ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ПРОЧНОСТЬ

Белубекян Э.В., Маркарян С.Э.

Է.Վ. Բելուբեկյան , Ս.Է. Մարգարյան
Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված գլանային թաղանթի սկզբնական գրգռումների մեծագույն արժեքների որոշումը ամրության սահմանափակման դեպքում

Դիտարկվում է եզրագծով ազատ հենված օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութի (Կ) մոնոշերտերից պատրաստված գլանային թաղանթի պանել

Թաղանթի հաստատուն կշռի դեպքում լուծվում է ԿՆ-ի մոնոշերտերի ըստ հաստության դասավորման անկյունների օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որի դեպքում ապահովվում է ամրության պայմանից թույլատրելի սկզբնական գրգռման մեծագույն արժեքը՝ սալի սեփական տատանումների դեպքում:

E.V. Beloubekian , S.E. Markarian

The Determination of the Maximum Values of the Initial Excitation of the Cylindrical Shell of Composition Material in Case of Strenght Limitation

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндрической оболочки, изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ).

Решается задача оптимального выбора угла укладки монослоев КМ по толщине оболочки при её постоянном весе, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях оболочки.

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндрической оболочки размерами a, b, h, R, изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ).

Оболочка отнесена к цилиндрической системе координат Oxyz так, что координатная поверхность z=0 совпадает с срединной поверхностью, а ось Oz направлена к центру кривизны оболочки.

Предполагается, что в пакете оболочки по толщине монослои КМ расположены поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси Ox. В этом случае пакет оболочки в целом можно считать ортотропным.

Решается задача оптимального выбора угла укладки монослоев КМ по толщине оболочки при её постоянном весе, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях оболочки.

Рассматриваются числовые примеры при различных начальных условиях и значениях габаритных размеров оболочки.

1.Система дифференциальных уравнений собственных колебаний ортотропной оболочки в цилиндрической системе координат имеет вид [1]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\delta y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

$$a_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{12}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

где $w(x,y,t)$ -функция прогибов, $\Phi(x,y,t)$ -функция усилий, ρ -плотность материала оболочки, t -время, $C_{ik}=B_{ik}h,\ D_{ik}=B_{ik}h^3/12$ -жесткости оболочки, $a_{ik}=D_{ik}/(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)$, $a_{66}=1/C_{66}$ характеристики упругости монослоя KM по главным геометрическим направлениям оболочки, которые выражаются через характеристики упругости KM по его главным физическим направлениям B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Начальные условия оболочки принимаются в виде

$$w|_{t=0}=Cf_1(x,y),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\xi Cf_2(x,y), \qquad (2)$$

где C и ξC соответственно максимальные по модулю значения начального прогиба и скорости, $|f_i(x,y)|\le 1$ - заданные функции распределения начального прогиба и скорости, которые могут быть разложены в ряды Фурье

$$f_1(x,y)=\sum_m\sum_n f_{1mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y,$$

$$f_2(x,y)=\sum_m\sum_n f_{2mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y, \qquad (3)$$

где $\lambda_m=\dfrac{m\pi}{a}$, $\mu_n=\dfrac{n\pi}{b}$,

$$f_{imn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f_i(x,y)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,dxdy$$

Предполагается, что функции распределения $f_i(x,y)$ таковы, что начальный прогиб и скорость направлены обратно оси Oz, чтобы исключить потерю устойчивости оболочки.

Функции прогибов и усилий, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания краев оболочки, представляются в виде

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin\lambda_m x \sin\mu_n y,$$
$$\Phi = \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(t) \sin\lambda_m x \sin\mu_n y, \tag{4}$$

Подстановкой (4) в уравнение (1) и условия (2), получается выражение для определения функции $\Phi_{mn}(t)$

$$\Phi_{mn}(t) = \frac{1}{R}\cdot\frac{\lambda_m^2 w_{mn}(t)}{a_{11}\lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4} \tag{5}$$

и уравнение относительно функции $w_{mn}(t)$

$$w_{mn}^4(t)\omega_{mn}^2 + w_{mn}(t) = 0 \tag{6}$$

с соответствующими начальными условиями

$$w_{mn}(t)\big|_{t=0} = Cf_{1mn}, \quad w_{mn}^{\cdot}(t)\big|_{t=0} = \xi Cf_{2mn}, \tag{7}$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h}\left(D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4\right) + \\ + \frac{\lambda_m^4}{R^2\left(a_{11}\lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4\right)} \tag{8}$$

Решая уравнение (6), с удовлетворением условий (7), и подставляя полученное решение в (4), для функций прогибов и усилий получается

$$w = C\sum_m \sum_n \left(f_{1mn}\cos\omega_{mn}t + \xi\frac{f_{2mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t \right)\sin\lambda_m x \sin\mu_n y,$$
$$\Phi = C\sum_m \sum_n \frac{\lambda_m^2}{R\left(a_{11}\lambda_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4\right)} \times \\ \times\left(f_{1mn}\cos\omega_{mn}t + \xi\frac{f_{2mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t \right)\sin\lambda_m x \sin\mu_n y. \tag{9}$$

Деформации в главных геометрических направлениях оболочки определяются по формулам

$$e_{xx} = a_{22}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$e_{yy} = -a_{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + a_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$e_{xy} = -a_{66}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

Деформации e_{11}, e_{22}, e_{12} оболочки по направлениям укладки монослоев КМ определяются по известным формулам поворота [2], а напряжения в тех же направлениях определяются по формулам обобщенного закона Гука

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{12},$$

$$\sigma_{22} = B_{12}^0 e_{11} + B_{22}^0 e_{22},$$

$$\sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12}.$$

Условие прочности в наиболее опасных точках оболочки принимаются в виде [3]

$$\Pi(\sigma_{ik}) = \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \le 1, \tag{10}$$

где σ_{B1}, σ_{B2}, σ_{B0} -прочностные характеристики монослоя КМ.

Ставится задача определения оптимального значения угла укладки φ, обеспечивающего наибольшее значение начального максимального прогиба C (или начальной скорости ξC) при заданном значении ξ, неизменном весе оболочки и удовлетворении условия прочности (10).

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возбуждения C, условие (10) можно представить в виде

$$\Pi(\sigma_{ik}) = C^2\tilde{\Pi}(\sigma_{ik}) \le 1. \tag{11}$$

При заданном значении ξ из условия прочности (10) в наиболее опасной точке оболочки в зависимости от параметра управления φ, определяются значения

$$C(\varphi) = \left[\max_{x,y,z,t}\tilde{\Pi}(\sigma_{ik})\right]^{-1/2} \tag{12}$$

Варьированием значением угла φ определяется оптимальный проект оболочки, при котором начальное возмущение $C(\varphi)$ достигает наибольшего значения.

Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C = \max_{\varphi}\left[\max_{x,y,z,t}\tilde{\Pi}(\sigma_{ik})\right]^{-1/2} \tag{13}$$

при ограничении $0 \le \varphi \le 90^0$.

2.Численная реализация задачи произведена для случая, когда функции $f_i(x,y)$ заданы в виде

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) = -\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y.$$

В качестве КМ приняты однонаправленный углепластик и стеклопластик СВАМ 5:1 соответственно со следующими характеристиками

$B_{22}^0 = 0{,}33B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0{,}0082B_{11}^0, \quad B_{66}^0 = 0{,}16B_{11}^0,$

$\sigma_{B1} = 1{,}9\cdot10^{-2}B_{11}^0, \ \sigma_{B2} = 0{,}25\cdot10^{-2}B_{11}^0, \quad \tau_{B0}^0 = 0{,}075\cdot10^{-2}B_{11}^0,$

и

$B_{22}^0 = 0{,}62B_{11}^0, \quad B_{12}^0 = 0{,}12B_{11}^0,$

$B_{66}^0 = 0{,}16B_{11}^0,$

$\sigma_{B1} = 1{,}89\cdot10^{-2}B_{11}^0, \quad \sigma_{B2} = 0{,}77\cdot10^{-2}B_{11}^0, \quad \tau_{B0} = 0{,}5\cdot10^{-2}B_{11}^0.$

Определены оптимальный угол φ и соответствующее значение приведенного начального прогиба $\overline{C} = C/h$ или скорости $\overline{\xi}\overline{C}\left(\overline{\xi} = \xi\left(12\rho a^4/\pi^4 B_{11}{}^0 h^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ при $\overline{\xi} = 0{,}1,\infty$, для различных значений приведенной толщины оболочки $h = h/b$ и отношений сторон a/b. Здесь $\overline{\xi} = 0$ соответствует отсутствию начальной скорости $(\xi C = 0)$, а $\overline{\xi} = \infty$ отсутствию начального прогиба $(C = 0)$.

В таблице 1 приведены оптимальные значения угла φ и соответствующие значения $\overline{C}_{max}$ и $\overline{\xi}\overline{C}_{max}$ для рассмотренных материалов соответственно при $\overline{h} = 0{,}05$, $b^2/Rh = 20$ и $\overline{h} = 0{,}1$, $b^2/Rh = 10$ и различных значений a/b. Там же для сравнения приведены значения $\overline{C}_{min}$ и $\overline{\xi}\overline{C}_{min}$ соответствующие значения угла φ

Из таблицы следует, что в случае однонаправленного углепластика при всех значениях $\overline{\xi}$ оптимальные углы φ получаются одинаковыми при заданном значении a/b, причем при увеличении a/b этот угол уменьшается, стремясь к $\varphi = 0^0$ для длинной оболочки.

Для случая материала СВАМ 5:1 оптимальные углы получаются одинаковыми при $\overline{\xi} = 0$ и $\overline{\xi} = 1$. Причем здесь происходит переход от $\varphi = 0^0$ к $\varphi = 90^0$ в зависимости от изменения отношения сторон оболочки, а при $a/b = 1$ оптимум достигается при $\varphi = 0^0$ и $\varphi = 90^0$.

Сравнение оптимального проекта $\left(\overline{C}_{max}, \ \overline{\xi}\overline{C}_{max}\right)$ с невыгодным проектом $\left(\overline{C}_{min}, \ \overline{\xi}\overline{C}_{min}\right)$ согласно таблице 1, показывает на возможность существенного увеличения допустимых параметров начального возбуждения путем оптимального выбора углов укладки монослоев КМ.

Таблица 1

	$\overline{h}=0{,}05, \quad b^2/Rh=20$					
	Однонаправленный углепластик					
a/b	$\overline{\xi}=0$		$\overline{\xi}=1$		$\overline{\xi}=\infty$	
	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{\xi}\overline{C}_{max}$	φ^0
0,5	**0,081**	**60**	**0,0667**	**60**	**0,118**	**60**
1	**0,282**	**45**	**0,269**	**45**	**0,928**	**45**
1,5	**0,318**	**35**	**0,311**	**35**	**1,489**	**35**
2	**0,324**	**30**	**0,319**	**30**	**1,882**	**30**
	$\overline{C}_{min}$		$\overline{C}_{min}$		$\overline{\xi}\,\overline{C}_{min}$	
0,5	**0,044**	**90**	**0,0349**	**90**	**0,0571**	**90**
1	**0,0849**	**0,90**	**0,0793**	**0,90**	**0,221**	**0,90**
1,5	**0,124**	**0**	**0,12**	**0**	**0,489**	**0**
2	**0,176**	**0**	**0,173**	**0**	**0,914**	**0**
	$\overline{h}=0{,}1, \quad b^2/Rh=10$					
	СВАМ 5:1					
a/b	$\overline{\xi}=0$		$\overline{\xi}=1$		$\overline{\xi}=\infty$	
	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{C}_{max}$	φ^0	$\overline{\xi}\overline{C}_{max}$	φ^0
0,5	**0,0713**	**0**	**0,0552**	**0**	**0,0872**	**0**
1	**0,154**	**0,90**	**0,137**	**0,90**	**0,332**	**45**
1,5	**0,231**	**90**	**0,221**	**90**	**0,745**	**90**
2	**0,285**	**90**	**0,279**	**90**	**1,395**	**90**
	$\overline{C}_{min}$		$\overline{C}_{min}$		$\overline{\xi}\,\overline{C}_{min}$	
0,5	**0,057**	**90**	**0,042**	**90**	**0,0622**	**90**
1	**0,139**	**45**	**0,128**	**40,50**	**0,305**	**0,90**
1,5	**0,201**	**15**	**0,192**	**10**	**0,613**	**0**
2	**2,228**	**0**	**0,222**	**0**	**0,995**	**0**

Следует отметить, что если в рассматриваемой задаче оптимизации ввести также ограничение на максимальный прогиб, то это может привести к изменению оптимального проекта оболочки.

Так например, для материала СВАМ 5:1 при $\bar{\xi}=1$, $\bar{h}=0{,}1$, $a/b=0{,}5$ оптимальный проект получается, при $\varphi=0^0$, при котором $\bar{C}=0{,}0552a$, $\bar{w}_{max}=w_{max}/h=0{,}0713$. При ограничении $|\bar{w}|\le 0{,}07$ получается $\varphi=10^0$, $\bar{C}=0{,}0544$, $\bar{w}_{max}=0{,}0701$, а при ограничении $|\bar{w}|\le 0{,}06$ получается $\varphi=65^0$, $\bar{C}=0{,}0458$, $\bar{w}_{max}=0{,}0601$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.-М: Наука, 1974.-448с.
2. Timoshenko S.P. and Goodier J.N. Theory of elasticity, ed., mc Craw-Hiu, New York, 1951.
3. Бажанов З.Л., Гольденблат И.И. и др. Сопротивление стеклопластиков, М.: Машгиз, 1968.

Институт механики НАН РА
Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию 28.07.1995