}{\pi}\frac{\mu\mu^-}{(\mu^+ +\mu^-)\mu+2\mu^+\mu^-}\int_0^{\bar{\ }} T_2(x,t)q_3(s,t)dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{\mu\mu^-(\mu+\mu^+)}{(\mu^+ +\mu^- +2\mu)(2\mu^+\mu^- +\mu(\mu^+ +\mu^-))}\int_0^{\bar{\ }} T_1(x,t)K_1(s+t)dt,$$

$$R_{22}(x,s)=-\frac{1}{\pi}\frac{\mu(\mu+\mu^+)(\mu^+ +\mu^-)}{(\mu^+ +\mu^- +2\mu)(2\mu^+\mu^- +\mu(\mu^+ +\mu^-))}\int_0^{\bar{\ }} T_1(x,t)r_2(s,t)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\mu}{\mu^+ +\mu^- +2\mu}\int_0^{\bar{\ }} T_2(x,t)q_4(s,t)ds,$$

Интегралы, содержащие $T_1(x,t)$, понимаются в смысле главного значения по Коши.

$$T_1(x,t)=\frac{\lambda(x^{2-\omega}t^{\omega}+x^{\omega}t^{2-\omega})-2xt}{(x^2-t^2)t}$$

$$T_2(x,t)=\frac{x^{2-\omega}t^{\omega}+x^{\omega}t^{2-\omega}-2xt}{(x^2-t^2)t}$$

$$\lambda=\frac{\mu(\mu^+-\mu^-)^2}{(\mu+\mu^+)(\mu+\mu^-)(\mu^+ +\mu^-)}-1$$

$$q_1(s,t)=K(s+t)+\frac{\mu(\mu^- -\mu^+)}{\mu(\mu^+ +\mu^-)+2\mu^+\mu^-}K(s-t)-$$

$$-\frac{\mu^+(\mu+\mu^-)}{h(2\mu^+\mu^- +\mu(\mu^+ +\mu^-))}$$

$$q_2(s,t)=K(s-t)+\frac{\mu^+-\mu^-}{\mu^- +\mu^+ +2\mu}K(s+t)+\frac{\mu+\mu^-}{h(\mu^- +\mu^+ +2\mu)}$$

$$q_3(s,t)=K(s-t)+\frac{\mu^- -\mu^+}{\mu^- +\mu^+ +2\mu}K(s+t)+\frac{\mu+\mu^+}{h(\mu^- +\mu^+ +2\mu)}$$

$$q_4(s,t)=K(s+t)+\frac{\mu(\mu^+-\mu^-)}{\mu(\mu^+ +\mu^-)+2\mu^+\mu^-}K(s-t)-$$

$$-\frac{\mu^-(\mu+\mu^+)}{h\left(2\mu^+\mu^-+\mu(\mu^++\mu^-)\right)}$$

$$\Psi_1(x)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mu^-+\mu^++2\mu}{\mu(\mu^++\mu^-)}\overline{\varphi}_2(\sigma)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu^--\mu^+}{\mu^-(\mu^-+\mu^+)}-\frac{(\mu+\mu^-)\mathrm{ch}\pi\sigma}{\mu\mu^-}\right)\overline{\varphi_1}(\sigma)\right]\frac{\mathrm{sh}\pi\sigma}{\Pi(\sigma)}x^{-i\sigma}d\sigma,$$

$$\Psi_2(x)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mu^-+\mu^++2\mu}{\mu(\mu^++\mu^-)}\overline{\varphi}_1(\sigma)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu^+-\mu^-}{\mu^+(\mu^-+\mu^+)}-\frac{(\mu+\mu^-)\mathrm{ch}\pi\sigma}{\mu\mu^+}\right)\overline{\varphi_2}(\sigma)\right]\frac{\mathrm{sh}\pi\sigma}{\Pi(\sigma)}x^{-i\sigma}d\sigma,$$

$$\Pi(\sigma)=(\mathrm{ch}\pi\sigma+\lambda)(\mathrm{ch}\pi\sigma+1)$$

Итак, поставленную задачу наконец свели к решению системы интегральных уравнений второго рода (19). Кроме того, определили вид коэффициентов особенности (20), (21).

Теперь обратимся к вопросу разрешимости уравнений (19). Так как $R_{mn}(x,s)$ $(m,n=1,2)$ имеют порядок $O(x^{-\omega})$ при $x\to\infty$ и фиксированном s, то отсюда следует, что система уравнений (19) не допускает решение с помощью метода последовательных приближений в $L_1(0,\infty)$. Но если известны значения $\tau(x)$ при $a<|x|<\infty$, где a - некоторое конечное число, то (19) можно записать в виде

$$\tau(x)=\int_0^a R_{11}(x,s)\tau(s)ds+\int_0^a R_{12}(x,s)\tau(-s)ds+$$

$$+\int_a^{\infty}\left[R_{11}(x,s)\tau(s)+R_{12}(x,s)\tau(-s)\right]ds+K^+x^{-\omega}+\Psi_1(x),$$

$$\tau(-x)=\int_0^a R_{21}(x,s)\tau(s)ds+\int_0^a R_{22}(x,s)\tau(-s)ds+$$

$$+\int_a^{\infty}\left[R_{21}(x,s)\tau(s)+R_{22}(x,s)\tau(-s)\right]ds+K^-x^{-\omega}+\Psi_2(x) \qquad (22)$$

$(0<x<a)$

Тогда (22) можно решать с помощью метода последовательных приближений и тем самым определить $\tau(x)$ при $|x|<a$. Значит вопрос состоит в определении $\tau(x)$ при $|x|>a$.

Известен метод [5], который хорошо практикуется, дающий возможность определить приближенное значение $\tau(x)$, справедливое только при $a<|x|<\infty$. Прибегнув к этому методу, решение граничной задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$W_s^{(n)}(x,y)=\frac{1}{h}W_0(x,s)+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{n}W_k(x)\cos\lambda_k y,\quad \lambda_k=\frac{k\pi}{h} \tag{23}$$

где n - любое конечное целое число.

Далее, подставляя $W_s^{(n)}(x,y)$ в (1) и удовлетворив граничным и контактным условиям, определим $W_k(x)$. После чего, применив к $W_s^{(n)}(x,0)$ преобразование Фурье, получим

$$(-\sigma^2)\overline{W}_s^{(n)}(\sigma,0)=\frac{\overline{\tau}_n^{+}(\sigma)}{h\mu^{+}}+\frac{\overline{\tau}_n^{-}(\sigma)}{h\mu^{-}}+\frac{2}{h}\sigma^2\left(\frac{1}{\mu^{-}}\overline{\tau}_n^{-}(\sigma)+\frac{1}{\mu^{+}}\overline{\tau}_n^{+}(\sigma)\right)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2+\sigma^2}+\frac{2}{h}\frac{(\mu^{-}-\mu^{+})\sigma^2}{\mu^{-}+\mu^{+}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_k)}{\mu^{-}}-\frac{\overline{\tau}_n^{+}(i\lambda_k)}{\mu^{+}}\right)\frac{1}{\lambda_k^2+\sigma^2}+\overline{F}_n(\sigma),$$

где

$$\overline{F}_n(\sigma)=-\frac{2}{h}\sigma^2\left(\frac{\bar{f}^{+}(\sigma)}{\mu^{+}}+\frac{\bar{f}^{-}(\sigma)}{\mu^{-}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\lambda_k^2+\sigma^2}+$$

$$+\frac{2}{h}\frac{(\mu^{-}-\mu^{+})\sigma^2}{\mu^{-}+\mu^{+}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\bar{f}^{+}(i\lambda_k)}{\mu^{+}}-\frac{\bar{f}^{-}(-i\lambda_k)}{\mu^{-}}\right)\frac{(-1)^k}{\lambda_k^2+\sigma^2}-$$

$$-\frac{u_0}{h}-\frac{1}{\mu^{-}h}\bar{f}^{-}(\sigma)-\frac{1}{\mu^{+}h}\bar{f}^{+}(\sigma),$$

u_0 -неизвестная постоянная, которая определяется из (17). Имея в виду (11) и условие контакта (7), после некоторых преобразований, для определения $\overline{\tau}^{+}(\sigma)$, $\overline{\tau}^{-}(\sigma)$ получим функциональные уравнения

$$\overline{K}_n(\sigma)\overline{\tau}_n^{+}(\sigma)+\overline{\tau}_n^{-}(\sigma)+\frac{2(\mu^{+}-\mu^{-})}{\mu^{+}+\mu^{-}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda^{+}\overline{\tau}_n^{+}(i\lambda_k)-\lambda^{-}\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_k))\sigma^2}{(\lambda_k^2+\sigma^2)(\lambda^{-}+|\sigma|+\lambda^{+}b_n(\sigma))}+\frac{\mu\overline{F}_n(\sigma)}{\lambda^{-}+|\sigma|+\lambda^{-}b_n(\sigma)}=0 \tag{24}$$

где

$$K_n(\sigma)=\frac{\lambda^+ +|\sigma|+\lambda^+ b_n(\sigma)}{\lambda^- +|\sigma|+\lambda^- b_n(\sigma)},\quad \lambda^+=\frac{\mu}{\mu^+ h},$$

$$\lambda^-=\frac{\mu}{\mu^- h},\quad b_n(\sigma)=2\sigma^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^2+\sigma^2}$$

Решение уравнения (24) построим методом факторизации [4,6]. Для этого, поскольку $\overline{K}_n(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$, $\overline{K}_n(\sigma)$ можно представить в виде

$$\overline{K}_n(\sigma)=\frac{\overline{K}_n^+(\sigma)}{\overline{K}_n^-(\sigma)},\tag{25}$$

где $K_n^+(x)=0$ при $x<0$, а $K_n^-(x)=0$ при $x>0$,

$$\overline{K}_n^\pm(\sigma)=\exp\left[\pm\overline{G}_n^\pm(\sigma)\right],\quad G_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\overline{K}_n(\sigma)\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Разрешив (24), получим

$$\begin{gathered}\overline{K}_n^+(\sigma)\overline{\tau}_n^+(\sigma)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^+\overline{\tau}_n^+(i\lambda_k)-\lambda^-\overline{\tau}_n^-(-i\lambda_k)\right)\overline{\psi}_{kn}^+(\sigma)=\\=\overline{\Phi}_n^+(\sigma)\\ \overline{K}_n^-(\sigma)\overline{\tau}_n^-(\sigma)+\frac{2(\mu^+-\mu^-)}{\mu^++\mu^-}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^+\overline{\tau}_n^+(i\lambda_k)-\lambda^-\overline{\tau}_n^-(-i\lambda_k)\right)\overline{\psi}_{kn}^-(\sigma)=\\=\overline{\Phi}_n^-(\sigma)\end{gathered}\tag{26}$$

где

$$\overline{\Phi}_n(\sigma)=-\frac{\mu\overline{F}_n(\sigma)}{\lambda^- +|\sigma|+\lambda^- b_n(\sigma)},$$

$$\overline{\Phi}_n^\pm(\sigma)=2\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi}_{kn}^\pm(\sigma)-\frac{2(\mu^--\mu^+)}{\mu^++\mu^-}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\lambda^+\bar{f}^+(i\lambda_k)-\lambda^-\bar{f}^-(-i\lambda_k)\right)\times$$

$$\times\overline{\psi}_{kn}^\pm(\sigma)+\overline{\varphi}_{0n}^\pm(\sigma)+\mu\frac{u_0}{h}\overline{\psi}_{0n}^\pm(\sigma),$$

$$\overline{\psi}_{kn}(\sigma)=\frac{\sigma^2\overline{K}_n^-(\sigma)}{(\lambda_k^2+\sigma^2)(\lambda^- +|\sigma|+\lambda^- b_n(\sigma))}=\overline{\psi}_{kn}^+(\sigma)+\overline{\psi}_{kn}^-(\sigma),$$

$$\overline{\psi}_{kn}^+(\sigma)=\int_0^{\infty}\psi_{kn}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{\psi}_{kn}^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}\psi_{kn}(x)e^{i\sigma x}dx,$$

$$\frac{\sigma^2\left(\lambda^+\bar{f}^+(\sigma)+\lambda^-\bar{f}^-(\sigma)\right)}{(\lambda_k^2+\sigma^2)(\lambda^- +|\sigma|+\lambda^- b_n(\sigma))}=\overline{\varphi}_{kn}(\sigma)=\overline{\varphi}_{kn}^+(\sigma)+\overline{\varphi}_{kn}^-(\sigma),$$

$$\overline{\varphi}_{kn}^{+}(\sigma)=\int_{0}^{\infty}\varphi_{kn}(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{\varphi}_{kn}^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^{0}\varphi_{kn}(x)e^{i\sigma x}dx$$

Как видно из (26), для определения $\overline{\tau}_n^{+}(\sigma),\overline{\tau}_n^{-}(\sigma)$ достаточно иметь значения $\overline{\tau}_n^{+}(-i\lambda_k),\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_k)$. Для этого в первом уравнении (26) подставим $\sigma=i\lambda_m$, а во втором $\sigma=-i\lambda_m$. В итоге для определения $\overline{\tau}_n^{+}(i\lambda_k)$, $\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_k)$ получим систему уравнений

$$\overline{K}_n^{+}(i\lambda_m)\overline{\tau}_n^{+}(i\lambda_m)+\frac{2(\mu^{+}-\mu^{-})}{\mu^{+}+\mu^{-}}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^{+}\overline{\tau}_n^{+}(i\lambda_k)-\lambda^{-}\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_k)\right)\overline{\psi}_{kn}^{+}(i\lambda_k)=\overline{\Phi}_n^{+}(i\lambda_m)$$
$$\overline{K}_n^{-}(-i\lambda_m)\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_m)+\frac{2(\mu^{+}-\mu^{-})}{\mu^{+}+\mu^{-}}\times \tag{2.7}$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda^{+}\overline{\tau}_n^{+}(i\lambda_k)-\lambda^{-}\overline{\tau}_n^{-}(-i\lambda_k)\right)\overline{\psi}_{kn}^{+}(-i\lambda_k)=\overline{\Phi}_n(-i\lambda_m)$$
$$(m=1,2,\dots,n;\quad n=0,1,2,\dots)$$

Как следует (27), $\overline{\tau}_n^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ имеют порядок $0\left(|\sigma|^{-1}\right)$, что говорит о том, что $\tau_n^{\pm}(x)$ при $|x|\to 0$ имеют логарифмическую особенность. Но мы выдели выше, что $\tau^{\pm}(x)\sim K^{\pm}|x|^{-\omega}$ при $|x|\to 0$. Отсюда можно заключить, что $\tau_n(x)$ является приближенным значением $\tau(x)$ при $a_n<|x|<\infty$. Очевидно, что при увеличении n значения a_n будут уменьшаться и стремиться к нулю при $n\to\infty$. Значит, если заменим в (22) a на a_n, $\tau(x)$ на $\tau_n(x)$ $(a_n<x<\infty)$, мы определим $\tau(x)$ при $0<x<a_n$ и тем самым определим значения $\tau(x)$ при $0<x<\infty$, о чем говорилось выше. Далее, подставляя таким образом полученное решение в (20), (21), определим коэффициенты особенности K_n^{+},K_n^{-}.

В частном случае, если взять нулевое приближение, т.е.

$$\overline{\tau}_0^{+}(\sigma)=\frac{\overline{\Phi}_0^{+}(\sigma)}{\overline{K}_0^{+}(\sigma)},\quad \overline{\tau}_0^{-}(\sigma)=\frac{\overline{\Phi}_0^{-}(\sigma)}{\overline{K}_0^{-}(\sigma)},$$

где

$$\overline{K}_0(\sigma)=\frac{\lambda^{+}+|\sigma|}{\lambda^{-}+|\sigma|},\quad \overline{\Phi}_0^{\pm}(\sigma)=\overline{\varphi}_{00}^{\pm}(\sigma),$$

то нетрудно видеть, что оно будет соответствовать задаче для тонкостенного слоя, где принимается гипотеза о том, что перемещения по толщине не изменяются (23). Далее, определив из (22) значения $\tau_0(x)$ при $|x| < a_n$, определим, таким образом, $\tau_0(x)$ при $0 < x < \infty$, а тем самым и $K_0^{\pm}$.

После определения $\tau^+(x), \tau^-(x)$, представляет интерес определение напряжения в упругом кусочно-однородном слое. Для этого следует определить $W_*(0, y)$ и контактные напряжения $P(y)$ $(-h < y < 0)$. Не останавливаясь на подробностях, приведем выражения $P(y)$ и $W_*(0, y)$. Они имеют вид

$$W_*(0,y) = -\frac{1}{\pi(\mu^+ + \mu^-)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\tau}(\sigma)\mathrm{ch}[|\sigma|(y+h)] - \bar{f}(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|y)}{\sigma\mathrm{sh}(\sigma h)}d\sigma,$$

$$P(y) = \frac{\mu^-}{\mu^+ + \mu}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\left(\bar{\tau}^+(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h)) - \bar{f}^+(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|y)\right)}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma +$$

$$+\frac{\mu^+}{\mu^+ + \mu^-}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\left(\bar{\tau}^-(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h)) - \bar{f}^-(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|y)\right)}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma$$

$(-h < y < 0)$

Далее ввиду того, что

$$\bar{\tau}^+(\sigma) \sim i\Gamma(1-\omega)e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}K^+(\sigma + i0)^{\omega-1} \qquad \text{при } |\sigma| \to \infty$$

$$\bar{\tau}^-(\sigma) \sim -i\Gamma(1-\omega)e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}K^-(\sigma - i0)^{\omega-1} \qquad \text{при } |\sigma| \to \infty$$

где

$$(\sigma \pm i0)^{\omega-1} = \sigma_+^{\omega-1} - e^{\pm i\omega\pi}\sigma_-^{\omega-1}, \quad \sigma_+^{\omega-1} = \theta(\sigma)\sigma^{\omega-1},$$

$$\sigma_-^{\omega-1} = \theta(-\sigma)|\sigma|^{\omega-1}$$

можно показать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\bar{\tau}^+(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h))}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma \sim -\frac{K^+}{\sin\frac{\pi\omega}{2}}(-y)^{-\omega} \quad \text{при} \quad y \to 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\bar{\tau}^-(\sigma)\mathrm{ch}(|\sigma|(y+h))}{\mathrm{sh}(|\sigma|h)}d\sigma \sim \frac{K^-}{\sin\frac{\pi\omega}{2}}(-y)^{-\omega} \quad \text{при} \quad y \to 0$$

Тогда

$$P(y) \sim K_p(-y)^{-\omega} \quad \text{при} \quad y \to 0$$

где K_p выражается через K^+, K^- по формуле

$$K_p = \frac{\mu^+ K^- - \mu^- K^+}{(\mu^- + \mu^+)\sin\frac{\pi\omega}{2}}$$

Работа выполнена по заказу фирмы "Анушик".

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. On the duffusion of load form a stiffener into a sheet. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1955, vol. 8, N 2, p. 165-178.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М: Машиностроение, 1980. 416 с.
3. Григорян Э. Х. О коэффициентах интенсивности контактных напряжений в задачах для упругих тел с накладками. Межвузовский сб. научных трудов, Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1986, N 5, с. 130-140.
4. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости... - Ученые записки ЕГУ, естеств. науки, 1979, N 3, с. 29-34.
5. Нобл Б. Метод Винера - Хопфа. - М. : ИЛ., 1962. 279 с.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - Изд-во 3 -е, перераб. и дополн. М. : Наука. 1977. 640 с.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
1.02.1995