ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 3, 1996 Механика

ИЗГИБ ПЪЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան
Պիեզոկերամիկ գլանային թաղանթի ծռումը ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Բարակ պիեզոկերամիկ սալերի և թաղանթների լայն կիրառությունը, որպես էներգիայի ցածր հաճախականությամբ էլեկտրամեխանիկական փոխակերպիչների ակտիվ էլեմենտներ, մեխանիկայի ասպարեզում առաջ են բերվում մի շարք կարևոր խնդիրներ:

Մինչ այժմ այդ խնդիրները հիմնականում ուսումնասիրվել են Կիրխհոֆ-Լյավի հիպոթեզների օգտագործմամբ, պիեզոկերամիկայից պատրաստված ըստ հաստության բևեռացված, թաղանթների և սալերի տեսության կառուցման համար [6, 7]:

Սակայն Կիրխհոֆ-Լյավի տեսությամբ պիեզոկերամիկ սալերի և թաղանթների խնդիրները լուծելիս առաջ են գալիս որոշակի անճշտություններ, այդ պատճառով առաջարկվում է խնդիրները լուծել օգտագործելով ճշգրտված տեսությունը [1, 2]:

Ճշգրտված տեսությամբ լուծված են սալերի մի շարք խնդիրներ Ս. Ա. Համբարձումյանի և Մ. Վ. Բելուբեկյանի [3, 4, 5] աշխատանքներում, թաղանթների համար [8] աշխատությունում:

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է պիեզոկերամիկ գլանային թաղանթի մեխանիկական վարքագիծը մի քանի դեպքերի համար:

A. V. Babayan
Bending of a piezoceramical cylindrical shell with the account of transverse shears.

Широким применением тонких пьезокерамических пластин и оболочек в качестве активных элементов низкочастотных электромеханических преобразователей обусловлены исследования задач электроупругости тонких тел.

Эти задачи в основном исследованы с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява [6].

Однако при решении этих задач с помощью Кирхгофа-Лява возникают некоторые неточности, которые могут быть преодолены с использованием уточненных теорий [1, 2].

В работах С.А. Амбарцумяна и М.В. Белубекяна [3,4,5] с помощью уточ-ненной теории решены некоторые задачи для пластин, а в работе Б.А.Кудрявцева, В. З. Партона, Н. А. Сеника [7] - для оболочек.

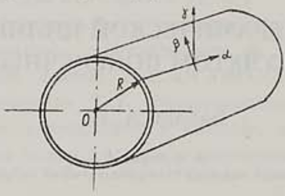
В настоящей работе с помощью уточненной теории [3,4,5] исследовано поведение пьезокерамической круговой цилиндрической оболочки при различных типах нагружения.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу пьезокерамической круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h, равномерно поляризованную вдоль нормали к срединной поверхности оболочки.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат $O\alpha\beta\gamma$ так, что поверхность $\alpha O\beta$ совпадает со срединной поверхностью оболочки, т. е. материал оболочки поляризован по координатным линиям γ (фиг. 1).

В этом случае уравнения состояния запишутся аналогично [4].

Компоненты деформации и уравнения равновесия оболочки представляются известным образом [2].



Фиг.1

Пусть лицевые поверхности оболочки $\gamma = \pm\frac{h}{2}$ электродированы и заданы значения электрического потенциала $\varphi(\alpha,\gamma)$ на этих поверхностях:

$$\varphi = \varphi(\alpha,\gamma) = \pm V_0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm\frac{h}{2} \tag{1.1}$$

Уравнения электродинамики для пьезосреды в электростатическом приближении запишутся следующим образом [4]:

$$divD = 0 \qquad rotE = 0 \tag{1.2}$$

Введя электрический потенциал φ по формуле

$$E = -grad\varphi \tag{1.3}$$

тождественно удовлетворим второму уравнению (1.2), так как

$$E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \qquad E_2 = 0 \qquad E_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} \tag{1.4}$$

а первое уравнение (1.2) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial D_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial D_3}{\partial\gamma} = 0 \tag{1.5}$$

Предполагается, что цилиндрическая оболочка нагружена лишь поперечной нагрузкой Z^+ и Z^-, приложенной на поверхностях оболочки $\gamma = \pm\frac{h}{2}$, соответственно.

Задача рассматривается на основании уточненной теории оболочки [1], при этом вместо ранее принятого предположения $e_{33} = O$ предполагается, что поперечная нормальная деформация, обусловленная электрическим полем, не может быть пренебрежена, и представляется следующим образом [4, 7]:

$$e_{33} \approx d_{33} E_3 \tag{1.6}$$

В соответствии с основным предположением уточненной теории [1] принимается также, что

$$\sigma_{13} = f(\gamma)\varphi_1(\alpha) \qquad \sigma_{23} = 0 \tag{1.7}$$

где φ_1 искомая функция, $f(\gamma)$ заданная функция, выбранная следующим образом:

$$f(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right) \tag{1.8}$$

Из уравнений равновесия после известных преобразований для нормального напряжения σ_{33} получим:

$$\sigma_{33} = Z_1 + \frac{12}{h^3} I_0(\gamma) Z_2 \tag{1.9}$$

где

$$Z_1 = \frac{1}{2}\left(Z^+ - Z^-\right), \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{1.10}$$

$$I_0(\gamma) = \int_0^\gamma f(\gamma) d\gamma = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3}\right) \tag{1.11}$$

Обобщая основные положения уточненной теории на случай задачи электроупругости, предполагаем, что [4]

$$\varphi = \frac{8}{h^3} f(\gamma)\Phi_1(\alpha) + \frac{8\gamma}{h^5} f(\gamma)\Phi_2(\alpha) + \frac{2\gamma}{h} V_0 \tag{1.12}$$

где Φ_1, Φ_2 – искомые функции, характиризующие электростатический потенциал оболочки.

Принимая (1.6) – (1.12), одновременно удовлетворяем условиям на поверхностях $\gamma = \pm\frac{h}{2}$ оболочки, которые имеют следующий вид:

$$\sigma_{13} = 0, \ \sigma_{23} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm\frac{h}{2}$$

$$\sigma_{33} = Z^+ \quad \text{при} \quad \gamma = \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{33} = -Z^- \quad \text{при} \quad \gamma = -\frac{h}{2}$$

$$\varphi = \pm V_0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm\frac{h}{2} \tag{1.13}$$

Решая уравнения состояния относительно σ_{11}, σ_{22} и σ_{12}, получим:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = S_{11}\left(e_{11} + \nu e_{22}\right) + A_1'\sigma_{33} - B_1'E_3 \\
&\sigma_{22} = S_{11}\left(e_{22} + \nu e_{11}\right) + A_1'\sigma_{33} - B_1'E_3 \\
&\sigma_{12} = 0
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
&S_{11} = \frac{S_{11}^E}{\Delta} = \frac{1}{S_{11}^E\left(1-\nu^2\right)} \qquad \Delta = \left(S_{11}^E\right)^2 - \left(S_{12}^E\right)^2 \\
&A_1' = \frac{S_{13}^E\left(S_{11}^E - S_{12}^E\right)}{\Delta} = \frac{\nu'}{1-\nu} \qquad \nu = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E} \\
&B_1' = \frac{d_{13}\left(S_{11}^E - S_{12}^E\right)}{\Delta} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)} \qquad \nu' = -\frac{S_{13}^E}{S_{11}^E}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Подставляя (1.12) в (1.4), для компонент вектора напряженности электрического поля получим:

$$\begin{aligned}
&E_1 = -\frac{8}{h^3} f(\gamma)\frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{8\gamma}{h^5} f(\gamma)\frac{d\Phi_2}{d\alpha} \\
&E_2 = 0 \\
&E_3 = \frac{8\gamma}{h^3}\Phi_1 - \frac{4}{h^5}\left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2\right)\Phi_2 - \frac{2}{h}V_0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Для компонент вектора электрической индукции получим:

$$\begin{aligned}
&D_1 = -\frac{8\varepsilon_{11}^T}{h^3} f(\gamma)\frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{8\gamma\varepsilon_{11}^T}{h^5} f(\gamma)\frac{d\Phi_2}{d\alpha} + d_{15}f(\gamma)\varphi_1 \\
&D_2 = 0 \\
&D_3 = \frac{8\gamma}{h^3}\varepsilon_{33}^*\Phi_1 - \frac{4}{h^5}\left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2\right)\varepsilon_{33}^*\Phi_2 - \frac{2}{h}\varepsilon_{33}^*V_0 + B_1'\left(e_{11} + e_{22}\right) + d_{33}^*\left(Z_1 + \frac{12}{h^3}I_0(\gamma)Z_2\right)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

где

$$\varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^E(1-\nu)}, \qquad d_{33}^* = d_{33} + d_{31}\frac{2\nu'}{1-\nu} \tag{1.18}$$

Предполагая, что при $\gamma = 0$, $U_1 = U(\alpha)$, $U_2 = 0$, $U_3 = W(\alpha)$ для компонент перемещения какой-либо точки оболочки, согласно (1.6), (1.7) и (1.16), получим:

$$U_1 = U - \gamma\frac{dW}{d\alpha} - \frac{8}{h^3}\left(d_{15}I_0(\gamma) + \frac{\gamma^3}{6}d_{33}\right)\frac{d\Phi_1}{d\alpha} + S_{44}^E I_0(\gamma)\varphi_1 + \frac{8}{h^5}\left(d_{33} - d_{15}\right)I_2(\gamma)\frac{d\Phi_2}{d\alpha}$$

$$U_2 = 0 \tag{1.19}$$

$$U_3 = W + \frac{4\gamma^2}{h^3} d_{33}\Phi_1 - \frac{4\gamma}{h^5} d_{33}\left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2\right)\Phi_2 - \frac{2\gamma}{h} d_{33} V_0$$

где

$$I_2(\gamma) = \int_0^\gamma \gamma\, f(\gamma) d\gamma = \frac{\gamma^2}{8}\left(\frac{h^2}{2} - \gamma^2\right) \tag{1.20}$$

На основе (1.19) получаются деформации e_{ik} и напряжения σ_{ik}

$$\sigma_{11} = S_{11}\left(\frac{dU}{d\alpha} + \frac{\nu}{R+\gamma} W\right) - S_{11}\gamma \frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11} S_{44}^E I_0(\gamma)\frac{d\varphi_1}{d\alpha} -$$

$$-S_{11}\frac{8}{h^3}\left(d_{15} I_0(\gamma) + \frac{d_{33}}{6}\gamma^3\right)\frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2} + S_{11}\frac{8}{h^5}(d_{33} - d_{15}) I_2(\gamma)\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} +$$

$$+\frac{8\gamma}{h^3}\left(\frac{S_{11}\nu}{R+\gamma}\frac{\gamma d_{33}}{2} - B_1'\right)\Phi_1 - \frac{4}{h^5}\left(\frac{S_{11}\nu}{R+\gamma} 2\gamma d_{33} f(\gamma) - B_1'\left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2\right)\right)\Phi_2 + A_1'\left(Z_1 + \frac{12}{h^3} I_0(\gamma) Z_2\right) -$$

$$-\frac{2}{h}\left(\frac{S_{11}\nu}{R+\gamma}\gamma d_{33} - B_1'\right)V_0 \tag{1.21}$$

$$\sigma_{22} = S_{11}\left(\frac{W}{R+\gamma} + \nu\frac{dU}{d\alpha}\right) - S_{11}\nu\gamma\frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11} S_{44}^E \nu I_0(\gamma)\frac{d\varphi_1}{d\alpha} -$$

$$-S_{11}\nu\frac{8}{h^3}\left(d_{15} I_0(\gamma) + \frac{\gamma^3}{6} d_{33}\right)\frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2} + S_{11}\nu\frac{8}{h^5}(d_{33} - d_{15}) \times$$

$$\times I_2(\gamma)\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{8\gamma}{h^3}\left(\frac{S_{11}}{R+\gamma}\frac{\gamma d_{33}}{2} - B_1'\right)\Phi_1 - \frac{4}{h^5}\left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} 2\gamma d_{33} f(\gamma) - B_1'\left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2\right)\right)\Phi_2 +$$

$$+A_1'\left(Z_1 + \frac{12}{h^3} I_0(\gamma) Z_2\right) - \frac{2}{h}\left(\frac{S_{11}}{R+\gamma}\gamma d_{33} - B_1'\right)V_0$$

$$\sigma_{12} = 0$$

Из условий статической эквивалентности, для внутренних сил и моментов, отнесенных к единице длины срединной поверхности оболочки с точностью $1 \pm \dfrac{\gamma}{R_i} \approx 1$, получим:

$$T_1 = S_{11} h\left[\frac{dU}{d\alpha} + \frac{\nu}{R} W\right] + \frac{7 S_{11}}{240}(d_{33} - d_{15})\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{S_{11}\nu d_{33}}{3R}\Phi_1 + A_1' Z_1 h + 2B_1' V_0$$

$$T_2 = S_{11}h\left[\frac{W}{R} + \nu\frac{dU}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}\nu}{240}\left(d_{33} - d_{15}\right)\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{S_{11}d_{33}}{3R}\Phi_1 + A_1'Z_1h + 2B_1'V_0$$

$$S_{12} = S_{21} = 0$$

$$H_{12} = H_{21} = 0 \qquad (1.22)$$

$$N_1 = \frac{h^3}{12}\varphi_1 \qquad N_2 = 0$$

$$M_1 = -S_{11}\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11}S_{44}^E\frac{h^5}{120}\frac{d\varphi_1}{d\alpha} - S_{11}\frac{h^2}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4}\right)\frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2} -$$

$$-\frac{2}{3}B_1'\Phi_1 - S_{11}\nu\frac{d_{33}}{30R}\Phi_2 + A_1'\frac{h^2}{10}Z_2 - \frac{S_{11}\nu d_{33}h^2}{6R}V_0$$

$$M_2 = -S_{11}\nu\frac{h^3}{12}\frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11}S_{44}^E\nu\frac{h^5}{120}\frac{d\varphi_1}{d\alpha} - S_{11}\nu\frac{h^2}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4}\right)\times$$

$$\times\frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2} - \frac{2B_1'}{3}\Phi_1 - \frac{S_{11}d_{33}}{30R}\Phi_2 - \frac{S_{11}d_{33}h^2}{6R}V_0 + A_1'\frac{h^2}{10}Z_2$$

Уравнения равновесия во внутренних силах и моментах имеют вид [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha} = 0, \qquad Z_2 + \frac{\partial N_1}{\partial\alpha} - \frac{T_2}{R} = 0, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial\alpha} - N_1 = 0 \qquad (1.23)$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.22) в (1.23), приходим к следующей системе трех уравнений относительно пяти искомых функций $U, W, \varphi, \Phi_1, \Phi_2$:

$$S_{11}h\left[\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right] + \frac{7S_{11}}{240}\left(d_{33} - d_{15}\right)\frac{d^3\Phi_2}{d\alpha^3} + \frac{S_{11}\nu d_{33}}{3R}\frac{d\Phi_1}{d\alpha} = -A_1'h\frac{dZ_1}{d\alpha}$$

$$Z_2 + \frac{h^3}{12}\frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R} + \nu\frac{dU}{d\alpha}\right] - \frac{7S_{11}\nu}{240R}\left(d_{33} - d_{15}\right)\times$$

$$\times\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}d_{33}}{3R^2}\Phi_1 - \frac{2B_1'}{R}V_0 - \frac{A_1'Z_1h}{R} = 0 \qquad (1.24)$$

$$-S_{11}\frac{h^3}{12}\frac{d^3W}{d\alpha^3} + S_{11}S_{44}^E\frac{h^5}{120}\frac{d^2\varphi_1}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}h^2}{15}\left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4}\right)\frac{d^3\Phi_1}{d\alpha^3} -$$

$$-\frac{2B_1'}{3}\frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}\nu d_{33}}{30R}\frac{d\Phi_2}{d\alpha} - \frac{\varphi_1 h^3}{12} = -A_1'\frac{h^2}{10}\frac{dZ_2}{d\alpha}$$

Система уравнений (1.24) дополняется двумя осредненными уравнениями, которые можно получить из уравнения электростатики (1.5). Первое уравнение получается интегрированием уравнения (1.5) по

γ в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$ второе уравнение получается умножением уравнения (1.5) на γ и интегрированием по γ в тех же пределах. После некоторых преобразований задача электроупругости по нормалям поляризованной пьезокерамической цилиндрической оболочки приводится к решению следующей системы пяти дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
S_{11}h\left[\frac{d^2U}{d\alpha^2}+\frac{\nu}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right]+\frac{7S_{11}}{240}\left(d_{33}-d_{15}\right)\frac{d^3\Phi_2}{d\alpha^3}+\frac{S_{11}\nu d_{33}}{3R}\frac{d\Phi_1}{d\alpha}=-A_1'h\frac{dZ_1}{d\alpha}\\
Z_2+\frac{h^3}{12}\frac{d\varphi_1}{d\alpha}-\frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R}+\nu\frac{dU}{d\alpha}\right]-\frac{7S_{11}\nu}{240}\left(d_{33}-d_{15}\right)\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2}-\frac{S_{11}d_{33}}{3R^2}\Phi_1-\frac{2B_1'}{R}V_0-\frac{A_1'Z_1h}{R}=0\\
-S_{11}\frac{h^3}{12}\frac{d^3W}{d\alpha^3}+S_{11}S_{44}^E\frac{h^5}{120}\frac{d^2\varphi_1}{d\alpha^2}-\frac{S_{11}h^2}{15}\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{4}\right)\frac{d^3\Phi_1}{d\alpha^3}-\\
-\frac{2B_1'}{3}\frac{d\Phi_1}{d\alpha}-\frac{S_{11}\nu d_{33}}{30R}\frac{d\Phi_2}{d\alpha}-\frac{\varphi_1h^3}{12}=-A_1'\frac{h^2}{10}\frac{dZ_2}{d\alpha} \qquad (1.25)\\
\left[\varepsilon_{11}^T+B_1'\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{2}\right)\right]\frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2}+\frac{3}{2}B_1'h\frac{d^2W}{d\alpha^2}-\frac{h^3}{8}\left(d_{15}+B_1'S_{44}^E\right)\frac{d\varphi_1}{d\alpha}-\\
-\frac{12}{h^2}\varepsilon_{33}^*\Phi_1+\frac{3B_1'd_{33}}{R}V_0-\frac{3}{2}d_{33}^*Z_2=0\\
\frac{1}{30}\left[\varepsilon_{11}^T-B_1'\left(d_{33}-d_{15}\right)\right]\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2}-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\Phi_2-\frac{2}{3}B_1'\frac{d_{33}}{R}\Phi_1=0
\end{gathered}
$$

Рассмотрим некоторые краевые задачи.

2. Рассмотрим задачу изгиба внешним электрическим потенциалом пьезокерамической цилиндрической оболочки, когда края $\alpha=0, \alpha=\ell$ шарнирно оперты, а лицевые поверхности цилиндрической оболочки электродированы. Оболочка предварительно равномерно поляризована по толщине (γ). На лицевых поверхностях оболочки $\gamma=\pm\frac{h}{2}$, $\varphi=\pm V_0$. На краях оболочки $(\alpha=0,\alpha=\ell)$ $\varphi=0$, $V_0=0$.

Система разрешающих уравнений (1.25) для этой задачи примет следующий вид:

$$
S_{11}h\left[\frac{d^2U}{d\alpha^2}+\frac{\nu}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right]+\frac{7S_{11}}{240}\left(d_{33}-d_{15}\right)\frac{d^3\Phi_2}{d\alpha^3}+\frac{S_{11}\nu d_{33}}{3R}\frac{d\Phi_1}{d\alpha}=0
$$

$$\frac{h^3}{12}\frac{d\varphi_1}{d\alpha}-\frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R}+\nu\frac{dU}{d\alpha}\right]-\frac{7S_{11}\nu}{240R}(d_{33}-d_{15})\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2}-$$

$$-\frac{S_{11}d_{33}}{3R^2}\Phi_1-\frac{2V_0B_1'}{R}=0 \qquad (2.1)$$

$$-S_{11}\frac{h^3}{12}\frac{d^3W}{d\alpha^3}+S_{11}S_{44}^E\frac{h^5}{120}\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}-\frac{S_{11}h^2}{15}\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{4}\right)\frac{d^3\Phi_1}{d\alpha^3}-$$

$$-\frac{2B_1'}{3}\frac{d\Phi_1}{d\alpha}-\frac{S_{11}\nu d_{33}}{30R}\frac{d\Phi_2}{d\alpha}-\frac{\varphi_1h^3}{12}=0$$

$$\left[\varepsilon_{11}^T+B_1'\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{2}\right)\right]\frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2}+\frac{3}{2}B_1'h\frac{d^2W}{d\alpha^2}-\frac{h^3}{8}(d_{15}+B_1'S_{44}^E)\frac{d\varphi_1}{d\alpha}-$$

$$-\frac{12}{h^2}\varepsilon_{33}^*\Phi_1+\frac{3B_1'd_{33}V_0}{R}=0$$

$$\frac{1}{30}\left[\varepsilon_{11}^T-(d_{33}-d_{15})B_1'\right]\frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2}-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\Phi_2-\frac{2}{3}B_1'\frac{d_{33}}{R}\Phi_1=0$$

Граничные условия задачи запишутся следующим образом:

$$W=0,\quad T_1=0,\quad M_1=0 \qquad \text{при} \qquad \alpha=0,\ell$$

$$\varphi=0 \qquad \text{при} \qquad \alpha=0,\ell \qquad (2.2)$$

$$\varphi=\pm V_0 \qquad \text{при} \qquad \gamma=\pm\frac{h}{2}$$

Учитывая (1.12), для осредненных граничных условий получим

$$\Phi_1(\alpha)=0 \qquad \Phi_2(\alpha)=0 \ \text{при} \qquad \alpha=0,\ell \qquad (2.3)$$

$$W=0 \qquad \frac{dU}{d\alpha}=0 \qquad \frac{d^2W}{d\alpha^2}=S_{44}^E\frac{h^2}{10}\frac{d\varphi_1}{d\alpha}$$

Решение системы (2.1) представим в виде

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi n\alpha}{\ell} \qquad \Phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{\pi n\alpha}{\ell}$$

$$W=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\pi n\alpha}{\ell} \qquad (2.4)$$

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{\pi n\alpha}{\ell} \qquad \Phi_2=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\frac{\pi n\alpha}{\ell}$$

которые удовлетворяют краевым условиям (2.3).

Функцию V_0 также представим в виде ряда

$$V_0=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\sin\frac{\pi n\alpha}{\ell} \qquad (2.5)$$

где F_n - известные постоянные.

Подставим (2.4), (2.5) в (2.1), получим алгебраическую систему уравнений для определения постоянных интегрирования. После некоторых преобразований для искомых постоянных A_n, B_n, C_n, D_n, E_n получим

$$D_n = -\frac{T_2}{\frac{2}{3}B_1'\frac{d_{33}}{R}}E_n$$

$$C_n = \frac{3T_2R\left[\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 - 2\frac{T_1}{B_1'd_{33}}\right]}{\frac{h^3}{2}\frac{\pi n}{\ell}Q}E_n - \frac{\frac{3B_1'}{R}\left(d_{33} - B_1'h\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\frac{C_{11}^E}{M}\right)}{\frac{h^3}{8}\frac{\pi n}{\ell}Q}F_n$$

$$B_n = \frac{RT_2}{2hB_1'MQ}\left[M\left(d_{15} + B_1'S_{44}^E\right) - \frac{2hC_{11}^ET_1}{d_{33}}\right]E_n +$$

$$+\frac{2B_1'C_{11}^E}{QMR}\left(d_{15} - d_{33} + B_1'S_{44}^E\right)F_n \tag{2.6}$$

$$A_n = \left[\frac{C_{12}^EhT_2R}{2M\frac{\pi n}{\ell}Q}\left(\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 - 2\frac{T_1}{B_1'd_{33}}\right) - \frac{P_1}{h}\frac{\pi n}{\ell}\right]E_n + h\frac{2B_1'C_{12}^E}{RM\frac{\pi n}{\ell}Q}\left[d_{15} - d_{33} + B_1'S_{44}^E\right]F_n$$

И, наконец,

$$E_n = -\frac{1}{K}\left[B_1'^2d_{33}\left\{S_{44}^ED_{11}^E\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\frac{12}{5h}\left(d_{33} - \frac{hB_1'}{6}\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\frac{C_{11}^E}{M}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2\left(d_{33} - B_1'h\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\frac{C_{11}^E}{M}\right) + D_{11}^E2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^4\frac{C_{11}^E}{M}\left(d_{15} - d_{33}\right)\right\}\right]F_n \tag{2.7}$$

где

$$K = D_{11}^ER^2T_2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^4\frac{1}{5h}\left[\frac{5}{2}d_{15}d_{33} - \frac{S_{44}^E}{2}B_1'd_{33} - 6P_2Q - \right.$$

$$\left. -\frac{5hT_1C_{11}^E}{M}\right] + R^2T_2\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\left[QB_1' - \frac{B_1'd_{33}}{2} + \frac{6T_1S_{44}^ED_{11}^E}{5h}\right] + T_2T_1R^2 - C_{12}^E\frac{d_{33}^2}{30}QRB_1'\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$$

$$M = \left(hC_{12}^E\right)^2 - \left(\frac{C_{11}^E}{R}\right)^2, \qquad Q = d_{15} + B_1'S_{44}^E - B_1'h\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2\frac{C_{11}^E}{M}$$

$$C_{11}^{E}=S_{11}h,\quad C_{12}^{E}=\frac{S_{11}\nu}{R},\quad D_{11}^{E}=\frac{S_{11}h^{3}}{12},\quad P_{1}=\frac{7}{240}\left(d_{33}-d_{15}\right)$$

$$P_{2}=d_{15}+\frac{d_{33}}{4},\quad T_{1}=\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2}\left[\varepsilon_{11}^{T}+B_{1}'\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{2}\right)\right]+\frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}$$

$$T_{2}=\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^{2}\left[\varepsilon_{11}^{T}-B_{1}'\left(d_{33}-d_{15}\right)\right]\frac{1}{30}+\frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}$$

Подставим (2.7) в (2.6) и получим значение постоянных A_n, B_n, C_n, D_n, при помощи которых из (2.4) получим искомые функции $U, W, \varphi_1, \Phi_1, \Phi_2$.

3. Рассмотрим задачу изгиба пьезокерамической полубесконечной цилиндрической оболочки, когда край $\alpha=0$ шарнирно закреплен и на краю действует изгибающий момент M_1^0

$$M_1=M_1^0,\quad U=0,\quad W=0\qquad \text{при}\qquad \alpha=0 \tag{3.1}$$

Пусть на лицевых поверхностях $\gamma=\pm\frac{h}{2}$ цилиндрической оболочки $Z_1=0$, $Z_2=0$, $V_0=0$. Оболочка предварительно поляризована по толщине (γ) и на краю $\alpha=0$, $\varphi=0$.

Система разрешающих уравнений (1.25) для этой задачи примет следующий вид:

$$S_{11}h\left[\frac{d^{2}U}{d\alpha^{2}}+\frac{\nu}{R}\frac{dW}{d\alpha}\right]+\frac{7S_{11}}{240}\left(d_{33}-d_{15}\right)\frac{d^{3}\Phi_{2}}{d\alpha^{3}}+\frac{S_{11}\nu d_{33}}{3R}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha}=0$$

$$\frac{h^{3}}{12}\frac{d\varphi_{1}}{d\alpha}-\frac{S_{11}h}{R}\left[\frac{W}{R}+\nu\frac{dU}{d\alpha}\right]-\frac{7S_{11}\nu}{240R}\left(d_{33}-d_{15}\right)\frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}}-\frac{S_{11}d_{33}}{3R^{2}}\Phi_{1}=0$$

$$-S_{11}\frac{h^{3}}{12}\frac{d^{3}W}{d\alpha^{3}}+S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^{5}}{120}\frac{d^{2}\varphi_{1}}{d\alpha^{2}}-\frac{S_{11}h^{2}}{15}\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{4}\right)\frac{d^{3}\Phi_{1}}{d\alpha^{3}}-\frac{2B_{1}'}{3}\frac{d\Phi_{1}}{d\alpha}-$$

$$-\frac{S_{11}\nu d_{33}}{30R}\frac{d\Phi_{2}}{d\alpha}-\frac{\varphi_{1}h^{3}}{12}=0 \tag{3.2}$$

$$\left[\varepsilon_{11}^{T}+B_{1}'\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{2}\right)\right]\frac{d^{2}\Phi_{1}}{d\alpha^{2}}+\frac{3}{2}B_{1}'h\frac{d^{2}W}{d\alpha^{2}}-\frac{h^{3}}{8}\left(d_{15}+B_{1}'S_{44}^{E}\right)\frac{d\varphi_{1}}{d\alpha}-\frac{12}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\Phi_{1}=0$$

$$\frac{1}{30}\left[\varepsilon_{11}^{T}-B_{1}'\left(d_{33}-d_{15}\right)\right]\frac{d^{2}\Phi_{2}}{d\alpha^{2}}-\frac{2}{h^{2}}\varepsilon_{33}^{*}\Phi_{2}-\frac{2}{3}B_{1}'\frac{d_{33}}{R}\Phi_{1}=0$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$M_1 = M_1^0, \quad U = 0, \quad W = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = 0$$
$$\varphi = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = 0 \tag{3.3}$$
$$\varphi = 0 \qquad \text{при} \qquad \gamma = \pm\frac{h}{2}$$

Как и в первой задаче, из осредненных граничных условий получим:

$$\Phi_1(\alpha) = 0 \qquad \Phi_2(\alpha) = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = 0 \tag{3.4}$$
$$W = 0, \quad U = 0, \quad \frac{d^2W}{d\alpha^2} = S_{44}^E \frac{h^2}{10}\frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{12}{S_{11}h^3}M_1^0$$

Решение системы (3.2) $U, W, \varphi_1, \Phi_1, \Phi_2$ представим в виде:

$$U = Ae^{a\alpha}, \quad W = Fe^{a\alpha}, \quad \varphi_1 = Ce^{a\alpha}$$
$$\Phi_1 = De^{a\alpha}, \quad \Phi_2 = Ee^{a\alpha}, \tag{3.5}$$

где $A, F, C, D, E,\ a$ искомые постоянные.

Подставив (3.5) в (3.2), получим систему уравнений относительно искомых постоянных A, F, C, D, E, a. Для того, чтобы система имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы det этой системы был равен нулю, откуда получим:

$$-a^2M\left\{\left(T_2a^2 - \frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)\left[\left(T_1a^2 - \frac{12}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)\left(\left(D_{11}^Ea^2\frac{h^2}{10}S_{44}^E - \frac{h^3}{12}\right)M + \right.\right.\right.$$
$$\left. + D_{11}^Ea^4\frac{h^3}{12}C_{11}^E\right) - \frac{h^3}{8}\left(d_{15} + B_1'S_{44}^E\right)a\left(-D_{11}^Ea^3\frac{d_{33}}{3h}M + M\left(\frac{C_{11}^Eh}{15}P_2a^3 + \frac{2B_1'}{3}a\right)\right) +$$
$$\left. + \frac{3}{2}B_1'ha^2\left(\frac{h^3}{12}aC_{11}^E\left(-\frac{C_{11}^Eh}{15}P_2a^3 - \frac{2B_1'}{3}a\right) - \frac{d_{33}}{3h}M\left(-\frac{h^3}{12} + D_{11}^Ea^2\frac{h^2}{10}S_{44}^E\right)\right)\right] -$$
$$\left. -\frac{2}{3}B_1'\frac{d_{33}}{R}\left[-\frac{h^3}{240}\left(d_{15} + B_1'S_{44}^E\right)a^2C_{12}^EM - \frac{C_{12}^Ed_{33}}{240}B_1'h^4a^4C_{11}^E\right]\right\} = 0$$

$$-a^2M\left\{\left(T_2a^2 - \frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)\left[\left(T_1a^2 - \frac{12}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)\left(\left(D_{11}^Ea^2\frac{h^2}{10}S_{44}^E - \frac{h^3}{12}\right)M + \right.\right.\right.$$
$$\left. + D_{11}^Ea^4\frac{h^3}{12}C_{11}^E\right) - \frac{h^3}{8}\left(d_{15} + B_1'S_{44}^E\right)a\left(-D_{11}^Ea^3\frac{d_{33}}{3h}M + M\left(\frac{C_{11}^Eh}{15}P_2a^3 + \frac{2B_1'}{3}a\right)\right) +$$
$$\left. + \frac{3}{2}B_1'ha^2\left(\frac{h^3}{12}aC_{11}^E\left(-\frac{C_{11}^Eh}{15}P_2a^3 - \frac{2B_1'}{3}a\right) - \frac{d_{33}}{3h}M\left(-\frac{h^3}{12} + D_{11}^Ea^2\frac{h^2}{10}S_{44}^E\right)\right)\right] -$$

$$-\frac{2}{3}B_1'\frac{d_{33}}{R}\left[-\frac{h^3}{240}\left(d_{15}+B_1'S_{44}^E\right)a^2C_{12}^EM-\frac{C_{12}^Ed_{33}}{240}B_1'h^4a^4C_{11}^E\right]\Bigg\}=0 \tag{3.6}$$

где

$$M=\left(C_{12}^Eh\right)^2-\left(\frac{C_{11}^E}{R}\right)^2$$

$$C_{11}^E=S_{11}h \qquad C_{12}^E=\frac{S_{11}\nu}{R} \qquad D_{11}^E=\frac{S_{11}h^3}{12}$$

$$P_1=\frac{7}{240}\left(d_{33}-d_{15}\right) \qquad P_2=d_{15}+\frac{d_{33}}{4} \qquad T_1=\varepsilon_{11}^T+B_1'\left(d_{15}+\frac{d_{33}}{2}\right)$$

$$T_2=\frac{1}{30}\left[\varepsilon_{11}^T-B_1'\left(d_{33}-d_{15}\right)\right]$$

(3.6) является уравнением десятой степени относительно параметра a, однако, как нетрудно заметить, $a_9=a_{10}=0$.

Нас будут интересовать те решения, для которых a_i меньше нуля.

Вычислим из полученной системы постоянные A_i, F_i, C_i, D_i, выраженные через E_i

$$A_i=\left[-\frac{P_1a_i}{h}+\frac{h^4C_{12}^EQ_iR}{8MB_1'd_{33}}\left(T_2a_i^2-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)\right]E_i$$

$$F_i=-\left[\frac{h^3}{12M}a_iC_{11}^EQ_i+\frac{d_{33}}{3h}\right]\frac{3R}{2B_1'd_{33}}\left(T_2a_i^2-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)E_i$$

$$D_i=\frac{3R}{2B_1'd_{33}}\left(T_2a_i^2-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)E_i$$

$$C_i=Q_i\frac{3R}{2B_1'd_{33}}\left(T_2a_i^2-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^*\right)E_i$$

где

$$Q_i=\frac{T_1a_i^2-\frac{12}{h^2}\varepsilon_{33}^*-B_1'\frac{a_i^2}{2}d_{33}}{\frac{h^4}{8M}B_1'a_i^3C_{11}^E+\frac{h^3}{8}\left(d_{15}+B_1'S_{44}^E\right)a_i}$$

Удовлетворяя решения (3.4) краевым условиям, определим искомые постоянные E_i откуда и получим решение задачи.

4. При отсутствии явления пьезоэффекта достаточно в уравнении (3.6) подставить $d_{ij}=0$

$$\left(\varepsilon_{11}^{T}\frac{a^2}{30}-\frac{2}{h^2}\varepsilon_{33}^{T}\right)\left(\varepsilon_{11}^{T}a^2-\frac{12}{h^2}\varepsilon_{33}^{T}\right)\left[\frac{h^2R^2}{12(1-\nu^2)}a^4-S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^2}{10}a^2+1\right]=0 \quad (4.1)$$

Слагаемые в первых двух скобках уравнения (4.1) возникают вследствие электрического поля, а третья - вследствие упругого поля.

В случае чисто упругих деформаций для определения параметра a вместо (4.1) имеем уравнение

$$\frac{R^2h^2}{12(1-\nu^2)}a^4-S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^2}{10}a^2+1=0 \quad (4.2)$$

Учитывая, что нам нужны те a_i, для которых решения задачи удовлетворяют нулевым краевым условиям в бесконечности, получим:

$$a_{1,2}=-\sqrt{\frac{S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^2}{10}\pm\sqrt{\left(S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^2}{10}\right)^2-\frac{R^2h^2}{3(1-\nu^2)}}}{\frac{R^2h^2}{6(1-\nu^2)}}} \quad (4.3)$$

$a_1>a_2$

Попробуем определить длину зоны распространения краевого эффекта. Аналогично [1, 2]

$$\alpha^*=\pi\sqrt{\frac{\frac{R^2h^2}{6(1-\nu^2)}}{S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^2}{10}+\sqrt{\left(S_{11}S_{44}^{E}\frac{h^2}{10}\right)^2-\frac{R^2h^2}{3(1-\nu^2)}}}} \quad (4.4)$$

Из первых двух скобок уравнения (4.1) для параметра a, соответствующей электрическому полю, получим:

$$a_1^*=-\frac{1}{h}\sqrt{60\frac{\varepsilon_{33}^{T}}{\varepsilon_{11}^{T}}} \qquad a_2^*=-\frac{1}{h}\sqrt{12\frac{\varepsilon_{33}^{T}}{\varepsilon_{11}^{T}}}$$

$$a_1^*<a_2^* \quad (4.5)$$

Сравним значения a_i, соответствующие этим полям:

$$\frac{a_2}{a_2^*}\sim\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{h}{R} \quad (4.6)$$

(4.6) означает, что решения при наличии электрического поля быстрее затухают, чем решения в случае чисто упругих деформаций.

Автор благодарит академика Амбарцумяна С. А. и профессора Белубекяна М. В за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. - М. : Наука, 1974.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. - М. : Физматгиз, 1961.
3. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Некоторые задачи изгиба и коле-бания пьезокерамических пластин. - Механика. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1987, вып. 6.
4. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1991.
5. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* К задаче изгиба пьезокерамических пластин, поляризованных по координатной линии срединной плоскости. - Механика. - Ереван: Изд. ЕГУ, 1986, вып. 5.
6. *Борисейко В.А., Мартыненко В.С., Улитко А.Ф.* Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек, поляризованных вдоль одной из координатных линий. - Прикладная механика, 1979, N 12, с. 36-42.
7. *Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Сеник Н.А.* Соотношения электроупру-гости для пьезокерамических пологих оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. - Физико-химическая механика материалов, 1984, т. 20, N 1.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
23. 01. 1995