ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 3, 1996 Механика

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Саркисян С.В.

**Ս.Վ.Սարգսյան**
**Տրանսվերսալ իզոտրոպ առաձգական միջավայրում հարթ մագնիսաառաձգական ալիքների տարածման հետազոտումը**

Դիտարկված է տրանսվերսալ իզոտրոպ առաձգական միջավայրում հարթ մագնիսաառաձգական ալիքների տարածման խնդիրը: Միջավայրը գտնվում է հաստատուն արտաքին մագնիսական դաշտում և կարող է օժտված լինել ինչպես իդեալական, այնպես էլ վերջավոր հաղորդականությամբ: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարում, որը ցույց է տալիս, որ գործ ունենք կապակցված ալիքների հետ: Որոշված է ալիքի տարածման ֆազային արագությունը և մարման գործակիցը:

**S.V.Sarkisyan**
**Plane magnetoelastic waves propagation in transversal-isotropic elastic medium**

Исследуется задача распространения плоской магнитоупругой волны в трансверсально-изотропной упругой среде. Среда находится во внешнем постоянном магнитном поле и может обладать как идеальной, так и конечной проводимостью. Получено дисперсионное уравнение, которое показывает, что имеем дело со связанными волнами. Исследовано полученное уравнение и определены фазовая скорость и коэффициент затухания волн.

Изучению процессов колебаний и распространения магнитоупругих волн в электропроводных телах посвящены работы [1-6].

В настоящей работе рассматривается задача распространения магнитоупругой волны в трансверсально-изотропной упругой среде.

1. Рассмотрим плоские волны магнитоупругости в трансверсально-изотропном упругом пространстве, обладающем идеальной проводимостью. Среда находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{B}_0(B_{01}, B_{02}, B_{03})$. Введём декартовую систему координат $(x, y, z)$ так, чтобы координатная плоскость $(x, y)$ совпала с плоскостью изотропии. При исследовании рассматриваемой задачи воспользуемся линеаризованными уравнениями магнитоупругости [1-3, 5, 7]. Ниже будем рассматривать случай, когда все функции, фигурирующие в уравнениях магнитоупругости идеально-проводящей трансверсально-изотропной среды, являются функциями только переменных $x$ и $t$. При этом предположении уравнения движения в перемещениях будут иметь следующий вид:

$$\left(\left(c_1^2+v_2^2+v_3^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x-v_{12}^2\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}-v_{13}^2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}=0$$

$$-v_{12}^2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\left(\left(c_2^2+v_1^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_y=0 \qquad (1.1)$$

$$-v_{13}^2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\left(\left(c_3^2+v_1^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z=0$$

где

$$c_1^2=\frac{b_{11}}{\rho},\quad c_2^2=\frac{b_{55}}{\rho},\quad c_3^2=\frac{b_{44}}{\rho},\quad v_i^2=\frac{\mu_0 H_{0i}^2}{4\pi\rho},\quad v_{ij}^2=\frac{\mu_0 H_{0i}H_{0j}}{4\pi\rho}\,(i,j=1,2,3).$$

$$b_{55}=G,\quad b_{11}=\frac{1}{\Delta E'}\left(\frac{1}{E}-\frac{v'^2}{E'}\right),\quad b_{44}=G',\quad \Delta=\frac{1+v}{EE'}\left(\frac{1-v}{E}-\frac{2v'^2}{E'}\right)$$

В приведенных уравнениях $\vec{U}(u_x,\ u_y,\ u_z)$-вектор перемещения точек пространства; $\rho$ и $\mu_0$-плотность и коэффициент магнитной проницаемости среды; $\vec{H}_0$ и $\vec{B}_0$-напряженность магнитного поля и магнитная индукция, E, $E'$, G, $G'$, $\nu$, $\nu'$-упругие характеристики рассматриваемой среды.

Решение уравнений (1.1) представим в виде монохроматической волны, перемещающейся в направлении $x$ с фазовой скоростью $v=\omega/k$.

$$(u_x,u_y,u_z)=(u_x^0,\quad u_y^0,\quad u_z^0)\exp[i(kx-i\omega t)] \qquad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в систему уравнений (1.1), получим систему однородных алгебраических уравнений. Из условия равенства нулю определителя этой системы имеем следующее уравнение:

$$k^6(\beta_{11}\beta_{33}(1+\beta_{12})+\beta_{11}\beta_{22}(1+\beta_{13})-(1+\beta_{13})(1+\beta_{12})(1+\beta_{21}+\beta_{31}))+$$
$$+k^4(\alpha_3^2(1+\beta_{12})(1+\beta_{21}+\beta_{31})+\alpha_2^2(1+\beta_{13})(1+\theta_{21}+\beta_{11}+\beta_{21}+\beta_{31})-$$
$$-\alpha_2^2\beta_{11}\beta_{33}-\alpha_3^2\beta_{11}\beta_{22})\ -\ k^2\alpha_1^2\alpha_2^2(1+\theta_{13}+\theta_{23}+2\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})+$$
$$+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2=0 \qquad (1.3)$$

где $\alpha_i=\omega\cdot c_i^{-1},\quad \beta_{ij}=v_i^2\cdot c_j^{-2},\quad \theta_{ij}=c_i^2\cdot c_j^{-2}\qquad (i,j=1,2,3)$

Из уравнения (1.3) путем численной реализации при заданных физико механических характеристиках среды можно найти фазовые скорости и коэффициенты затухания волн. В случае, когда внешнее магнитное поле параллельно плоскости изотропии, уравнение (1.3) сводится к уравнениям:

$$k^4(1+\beta_{12}+\beta_{21})-k^2\left((1+\beta_{21})\alpha_2^2+(1+\beta_{12})\alpha_1^2\right)+\alpha_1^2\alpha_2^2=0 \qquad (1.4)$$

$$k^2(1+\beta_{13})-\alpha_3^2=0 \qquad (1.5)$$

Из уравнения (1.5) получаем

$$v = c_3\sqrt{1+\beta_{13}} \tag{1.6}$$

(1.6) показывает, что волна $u_z$ возмущена электромагнитным полем и её фазовая скорость увеличилась .

Для уравнения (1.4) рассмотрим сначала частные случаи.

а) Пусть $B_{01} = B_{02} = 0$ $(v_1 = v_2 = \beta_{12} = \beta_{21} = 0)$. Уравнение (1.4) принимает вид

$$(k^2-\alpha_1^2)\cdot(k^2-\alpha_2^2)=0 \tag{1.7}$$

В этом случае мы имеем дело с волнами $u_x, u_y$, невозмущёнными электромагнитным полем. Волна $u_x$ распространяется со скоростью $c_1$, волна $u_y$ со скоростью $c_2$ .

б)Пусть $B_{01} \neq 0$, $B_{02} = 0$ $(v_2 = \beta_{21} = 0)$. Уравнение (1.4) сводится к виду

$$(k^2-\alpha_1^2)\cdot(k^2(1+\beta_{12})-\alpha_2^2)=0 \tag{1.8}$$

В этом случае волна $u_x$ не возмущена и движется с фазовой скоростью $v = c_1$. Волна $u_y$ возмущена электромагнитным полем и её фазовая скорость будет $v = c_2\sqrt{1+\beta_{12}}$.

в)Для $B_{01} = 0, B_{02} \neq 0$ уравнение (1.4) при $\beta_{12} = 0$ приводится к виду

$$(k^2-\alpha_2^2)\cdot(k^2(1+\beta_{21})-\alpha_1^2)=0 \tag{1.9}$$

В этом случае мы имеем дело с невозмущённой волной $u_y$, распространяющейся с фазовой скоростью $v = c_2$ и с возмущённой волной $u_x$, для фазовой скорости которой из (1.9) получаем

$$v = c_1\sqrt{1+\beta_{21}} \tag{1.10}$$

Фазовая скорость волны $u_x$ увеличилась.

г) В случае $B_{01} \neq 0, B_{02} \neq 0$ как волна $u_x$, так и волна $u_y$, возмущены электромагнитным полем. Решениями уравнения (1.4) будут выражения

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1+\beta_{12}+\beta_{21})}\cdot\left(\alpha_1^2(1+\beta_{12})+\alpha_2^2(1+\beta_{21})\pm\sqrt{D}\right) \tag{1.11}$$

$$D = \left(\alpha_1^2(1+\beta_{12})-\alpha_2^2(1+\beta_{21})\right)^2 + 4\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_{12}\beta_{21} > 0$$

Ясно, что $k_{1,2}^2 > 0$ и корни вещественны. Решениями уравнения (1.1) (при $u_z = 0$ ) являются функции

$$(u_x;u_y)=(A_1;A_5)\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_1}\right)\right)+(A_2;A_6)\exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_1}\right)\right)+$$

$$+(A_3;A_7)\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_2}\right)\right)+(A_4;A_8)\exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_2}\right)\right) \qquad (1.12)$$

где $\gamma_i=\dfrac{\omega}{k_i}$. Заметим, что $\gamma_i(i=1,2)$ являются функциями параметра $\omega$. Следовательно, мы имеем дело с волнами, подвергающимися дисперсии. Подставляя (1.12) в (1.1), найдём соотношения между постоянными $A_k(k=\overline{1,8})$. Имея (1.12), можно определить компоненты индуцированного электромагнитного поля и вектор плотности электрического тока.

2. Рассмотрим трансверсально-изотропную упругую среду, которая имеет конечную проводимость $\hat{\sigma}(\sigma,\sigma,\sigma')$ ($\sigma$ – коэффициент электрической проводимости для плоскости изотропии, $\sigma'$ – коэффициент электрической проводимости для плоскостей, нормальных плоскости изотропии). Не нарушая общности, предположим, что среда находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{B}_0(B_{01},B_{02},0)$. Магнитная проницаемость материала среды считается равным единице. В этой среде будем рассматривать распространение плоских волн магнитоупругости. Как и выше, будем пользоваться линеаризированными уравнениями магнитоупругости. Для плоской волны, распространяющейся в направлении оси $x$, получим следующие уравнения магнитоупругости:

$$b_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{\sigma' B_{02}}{c}\left(e_3+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$b_{55}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\sigma' B_{02}}{c}\left(e_3+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$b_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\sigma B_{02}}{c}\left(e_1-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)-\frac{\sigma B_{01}}{c}\left(e_2+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t},\quad \frac{\partial e_2}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_3}{\partial t},\quad e_1-\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial u_z}{\partial t}=0$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_2+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)=-\frac{\partial h_3}{\partial x},\quad \frac{4\pi\sigma'}{c}\left(e_3+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)=\frac{\partial h_2}{\partial x}$$

Здесь $\vec{h}$ и $\vec{e}$ - векторы напряжённости индуцированного магнитного и электрического полей; $c$ электродинамическая постоянная.

Система уравнений (2.1) распадается на две системы уравнений. Займёмся исследованием системы уравнений, в которой в качестве неизвестных фигурируют функции $u_x, u_y, e_3$ и $h_2$. Решение этой системы представим в виде (1.2). Тогда получим следующее характеристическое уравнение

$$\left(k^2-\alpha_1{}^2\right)\cdot\left(\left(k^2-\alpha_2{}^2\right)\left(ik^2\chi'+1\right)+\beta_{12}k^2\right)+\beta_{21}k^2\left(k^2-\alpha_2{}^2\right)=0 \qquad (2.2)$$

Здесь введены те же обозначения, которые применялись в случае идеального проводника. Кроме того, введено обозначение $\chi'=c^2(4\pi\sigma'\omega)^{-1}$ Легко видеть, что уравнение (2.2) при $\chi'=0(\sigma'\to\infty)$ переходит в уравнение (1.4). Рассмотрим ряд частных случаев.

а)Пусть отсутствует первоначальное электромагнитное поле $\left(B_{01}=B_{02}=0,\ \ \beta_{12}=\beta_{21}=0\right)$. Уравнение (2.2) сводится к следующему виду:

$$\left(k^2-\alpha_1{}^2\right)\cdot\left(k^2-\alpha_2{}^2\right)\cdot\left(ik^2\chi'+1\right)=0 \qquad (2.3)$$

Уравнение $\left(ik^2\chi'+1\right)=0$ характеризует осцилляцию электромагнитного поля, не связанного с полем деформации. Уравнения $\left(k^2-\alpha_1{}^2\right)=0$ и $\left(k^2-\alpha_2{}^2\right)=0$ связаны с распространением волн $u_x$ и $u_y$ в трансверсально-изотропной среде, которые не возмущены электромагнитным полем.

б)Рассмотрим случай $\left(B_{01}=0(\beta_{12}=0), B_{02}\neq 0.\right.$ Характеристическое уравнение (2.2) упрощается до следующего вида:

$$\left(k^2-\alpha_2^2\right)\cdot\left(k^4\chi'-k^2\left(\alpha_1^2\chi'+i(1+\beta_{21})\right)+i\alpha_1^2\right)=0 \qquad (2.4)$$

Волна $u_y$ не возмущена электромагнитным полем. Волны $u_x, e_3$ и $h_2$ распространяются со скоростью $v=\frac{\omega}{k}$. Величина $k$ удовлетворяет уравнению

$$k^4\chi'-k^2\left(\alpha_1^2\chi'+i(1+\beta_{21})\right)+i\alpha_1^2=0 \qquad (2.5)$$

корни которого $k_{1,2}$ будут комплексными. Следовательно, эти волны подвергаются дисперсии и затухают. Фазовая скорость $\gamma_\alpha$ и коэффициент затухания $\psi_\alpha$ определяются по формулам

$$\gamma_\alpha=\frac{\omega}{\operatorname{Re}k_\alpha},\quad \psi_\alpha=\operatorname{Im}k_\alpha \quad (\alpha=1,2).$$

Решения рассматриваемых уравнений будут

$$(u_x;e_3;h_2)=(F_1;F_5;F_9)\cdot\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_1}\right)-\psi_1 x\right)+(F_2;F_6;F_{10})\cdot\exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_1}\right)+\psi_1 x\right)+$$
$$+(F_3;F_7;F_{11})\cdot\exp\left(-i\omega\left(t-\frac{x}{\gamma_2}\right)-\psi_2 x\right)+(F_4;F_8;F_{12})\cdot\exp\left(-i\omega\left(t+\frac{x}{\gamma_2}\right)+\psi_2 x\right)$$

(2.6)

в)В случае $B_{01}\neq 0,\ B_{02}=0$ уравнение (2.2) приводится к следующему:

$$\left(k^2-\alpha_1^2\right)\cdot\left(k^4\chi'-k^2\left(\alpha_2^2\chi'+i(1+\beta_{12})\right)+i\alpha_2^2\right)=0 \qquad (2.7)$$

Заметим, что волна $u_x$ не возмущена электромагнитным полем, волны же $u_y,e_3$ и $h_2$ между собой связаны, их фазовая скорость и коэффициент затухания определяются из следующего уравнения:

$$k^4\chi'-k^2\left(\alpha_2^2\chi'+i(1+\beta_{12})\right)+i\alpha_2^2=0$$

Эти волны будут затухать и подвергаться дисперсии. В данном случае решение уравнений (2.1) имеет вид, аналогичный (2.6).

г)Наконец, в случае, когда $B_{01}\neq 0,\ B_{02}\neq 0$, характеристическое уравнение имеет вид (2.2) и мы имеем дело со связанными волнами $u_x,u_y,e_3$ и $h_2$.

Теперь рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных функций $u_z,e_1,e_2$ и $h_3$, которая следует из уравнений (2.1). Представляя решение этой системы в виде (1.2), придем к следующему характеристическому уравнению:

$$\left(k^2-\alpha_3^2\right)\cdot\left(ik^2\chi+1\right)+\beta_{13}k^2=0,\ \ \chi=c^2(4\pi\sigma\omega)^{-1} \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) при $\chi=0(\sigma\to\infty)$ переходит в уравнение (1.5).При отсутствии первоначального электромагнитного поля $(\beta_{13}=0)$, как видно из уравнения (2.8), мы имеем дело с волной $u_z$, которая не возмущена электромагнитным полем и распространяется с фазовой скоростью $c_3$ и с осцилляцией электромагнитного поля. При наличии магнитного поля уравнение (2.8) по виду совпадает с уравнением (2.5) $(\chi'\sim\chi,\ \ \alpha_1\sim\alpha_3,\ \ \beta_{21}\sim\beta_{13})$.

В случае, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости изотропии $\vec{B}_0(0,0,B_{03})$, следует, что волны $u_x$ и $u_z$ не возмущены электромагнитным полем и распространяются с фазовыми скоростями $c_2$

и $c_3$. А для неизвестных функций $u_x, e_2$ и $h_3$ получается следующее уравнение:

$$\left(k^2-\alpha_1^2\right)\cdot\left(ik^2\chi+1\right)+\beta_{31}k^2=0 \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) по виду совпадает с уравнением (2.5) $\left(\chi'\sim\chi,\beta_{21}\sim\beta_{31}\right)$.

При отсутствии внешнего магнитного поля $\left(\beta_{31}=0\right)$, как видно из уравнения (2.9), мы имеем дело с осцилляцией электромагнитного поля и с волной $u_x$, не возмущенной электромагнитным полем и распространяющейся со скоростью $c_1$.

В заключение отметим, что аналогичные исследования можно провести, как при другом направлении внешнего поля,так и в случае, когда волна распространяется перпендикулярно плоскости изотропии.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин М.: Наука, 1997. 272 с.
2. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электроводных тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
3. *Кудрявцев Б.А., Партон В.З.* Магнитотермоупругость. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М., ВИНИТИ, 1981,т.14,с.3-59
4. Физическая акустика под редакцией *У. Мезона*, пер. с англ.,1973,т.5 изд."Мир",с.9-71.
5. *Новацкий В.* Электрамогнитные эффекты в твердых телах. М.:Мир, 1986. 159 с.
6. *Саркисян С.В.* Распространение магнитотермоупругих волн в пластине. Тр.: ХУ Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, Казань,т.1, 1990, с.231-236.
7. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. (Прочность, устойчивость и колебания). М.:Наука, 1987.360 с.


Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
23.11.1994