ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ЗАДАЧА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Овсепян В.В.

Վ. Վ. Հովսեփյան

Գլանային խոռոչով առաձգական միջավայրում մագնիսաառաձգական մակերևույթային ալիքների խնդիրը

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող իդե-ալական հաղորդիչ միջավայրի, խոռոչի ուղղությամբ տարածվող, մագնիսաառաձգական մա-կերևույթային ալիքների գոյության հարցը:

Մակերևույթային ալիքների գոյության համար դուրս է բերված բավարար պայման: Օգ-տագործելով Բեսելի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ բանաձևերը ստացվել է վերը նշված պայ-մանի մոտավոր տարբերակը:

Աշխատանքի վերջում Պուասոնի գործակցի և մագնիսական դաշտի մի քանի տարբեր արժեքների համար զետեղված են այդ պայմանի, ինչպես նաև նրա մոտավոր տարբերակի թվա-յին հաշվարկները:

V.V. Hovsepian

The problem for the surface magnitoelastic waves in the elastic medium with the cylindrical cavity

В работе исследован вопрос существования поверхностных магнитоупругих волн для бесконечно упругого идеально - проводимого пространства с цилиндрической полостью. По направлению образующей цилиндра действует постоянное магнитное поле.

Для существования поверхностных волн получено достаточное условие и его приближенный вариант. Для этих условий приведены результаты численных расчетов при различных значениях магнитного поля и коэффициента Пуассона.

Задачам о распространении поверхностных волн в пространстве с цилиндрической полостью посвящен ряд работ [1-4]. В работе [5] рассмотрено влияние магнитного поля на распространение магнитоупругих цилиндрических волн сжатия от полости. В данной работе в цилиндрической системе координат (r,φ,z) исследуется распространение поверхностной магнитоупругой волны в бесконечном, упругом, идеально проводимом пространстве с цилиндрической полостью. По направлению образующей цилиндрической полости действует постоянное магнитное поле $(0, 0, H_0)$

1.Общие граничные условия при $r = a$ возьмем в виде [6]

$$\left[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}\right] \times \hat{n} = \frac{4\pi}{c}\overline{J}_s + \frac{v_n}{c}\left[\overline{E}^{(e)} - \overline{E}\right], \quad \left[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}\right]\hat{n} = 0$$

$$\left[\overline{E}^{(e)} - \overline{E}\right]\hat{n} = 4\pi\rho_s, \quad \left[\overline{E}^{(e)} - \overline{E}\right] \times \hat{n} = -\frac{v_n}{c}\left[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}\right]$$

$$-\overline{\sigma}_i\hat{n} + \left[\overline{T}_i^{(e)} - \overline{T}_i\right]\hat{n} = 0 \qquad (1.1)$$

где $v_n = \frac{\partial u_r}{\partial t}$, $\overline{J}_s$ - вектор плотности полного электрического тока ; ρ_s объемная плотность электрического заряда; с - электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в пустоте ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек); $\overline{\sigma}_i = \sigma_{ir}\hat{i}_r + \sigma_{i\varphi}\hat{i}_\varphi + \sigma_{iz}\hat{i}_z$; $\overline{T}_i^* = \overline{T}_{ir}^*\hat{i}_r + \overline{T}_{i\varphi}^*\hat{i}_\varphi + \overline{T}_{iz}^*\hat{i}_z$ (под T^* понимается как T, так и $T^{(e)}$); $\overline{H}, \overline{H}^{(e)}$ и $\overline{E}, \overline{E}^{(e)}$ - векторы напряженности соответственно магнитного и электрического полей.

Уравнения Максвелла следующие

$$r < a, \ \operatorname{rot}\overline{H}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial\overline{E}^{(e)}}{\partial t}, \ \operatorname{div}\overline{H}^{(e)} = 0, \ \operatorname{rot}\overline{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{H}^{(e)}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\overline{E}^{(e)} = 0. \qquad (1.2)$$

Учитывая

$$\overline{H} = \overline{H}\left(h_r, h_\varphi, H_0 + h_z\right), \quad \overline{H}^{(e)} = \overline{H}^{(e)}\left(h_r^{(e)}, h_\varphi^{(e)}, H_0^{(e)} + h_z^{(e)}\right),$$

$H_0 = H_0^{(e)}$, $\overline{E} = \overline{E}\left(e_r, e_\varphi, e_z\right)$, $\overline{E}^{(e)} = \overline{E}^{(e)}\left(e_r^{(e)}, e_\varphi^{(e)}, e_z^{(e)}\right)$, после линеаризации тензора Максвелла получим граничные условия в виде

$$h_z^{(e)} - h_z = 4\pi c^{-1}J_\varphi, \quad h_\varphi^{(e)} - h_\varphi = 4\pi c^{-1}J_z, \quad J_z = 0$$

$$e_r^{(e)} - e_r = 4\pi\rho_s, \quad h_r^{(e)} = h_r, \quad e_z^{(e)} = e_z, \quad e_\varphi^{(e)} = e_\varphi \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{H_0}{4\pi}\left(h_z^{(e)} - h_z\right), \quad \sigma_{zr} = \frac{H_0}{4\pi}\left(h_r^{(e)} - h_r\right), \quad \sigma_{\varphi r} = 0$$

Для идеального проводника

$$h_r = H_0\frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad h_\varphi = H_0\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad h_z = -H_0\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\right) \qquad (1.4)$$

$$e_r = -\frac{H_0}{c}\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}, \quad e_\varphi = \frac{H_0}{c}\frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad e_z = 0 \qquad (1.5)$$

2. Рассмотрим задачу в плоскости (r, z). Компоненты перемещений u_r, $u_z (u_\varphi = 0)$ и компоненты возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты φ. Рассматриваются установившиеся колебания.

Для этого случая из уравнения Максвелла имеем

$$r < a \quad \nabla^2 h_z^{(e)} = -\frac{\omega^2}{c^2} h_z^{(e)}, \quad \frac{\partial e_\varphi^{(e)}}{\partial z} + \frac{e_\varphi^{(e)}}{r} = \frac{i\omega}{c} h_z^{(e)} \tag{2.1}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Уравнения движения с учетом пондеромоторной силы будут

$$c_l^2\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + c_t^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} +$$

$$+\frac{H_0}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) = -\omega^2 u_r \tag{2.2}$$

$$c_t^2\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + c_l^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = -\omega^2 u_z$$

Постановка задачи следующая : решаются уравнения движения (2.2), уравнения Максвелла (2.1) с граничными условиями (1.3).

Применяя интегральное преобразование Фурье по z соответственно к уравнениям движения (2.2), к уравнениям (2.1) и к граничным условиям (1.3), получим

$$\left(c_l^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\right)\left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2}\right) + \left[\left(c_t^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\right)\alpha^2 - \omega^2\right]u_1 -$$

$$-i\alpha\left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{du_3}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

$$c_t^2\left(\frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_3}{dr}\right) - \left(\alpha^2 c_l^2 - \omega^2\right)u_3 - i\alpha\left(c_l^2 - c_t^2\right)\left(\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 h_3^{(e)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh_3^{(e)}}{dr} - \alpha^2 h_3^{(e)} = -\frac{\omega^2}{c^2} h_3^{(e)}, \quad \frac{de_2^{(e)}}{dr^2} + \frac{e_2^{(e)}}{r} = \frac{i\omega}{c} h_3^{(e)} \tag{2.4}$$

$$c_l^2 \frac{du_1}{dr} - i\alpha\left(c_l^2 - 2c_t^2\right)u_3 + \frac{1}{a}\left(c_l^2 - 2c_t^2\right)u_1 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}\left(\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r}\right) = -\frac{H_0}{4\pi\rho} h_3^{(e)}$$

$$\frac{du_3}{dr} - i\alpha u_1 = 0, \quad e_2^{(e)} = \frac{H_0 i\omega}{c} u_1 \tag{2.5}$$

где α - параметр интегрирования (или волновое число по образующей цилиндрической полости) ; c_l и c_t - скорости распространения соответственно продольной и поперечной волны ; $u_1, u_3, h_3^{(e)}$ и $e_2^{(e)}$ интегральные преобразования Фурье соответственно функций $u_r, u_z, h_z^{(e)}$ и $e_\varphi^{(e)}$; ρ - плотность материала.

Решения уравнений (2.3) и (2.4) имеют вид

$$u_1 = A_1 K_1(\lambda_1 r) + A_2 K_1(\lambda_2 r), \quad u_3 = B_1 K_0(\lambda_1 r) + B_2 K_0(\lambda_2 r) \tag{2.6}$$

$$h_3^{(e)} = D_0^{(e)} I_0(v_1 r), \quad e_2^{(e)} = -\frac{i\omega}{c v_1} D_0^{(e)} I_1(v_1 r) \tag{2.7}$$

где $I_n(x)$ и $K_n(x)$ $(n = 0,1)$ - модифицированные функции Бесселя ; A_n и B_n - искомые постоянные

$$A_n = \varphi_n B_n, \quad \varphi_n = -\left(\lambda_n^2 c_l^2 + \omega^2 - \alpha^2 c_t^2\right)\left[i\alpha\lambda_n\left(c_l^2 - c_t^2\right)\right]^{-1} \tag{2.8}$$

λ_n являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{gathered}(1+\theta\chi)\lambda^4 + \left[\eta(\theta\chi + \theta + 1) - \chi(1+\theta) - 2\right]\lambda^2 + \\ + (1 + \chi - \eta)(1 - \theta\eta) = 0\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\theta = c_t^2 / c_l^2$, $\eta = \omega^2 (\alpha c_t)^{-2}$, $\chi = H_0^2 / 4\pi\rho c_t^2$, $\lambda_n = \lambda_n / \alpha$.

Подставляя (2.6) и (2.7) в граничные условия (2.5), получим следующее дисперсионное уравнение :

$$\begin{gathered}R(\eta) \equiv \left[\lambda_1^2(1-2\theta) - \theta\eta + 1\right]\left[(1-2\theta)(1-\theta) + \theta(1+\theta\chi)\lambda_2^2 + \right. \\ \left. +(\theta\eta - 1)(1+\theta\chi)\right]\lambda_2 \frac{K_0(\lambda_2\alpha a)}{K_1(\lambda_2\alpha a)} - \left[\lambda_2^2(1-2\theta) - \theta\eta + 1\right]\times \\ \times\left[(1-2\theta)(1-\theta) + \theta(1+\theta\chi)\lambda_1^2 + (\theta\eta - 1)(1+\theta\chi)\right]\lambda_1 \times \\ \times\frac{K_0(\lambda_1\alpha a)}{K_1(\lambda_1\alpha a)} - \theta(\theta\eta - 1)\left[\frac{2}{\alpha a} + v_1\chi\frac{I_0(v_1\alpha a)}{I_1(v_1\alpha a)}\right](\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(1-\theta) = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $v_1 = \left(1 - \omega^2 / \alpha^2 c^2\right)^{1/2}$

Отметим, что для предельных случаев $\chi = 0$ и $\alpha a \to \infty$ из уравнений (2.10) получим дисперсионные уравнения, приведенные в работах [1] и [7].

Исследуем дисперсионное уравнение (2.10) в интервале $0 < \eta < 1 + \chi$.

При $\eta = 0$ $\lambda_2^2 = 1$, $\lambda_1^2 = \dfrac{1+\chi}{1+\theta\chi}$ и

$$R(0) = -\theta(1-\theta)^2 \left\{ -4\lambda_1 \frac{K_0(\lambda_1 \alpha a)}{K_1(\lambda_1 \alpha a)} + \frac{(2+\chi)^2}{1+\theta\chi} \frac{K_0(\alpha a)}{K_1(\alpha a)} + \frac{\chi}{1+\theta\chi} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{2}{\alpha a} + v_1 \chi \frac{I_0(v_1 \alpha a)}{I_1(v_1 \alpha a)} \right] \right\} < 0.$$

При $\eta = 1+\chi \quad \lambda_2^2 = 0, \quad \lambda_1^2 = (1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)(1+\theta\chi)^{-1}$.

Для существования хотя бы одного решения в интервале $0 < \eta < 1+\chi$, достаточно потребовать $R(1+\chi) > 0$, то есть

$$\frac{K_0\left(\alpha a\sqrt{(1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)/1+\theta\chi}\right)}{K_1\left(\alpha a\sqrt{(1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)/1+\theta\chi}\right)} > \frac{2}{\alpha a}\sqrt{(1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2)/1+\theta\chi} \qquad (2.11)$$

При $\chi = 0$ из условия (2.11) получим необходимое и достаточное условие для существования поверхностной волны без учета магнитного поля, приведенное в работе [1].

Если для больших аргументов в разложениях бесселевых функций сохранить только два слагаемых, то из условия (2.11) получим

$$8\sqrt{1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2}(\alpha a)^2 - \frac{1}{\sqrt{1+\theta\chi}}(17-16\theta-15\theta\chi-16\theta\chi^2)\alpha a - \qquad (2.12)$$

$$-6\sqrt{1-\theta\chi-\theta-\theta\chi^2} > 0$$

3.Некоторые результаты численных расчетов условия (2.11), (2.12) и работы [1] при различных значениях $\theta = (1-2v)[2(1-v)]^{-1}$ и χ приведены в табл. 1 соответственно в столбцах I, II и III. Здесь λ длина волны, D - диаметр цилиндра.

Таблица 1

v	$\lambda\theta^{-1} = \pi(\alpha a)^{-1}$					
			I	II		III
	$\chi = 10^{-5}$	χ =0,05	χ =0,08	χ =0,1	χ =0,05	
-0,5	1,88085	1,86336	1,8611	1,86051	1,79473	1,88359
-0,3	1,80385	1,77336	1,76151	1,7565	1,74445	1,80721
0	1,6626	1,61231	1,58634	1,57084	1,62548	1,66828
0,3	1,47025	1,39671	1,35531	1,32878	1,45033	1,48358
0,5	1,26903	1,15105	1,04744	1,03761	1,29118	1,31628

Для фиксированного значения v и χ, если $\alpha a > \pi D\lambda^{-1}$, существует поверхностная волна, скорость которой дается решением уравнения

(2.10) в промежутке $0 < \eta < 1 + \chi$. Отметим, что в случае задачи с учетом магнитного поля поверхностная волна возникает при больших значениях параметра αa, чем при аналогичной задаче без учета магнитного поля. Отметим также, что с увеличинием значения напряженности магнитного поля увеличивается величина параметра αa.

Автор выражает благодарность Белубекяну М. В., а также участникам семинара "Волновые процессы" Института механики НАН Армении за ценные советы при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М. В., Овсепян В. В. Об условии существования поверхностной волны для упругого пространства с цилиндрической полостью. - Докл. АН Армении, 1990, т. 91, N 4, с. 169-172.
2. Миндлин Я. А. Распространение волн по поверхности бесконечно длинного цилиндра, представляющего собой вырез в бесконечно упругом пространстве. - ДАН СССР, 1944, т. 42, N 4, с. 155-159.
3. Викторов И. А. Волны типа рэлеевских на цилиндрических поверхностях. - Акуст. ж., 1958, т. 1У, вып. 2, с. 131-136.
4. Biot M. A. Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bare Contaning a Fluid. - J. App. ph. 1952, vol. 23, N 9, p. 997-1005.
5. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитоупругих средах. - Киев: Наукова думка, 1975. 164 с.
6. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. - Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 124 с.
7. Kaliski S., Rogula D. Rayleigh waves in a magnetic fields in the case of a perfect contuctor. - Proc. Vibr. Probl., Pol Acad. Eci., 1960, 1, N 5, p. 63-80.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
12. 09. 1994