ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան

Անհամասեռ հեծանի հաճախությունների որոշման մասին

Տրվում է կամայական անհամասեռության ազատ հենված հեծանի սեփական հաճախությունները որոշելու եղանակ: Քննարկվում է հաճախությունների վարքը, երբ անհամասեռությունը պատահական ֆունկցիա է: Բերված է հակադարձ խնդրի օրինակ՝ տրված հաճախություններով որոշել անհամասեռության վարքը:

L.A.Movsisian

To determination of frequency of nonhomoqeneous beam

Дается способ определения собственных частот шарнирно опертых балок произвольной неоднородности. Изучается характер изменения частот в случае, когда неоднородность является случайной функцией. Приведен пример обратной задачи, когда по частотам можно определить неоднородность.

1. Рассмотрим прямолинейную балку из неоднородного материала (неоднородность может быть как непрерывной, так и разрывной — составной). Поперечное сечение и неоднородность симметричны относительно плоскости изгиба (xz).

Уравнение свободных продольно-изгибных колебаний приведен с учетом поперечных сдвигов, то есть перемещение по оси балки и перпендикулярного к ней направлениях представится

$$u_x = x(x,t) + zu_1(x,t), \quad u_z = w(x,t) \tag{1.1}$$

тогда, принимая, что характеристика упругости и плотность можно представить в виде сумм четных и нечетных функций относительно z, для уравнений свободных колебаний будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial x} = I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = I_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M}{\partial x} = Q + I_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$T = J_1\varepsilon + J_2\chi, \quad M = J_2\varepsilon + J_3\chi, \quad Q = K^2 J_4\gamma$$

$$J_1 = \int_F E_0 dF, \quad J_2 = \int_F E_1 z dF, \quad J_3 = \int_F E_0 z^2 dF \tag{1.3}$$

$$J_4 = \int_F G_0 dF, \quad I_1 = \int_F \rho_0 dF, \quad I_2 = \int_F \rho_1 z dF, \quad I_3 = \int_F \rho_0 z^2 dF$$

Коэффициент K подбирается, исходя из формы поперечного сечения балки а

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \chi = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \gamma = u_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.4}$$

В частности, для балки прямоугольного сечения $(1 \times h)$, которая по длине состоит из n столбиков, длина k-того $-l_k - l_{k-1} (l_0 = 0, \ \ l_n = l)$, а в каждом столбике находится p_k кирпичиков со своими постоянными $E_k^{(\alpha)}$, $\rho_k^{(\alpha)}$ $(a = 1,2,\dots,p_k)$ и толщинами $h_k^{(\alpha)}$ функции $J_j(x)$ и $I_j(x)$ определяется формулами

$$J_j(x) = \sum_{k=1}^{n} J_k^{(j)} L_k(x), \quad J_k^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} E_k^{(\alpha)} z^{j-1} dz, \quad j = 1,2,3$$

$$J_k^{(4)} = \sum_{\alpha=1}^{p_k} G_{nk}^{(\alpha)}, h_k^{(\alpha)} \quad I_j(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k^{(j)} L_k(x), \quad I_k^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_k^{(\alpha)} z^{j-1} dz$$

$L_k(x) = H(x - l_{k-1}) - H(x - l_k)$, $H(x)$ – функция Хевисайда.

В дальнейшем будут рассмотрены частные задачи.

2. Если неоднородность балки только по длине и к тому же не быстро изменяющаяся функция, то можно пользоваться класической теорий $\left(u_1 = -\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$ и при этом учитывать, что уравнения продольных и поперечных движений распадаются.

Для изгибных колебний будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 J \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + \rho_0 F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (J_3 = E_0 J, I_3 = \rho_0 F) \tag{2.1}$$

Заметим только, что и в общем случае решение можно построить таким же образом, как и для (2.1).

Для балки с шарниро-опертыми концами решение (2.1) будем искать в виде

$$w = e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \tag{2.2}$$

Тогда, представляя функции $E_0(x)$ и $\rho_0(x)$ также в виде рядов [1,2]

$$E_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\cos\lambda_m x,\quad \rho_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\cos\lambda_m x \tag{2.3}$$

и подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), для определения частот получим систему относительно

$$\left[(2\alpha_0-\alpha_{2m})m^4-\Omega(2b_0-b_{2m})\right]f_m+\sum_{q=1,q\neq m}^{\infty}\left[(\alpha_{m-q}-\alpha_{m+q})m^2q^2-\Omega(m_{m-q}-b_{m+q})\right]f_q=0 \tag{2.4}$$

где

$$\Omega=\frac{\omega^2 Fl^4}{\pi^4 J}$$

Частоты определятся из равенства нулю детерманата системы (2.4).

В случае постоянной плотности $(b_0\neq 0,\quad b_m=0,\quad m=1,2,\ldots)$ можно показать, что определитель системы (2.4) - нормальный [3]. Для этого обозначим $\varphi_m=m^2 f_m$ и условие разрешимости (2.4) запишем

$$\det\left\|\delta_{mq}-c_{mq}\right\|=0,\quad \delta_{mq}=\begin{cases}1, & при\ m=q\\ 0, & при\ m\neq q\end{cases} \tag{2.5}$$

$$c_{mm}=\frac{2b_0\Omega}{(2a_0-a_{2m})m^4},\quad c_{mq}=\frac{(a_{m-q}-a_{m+q})}{m^2(2a_0-a_{2m})}$$

Принимая, что a_m имеют порядок хотя бы m^{-1}, представим двойной ряд

$$\sum_{m,q}^{\infty}|c_{mq}|=\sum_{m=1}^{\infty}|c_{mm}|+\sum_{m,q,m\neq q}^{\infty}|c_{mq}|<C_1\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1}{m^3(m-\beta)}\right|+C_2\sum_{m,q}^{\infty}\left|\frac{1}{m(q^2-m^2)(m-\beta)}\right| \tag{2.6}$$

где C_1, C_2 и β - постоянные.

Так как $\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2-m^2}=\frac{3}{4m^2}$, то второе слагаемое в (2.6) будет вида первого.

Таким образом, двойной ряд сходится, следовательно, собственные частоты можно определить методом редукции и процесс этот сходится [3].

Между прочим, в пользу продложенного способа определения частот говорит не только то, что он применим в случиях, когда невозможно решение уравнений с переменными коэффициентами, но и то, что часто быстро приводит к желаемым результатам. Например, для составного стержня (продольное колебание) из двух частей - l_1, E_1 и l_2, $E_2(\rho_1=\rho_2)$ первые две частоты, определение из трансцендентного уравнения

$$a_1 \operatorname{tg}\frac{\omega l_1}{a_1} + a_2 \operatorname{tg}\frac{\omega l_2}{a_2} = 0, \quad a_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho}}$$

равны $\frac{\omega l_1}{a_1} = 0{,}998;2{,}143$ при $l_2 = 3l_1, \quad E_2 = 2{,}25E_1$.

А вот частоты, определенные из системы двух уравнений, аналогичной (2.4), соответственно равны $\frac{\omega l_1}{a_1} = 1{,}002;2{,}202$, то есть наибольшая разница между точными и приближенными решениями меньше, чем 3%, причем ее можно свести к нулю, увеличивая число привлекаемых уравнений.

В качестве примера рассмотрим случай $\rho_0 = \text{const}$ из двух материалов, чередующихся один за другим:

$$E_0(x) = \begin{cases} E_1, l_{2(k-1)} \le x \le l_{2k-1}, k = 1,2,\dots,\frac{n}{2} \\ E_2, l_{2k-1} \le x \le l_{2k} \;\; n = 2j \end{cases} \tag{2.7}$$

Коэффициенты a_m определяются как $(n = 2j, \quad j = 1,2,\dots)$

$$a_0 = \frac{n}{2l}(E_1 a + E_2 b), \quad a = l_{2k-1} - l_{2k}, \quad b = l_{2k} - l_{2k-1} \tag{2.8}$$

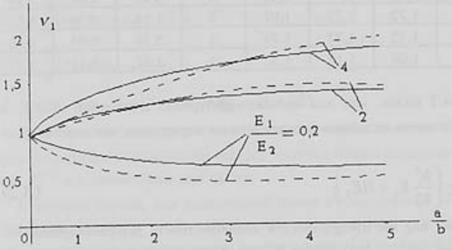
$$a_m = \frac{4}{m\pi}(E_1 - E_2)\sin\frac{m\pi a}{2l}\sum_{p=1}^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4l}\left[(2p-1)a + 2(p-1)b\right]$$

Таблица 1

$\nu_j \backslash \frac{E_1}{E_2}$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
ν_1	0,82 0,87	1 1	1,10 1,12	1,16 1,22	1,21 1,32	1,24 1,41	1,27 1,50	1,29 1,58	1,21 1,66	1,33 1,73
ν_2	3,40 3,46	4 4	4,45 4,47	4,81 4,90	5,13 5,29	5,41 5,66	5,66 6,00	5,89 6,32	6,10 6,63	6,29 6,93
ν_3	7,47 7,79	9 9	9,92 10,06	10,57 10,02	11,08 11,91	11,50 12,73	11,86 13,50	12,19 14,23	12,48 14,92	12,76 15,59

В табл.1 помещены значения первых трех относительных частот $\nu_j = \left(\Omega_j \rho / E\right)^{1/2}$ при $a / b = 1$ для различных E_1 / E_2

Для каждой ν_j в первых строках помещены значения при $n = 2$, а во вторых – $n = 16$ (были вычислины также для случаев $n = 4;8;12$). Были взяты определители до десятого порядка для выяснения процесса сходимости. Из табл.1 видно, что для $n = 16$ для приведенных отношений E_1 / E_2 при опроделении частот можно пользоваться средним значением для модуля упругости, то есть принимать $E_0(x) = (E_1 + E_2)/2$ (для некоторых E_1 / E_2 это имеет место уже при $n = 8$ или $n = 12$)



Фиг.1

На фиг.1 приведены кривы первой относительной частоты v_1, в зависимости от a / b для различных E_1 / E_2. Сплошные линии соответствуют случаю $n = 16$, а пунктирные - $n = 2$.

3. Рассмотрим теперь задачу, когда имеется неоднородность по толщине. Для симметрично собранной трехслойной балки, концы которой шарнирно оперты, частоты с точностью до λ_m^4 определяются

$$\omega_{m,1}^2 = \frac{J_3}{I_1} \lambda_m^4 (1 - \Lambda_m), \quad \omega_{m,2}^2 = K^2 \frac{J_4}{I_3} (1 + \Lambda_m) \tag{3.1}$$

$$\Lambda_m = \left(\frac{J_3}{K^2 J_4} + \frac{I_3}{I_1} \right) \lambda_m^2, \quad J_3 = \frac{h_1^3}{12} E_1 + HE_2$$

$$J_4 = K^2 (G_1 h_1 + 2G_2 h_2), \quad I_1 = \rho_1 h_1 + 2\rho_2 h_2, \quad I_3 = \rho_1 \frac{h_1^3}{12} + \rho_2 H$$

$$H = \frac{1}{6} \left(4h_2^3 + 6h_2^2 h_1 + 3h_2 h_1^2 \right), \quad h = h_1 + 2h_2$$

В табл.2 приведены значения $\frac{12 l^2 \Lambda_1}{\pi^2 h^2}$ при $K^2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_2$ для различных h_2 / h_1 и E_2 / E_1.

Таблица 2

E_2/E_1 \ h_2/h_1	0	0,01	0,1	1	5	10	100
0,1	2,28	2,29	2,40	3	4,29	4,86	5,74
0,2	1,72	1,75	1,97	3	4,18	4,50	4,87
0,3	1,32	1,37	1,79	3	3,79	3,94	4,10
0,4	1,08	1,18	1,53	3	3,37	3,42	3,47

Из табл.2 видно, как для большого интервала отношений E_2/E_1 и h_2/h_1 основную изгибную частоту можно определить по классической теории

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4}{\rho h l^4}\left(\frac{h_1^3}{12}E_1 + HE_2\right) \tag{3.2}$$

4. До сих пор мы предрпологали неоднородность детерминированной. Однако, полученные результаты можно использовать также для случаев, когда неоднородность является случайной функцией. Будем различать два типа неоднородности. В одном случае - неоднородность, которая возникает благодаря наличию в среде разнородных материалов.

Здесь нас будет интересовать неоднородность следующего вида. Известно, многие материалы, кристаллы которых анизотропные [4], в макромасштабе ведут себя как изотропные. Однако, если в исследуемом объекте (например, в балке) имеется всего несколько кристаллов и каждый из них по-разному ориентирован относительно какой-то оси, будем иметь неоднородность - в каждом участке, занимаемом данным кристаллом, будут свои упругие постоянные (таковыми являются, например, стержни-балки из силикона). Так как приводимый в дальнейшем материал носит иллюстративный характер, то по понятным соображениям рассматриваются наиболее простые модели и наиболее простой закон вероятности.

Будем считать, что кристаллы сами ортотропные, а ось балки не совпадает ни с одной из главных направлений упругости, то есть закон Гука в системе главных направлений записывается

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad \sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j \tag{4.1}$$

Если одни из кристаллов при получении балки поворачивались относительно оси z на некоторый угол $\varphi_k^{(1)}$, а другие относительно y на $\varphi_k^{(2)}$, то связь между напряжением и деформацией относительно оси балки (x) запишется

$$\varepsilon_i^{(k)} = b_{11}^{(k)} \sigma_i^{(k)}, \quad E_i^{(k)} = \frac{1}{b_{11}^{(k)}}, \quad (i = 1,2)$$

При этом

$$b_{11}^{(k)} = A^{(i)} + B^{(i)} \cos 2\varphi_k^{(i)} + C^{(i)} \cos^2 2\varphi_k^{(i)}$$

$$A^{(i)} = \frac{1}{4}\left(a_{11} + a_{1+i,1+i} + a_3^{(i)}\right), \quad B^{(i)} = \frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{1+i,1+i}\right)$$

$$C^{(i)} = \frac{1}{4}\left(a_{11} + a_{1+i,1+i} - a_3^{(i)}\right)$$

$$a_3^{(1)} = 2a_{12} + a_{66}, \quad a_3^{(2)} = 2a_{13} + a_{55}, \quad (i = 1,2).$$

Если известны законы распределения случайных величин $\varphi_k^{(i)}$, то по формулам преобразования случайных величин можно определить законы для $E_i^{(k)}$ и в дальнейшем для частот.

В частном случае, для трехслойной балки в классической постановке, или для примера п.2, когда при определении частот можно довольствоваться диагональным приблежением $\left(\Omega_m = (a_0 - 0{,}5a_{2m})m^4\right)$, частоты есть линейные функции от E_1 и E_2

$$\omega_m^2 = X_1(m)E_1 + X_2(m)E_2 \tag{4.3}$$

Выражение $X_i(m)$ можно взять из (2.5), (2.8) и (3.2).

Считая, что одни кристаллы поворачивалась относительно оси zZ а вторые - относительно оси y и для $\varphi_k^{(i)}$ справедливы законы равномерной плотности, для функции распределения квадрата частоты будем иметь

$$F(\omega^2) = f_1 f_2 \frac{1}{X_1 X_2} S \tag{4.4}$$

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\omega^2 - E_1(X_1 + X_2)\right]^2, & (X_1 + X_2)E_1 < \omega^2 < X_1 E_1' + X_2 E_1 \\ \frac{1}{2}(E_1' - E_1)\left[2\omega^2 - X_1(E_1 + E_2') - 2X_2 E_1\right], & X_1 E_1' + X_2 E_2 < \omega^2 < X_1 E_1' + X_2 E_2' \\ X_1 X_2 (E_1' - E_1)(E_2' - E_2) - \frac{1}{2}(\omega^2 - X_1 E_1' - X_2 E_2') & \end{cases}$$

$$X_1 E_1 + E_2' X_2 < \omega^2 < X_1 E_1' + X_2 E_2'$$

Формула (4.4) получена при определенных предположениях относительно E_i и X_i, что видно из выражений неравенств, кривые $E_k = E_k(\varphi_k)$ заменены ломаными

$$f_k(E_k)=\frac{dF_k}{dE_k},\quad F_k=\frac{2}{\pi}\left[\varphi_k^{(0)}\frac{E-E_k}{E_k^{'}-E_k}+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_k^{(0)}\right)\frac{E-E_k}{E_k^{''}-E_k}\right] \qquad (4.5)$$

$$E_k=E_k(\varphi_k=0),\quad E_k^{'}=E_k\left(\varphi_k=\frac{\pi}{2}\right),\quad E_k^{''}=E_k\left(\varphi_k=\varphi_k^{(0)}\right),$$

$\varphi_k^{(0)}$ - точка стационарности.

Для "однослойной" балки из однонаправленных кристаллов, каждый из которых на φ_1 перевернут относительно z и φ_1 -относительно новой оси y' коэффициент b_{11} будет

$$b_{11}=A+B\cos 2\varphi_2+C\cos^2 2\varphi_2 \qquad (4.6)$$

здесь

$$A=\frac{1}{4}\left[(A_1+a_{33}+2D+\Phi)+(B_1+2K+F)\cos 2\varphi_1+C_1\cos^2 2\varphi_1\right]$$

$$B=\frac{1}{2}\left[(A_1-a_{33})+B_1\cos 2\varphi_1+C_1\cos^2 2\varphi_1\right]$$

$$C=\frac{1}{4}\left[(A_1+a_{33}-2D-\Phi)+(B+2K-F)\cos 2\varphi_1+C_1\cos^2 2\varphi_1\right]$$

$$D=\frac{1}{2}(a_{13}+a_{23}),\quad K=\frac{1}{2}(a_{13}-a_{23})$$

$$\Phi=\frac{1}{2}(a_{44}+a_{55}),\quad F=\frac{1}{2}(a_{55}-a_{44})$$

Определяя стационарные точки поверхности $E(\varphi_1,\varphi_2)$ при определении вероятностных характеристик E по заданным законам относительно φ_i здесь поверхность заменяется "пирамидой".

В качестве примера взят материал силикона с данными

$c_{11}=166GPa,\ C_{12}=63{,}8GPa,\ C_{44}=79{,}5GPa$

$$A_{11}=\frac{C_{11}+C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})};\ A_{12}=-\frac{C_{12}}{(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})},\ A_{44}=\frac{1}{C_{44}} \qquad (4.7)$$

Расчеты дают $E_1=E_{\min}=130{,}6GPa$ (при $\varphi_1=\varphi_2=0$),

$$E_2=169{,}8GPa\left(\varphi_1=\frac{\pi}{4},\varphi_2=0\right),\quad E_{\max}=187{,}2GPa=E_3,$$

$$\left(\varphi_1=\frac{\pi}{4},\varphi_2=0{,}6158\right),\quad <E>154{,}5GPa.$$

Между прочим, среднее значение E, вычисленное здесь, мало отличается от вычисленных по формулам Фойгта $165{,}9GPa$ и Ройсса $154{,}87GPa$.

Для законов равномерных плотностей для φ_1 и φ_2 функция распределения для E (то же и для ω^2) будет

$$F(E)=\begin{cases}\dfrac{(E-E_1)^2}{(E_2-E_1)(E_3-E_1)}, & E_1\le E\le E_2\\[2ex] 1-\dfrac{(E_3-E)^2}{(E_3-E_1)(E_3-E_1)}, & E_2\le E\le E_3\end{cases}\qquad(4.8)$$

В последних примерах вопрос должен быть поставлен следующим образом. Какова вероятность, чтобы ω^2 (или ω) находился в требуемом интервале?

Расчеты показывают, что вероятность того, чтобы квадрат частоты находился соответственно ±5%, ±10%, ±15% от квадрата частоты со средним E, равны 0,34; 0,68; 0,92, а чтобы частота отличалась от средней ±5%, равна 0,69.

5. Кстати, приведенные в п.2 результаты можно использовать также и для решения обратной задачи: по заданным частотам определить неоднородность. Правда, в общем случае неоднородности по решению одной задачи невозможно этого сделать, однако, в частных случаях, например, если по длине неоднородность следующего типа - имеется конечное число интервалов и в каждом из них модуль упругости постоянен, то можно достигнуть цели, имея значения частот, равных по числу неизвестных модулей. В частности, по примеру п.2, по двум частотам можно определить E_1 и E_2. Если известны ω_1 и $\omega_2\left(\Omega_i=\dfrac{\omega_i^2 Fl^4}{\pi^4 J}\right)$, то E_1 и E_2 в первом приближении определятся

$$E_1=\frac{1}{17}(\xi+\eta),\quad E_2=\frac{1}{17}(\xi-\eta)\qquad(5.1)$$

$$\xi=\Omega_1+\Omega_2,\quad \eta=\frac{1}{\zeta}\sqrt{(\Omega_2-16\Omega_1)(16\Omega_2-\Omega_1)}$$

$$\zeta=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{4n}(2n-1)}{\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{1}{3}\frac{\cos\frac{3\pi}{4n}(2n-1)}{\cos\frac{3\pi}{4n}}\right]$$

Формулы выведены для случая одинаковых длин интервалов участков с различными коэффициентами. В то же время можно их уточнить, беря последующие приближения. Такую же процедуру можно применить также для определения рапределения температуры в балке, когда свойство материала изменяется в зависимости от температуры.

Выполнение данной работы поддерживалось американским университетом в Армении

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе. - Докл. АН АрмССР. 1969, т.49, №3, с.124-130.
2. Мовсисян Л.А. К устойчивости упруго-пластических стержней при ударных нагрузках. - Изв.АН АрмССР. Механика, 1986, т.39, №2, с.15-23.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приблеженные методы высшего анализа. - М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. - М.: Наука, 1977. 400с.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 26.10.1994