ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ВОЛНЫ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВДОЛЬ КРОМКИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Самвелян Л. А.

Լ. Ա. Սամվելյան

Նախապես լարված բարակ սալի եզրով տեղայնացված ալիքներ

Դիտարկվում է կիսաանվերջ սալ, որը ձգված է անվերջությունում կիրարվաօ ոավասա-բաշխվ բաշխված ուժով: Ուսումնասիրվում է այդ սալի ազատ եզրով տեղայնացված ալիքների տարածումը: Ցույց է տրված, որ հնարավոր են երկու տեսակի ալիքների տարածում, ինչպես Ռելեի տիպի, այնպես էլ մաքուր ծռման: Ստացված են նշված ալիքների գոյության պայմանները:

L.A. Sumvelian

The waves which are localized along initialy stressed thin plate edge

Известно, что вдоль торца полубесконечной тонкой пластинки могут распространяться упругие поверхностные волны как типа Релея, так и чисто изгибные [1,2]. В настоящей работе исследуется влияние предварительного однородного растяжения (сжатия) на скорости поверхностных волн.

1. Пусть пластинка занимает область $-\infty < x < \infty, \quad 0 \le y < \infty,$ $-h \le z \le h$. Пластина предварительно растянута (сжата) по направлению оси ox, так что начальное состояние пластинки определяется однородным напряженным состоянием, для которого $\sigma_{11}^0 = \sigma_0 = \mathrm{const}$ ($\sigma_0 > 0$ при растяжении, $\sigma_0 < 0$ при сжатии), а остальные компоненты тензора напряжений тождественно равны нулю.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза Кирхгофа, согласно которой задача обобщенного плоского напряженного состояния отделяется от задачи изгиба пластинки. При этом уравнения колебаний обобщенного плоского напряженного состояния пластинки относительно перемещений u, v срединной поверхности пластинки имеют вид

$$\Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, ν - коэффициент Пуассона, G - модуль сдвига, ρ - плотность материала пластинки.

Изгибные колебания пластинки описываются следующим уравнением:

$$D\Delta^2 w - 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \qquad (1.2)$$

При помощи преобразования

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (1.3)$$

система уравнений (1.1) приводится к раздельным уравнениям относительно φ и ψ

$$c_1^2\Delta\varphi \pm c_0^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2\Delta\psi \pm c_0^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (1.4)$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_0^2 = \frac{|\sigma_0|}{\rho}$$

Решения уравнений (1.4), удовлетворяющие условиям затухания амплитуды волны при $y \to \infty$, имеют вид

$$\varphi = Ae^{-k\nu_1 y}\exp i(\omega t - kx), \quad \psi = Be^{-k\nu_2 y}e^{i(\omega t - kx)} \qquad (1.5)$$

где

$$\nu_1^2 = 1 + \theta(\theta_1 - \eta), \quad \nu_2^2 = 1 + \theta_1 - \eta, \quad k > 0,$$

$$\theta = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-\nu}{2}, \quad \theta_1 = \pm\frac{c_0^2}{c_2^2}, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}, \quad \theta < 1, \quad |\theta_1| < 1 \qquad (1.6)$$

Из условия $\nu_1^2 > 0$, $\nu_2^2 > 0$ следует, что искомый параметр η, характеризующий скорость поверхностной волны, должен удовлетворять условию

$$0 < \eta < 1 + \theta_1 \qquad (1.7)$$

В случае, когда при y = 0 удовлетворяются условия свободного края пластинки, характеристическое уравнение, определяющее скорость локализованной волны, имеет вид

$$R(\eta) \equiv \left[2 + (\theta_1 - \eta)\right]^2 - 4\sqrt{1 + \theta(\theta_1 - \eta)}\cdot\sqrt{1 + (\theta_1 - \eta)} = 0 \qquad (1.8)$$

Очевидно, что уравнение (1.8) заменой $\eta_1 = \eta - \theta_1$ приводится к уравнению Рэлея. Отсюда следует, что при $\theta_1 < 0$ уравнение (1.8) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (1.7). При

$\theta_1 > 0$ уравнение (1.8) имеет два решения : $\eta = \theta_1$ и $\eta = \eta_R$. Легко показать, что решение $\eta = \theta_1$ - тривиальное решение $(u = v = 0)$. В частности, если $\theta = 1/3$ $(\nu = 1/3)$, скорость поверхностной волны определяется следующим образом :

$$\eta = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \theta_1$$

Легко показать, что в случаях граничных условии закрепления края пластинки, либо условий закрепления края, либо условий Навье, локализованная волна вдоль края пластинки не может существовать.

2. Рассмотрим изгибные волны, локализованные вдоль края y = 0 пластинки. Имея в виду требования затухания, решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$w = \left(Ae^{-k\alpha_1 y} + Be^{-k\alpha_2 y}\right)\exp i(\omega t - kx) \tag{2.1}$$

где

$$\alpha_1^2 = 1 + \sqrt{\xi^2 - \gamma}, \quad \alpha_2^2 = 1 - \sqrt{\xi^2 - \gamma}$$
$$\xi^2 = \frac{2\rho h\omega^2}{Dk^4}, \quad \gamma = \frac{2h\sigma_0}{Dk^2} \tag{2.2}$$

Для того, что решение (2.1) было затухающим при $y \to \infty$, необходимо выполнение условия

$$0 \le \xi^2 < 1 + \gamma \tag{2.3}$$

Отсюда, очевидно, что на параметр γ следует наложить ограничение $\gamma > -1$, т.к. при $\gamma \le -1$ (при сжатии) соответствующая форма волны будет неустойчивой.

Граничные условия для свободного края пластинки y = 0 (равенство нулю изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы) имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{2.4}$$

Подставляя решение (2.1) в (2.4), получим систему линейных однородных уравнений относительно произвольных постоянных A, B. Приравняв детерминант указанной системы уравнений нулю, после некоторых преобразований получим дисперсионное уравнение, определяющее скорость поверхностной изгибной волны

$$K_1(\eta) \equiv \alpha_1^2\alpha_2^2 + 2(1-\nu)\alpha_1\alpha_2 - \nu^2 = 0 \tag{2.5}$$

Аналогичного вида дисперсионное уравнение получено также в [4]. Определение скорости поверхностной волны фактически приводится к исследованию корней квадратного уравнения (2.5) относительно $\alpha_1\alpha_2$. Отсюда легко получить, что при $\gamma \geq 0$ (растяжении) уравнение (2.5) всегда имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (2.3). При этом соответствующий корень находится в промежутке $(\gamma, 1+\gamma)$, откуда следует, что выражения (2.2) для α_1 и α_2 действительны. Следовательно, амплитуда волны (2.1) затухает по глубине без колебаний. В случае $-1 < \gamma < 0$ (сжатие), изгибная поверхностная волна существует не для всех γ. Условие существования определяется следующим образом :

$$\gamma > -2 + \nu + \sqrt{(1-\nu)^2 + \nu^2} \qquad (2.6)$$

Например, при $\nu = 0$ должно выполняться условие $\gamma > -1$, что совпадает с ограничением на устойчивость, при $\nu = \frac{1}{3}$ и $\nu = \frac{1}{2}$ соответственно, $\gamma > -0{,}92$ и $\gamma > -0{,}8$.

Можно показать, что при других классических граничных условиях на краю y = 0 поверхностная волна не существует.

3.Пусть полубесконечная пластинка занимает область $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h \leq z \leq h$. Рассмотрим волны, локализованные вдоль края X = 0, где приложена предварительно растягивающая (сжимающая) нагрузка. Решение уравнения (1.2), с учетом требования затухания амплитуды волны, при $x \to \infty$ имеет вид

$$w = \left(Ae^{-k\beta_1 x} + Be^{-k\beta_2 x}\right)\exp i(\omega t - ky) \qquad (3.1)$$

где

$$\beta_{1,2} = 1 + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\xi^2 + \gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \qquad (3.2)$$

Условие затухания решения (3.1) при $x \to 0$ имеет вид

$$0 < \xi^2 < 1 \qquad (3.3)$$

На краю $x = 0$ принимаются условия равенства нулю изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы. Эти условия записываются следующим образом :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2h\sigma_*}{D} w\right] = 0 \qquad (3.4)$$

где $\sigma_* = \sigma_0$ в случае консервативной нагрузки на краю $x = 0$,

$\sigma_* = 0$ в случае следующей нагрузки.

Требование, чтобы решение (3.1) удовлетворяло граничным условиям (3.4), приводит к следующему дисперсионному уравнению :

$$K(\xi) = \beta_1^2 \beta_2^2 + \left[2(1-\nu) + \gamma_*\right]\beta_1\beta_2 - \nu(\nu + \gamma - \gamma_*) = 0 \qquad (3.5)$$

здесь $\gamma_* = \gamma$ для консервативной, $\gamma_* = 0$ для следующей нагрузки.

Исследование уравнения (3.5) при условии (3.3) показывает, что изгибная поверхностная волна всегда существует (с учетом $\gamma > -1$) в случае консервативной нагрузки ($\gamma_* = \gamma$). В случае же следующей нагрузки, необходимое и достаточное условие существования поверхностной волны получается в виде

$$-\nu < \gamma < \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{\nu} \qquad (3.6)$$

Следует отметить, что в случае растяжения $(\gamma > 0)$, при проверке выполнения правой части неравенства (3.6), необходимо также сравнение с условием прочности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). - М. : Наука, 1982. 336 с.
2. Коненков Ю. К. Об изгибной волне "рэлеевского" типа. - Акуст. ж., 1960, т. 6 в. 1, с. 124-126.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания). - М. : Наука, 1987. 360 с.
4. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Об изгибной волне, локализованной вдоль кромки токонесущей пластинки. - В сб. : Инженерно-физические проблемы новой техники. Изд. МГТУ, 1992. с.58-59.