

ДВЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Макарян В. С.

Վ.Ս.Մակարյան

Երկու խնդիր շրջանային սեկտորի համար

Դիտարկված են շրջանային սեկտորի համար առաջին եզրային խնդիր և նման խնդիր, երբ սեկտորը ունի սիմետրիկ ճաք: Առաջին խնդիրը բերված է լիովին ռեզոլյար գծային հանրահաշվա-կան հավասարումների համակարգի: Երկրորդ խնդիրը նախ բերված է զույգ հավասարումների, ապա քվադրիտիկ ռեզոլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի:

V.S.Makarian

Two problems for circular sector

Рассмотрены первая основная задача для кругового сектора с произвольным углом раствора и аналогичная задача для кругового сектора, имеющего разрез на линии симметрии. Первая задача сведена к решению вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Вторая задача сначала сведена к парным уравнениям, затем к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Первая основная задача теории упругости для кругового сектора

Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах r, φ , как известно [1-5], приводится к отысканию одной функции $\Phi(r, \varphi)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению.

Преобразованием $r = Re^{-t}$ задача сводится к отысканию одной функции $F(t, \varphi) = Re^{-t} \Phi(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0 \quad (1.1)$$

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для кругового сектора конечного радиуса с произвольным углом раствора. При симметричном нагружении задачу решаем для половины сектора.

При этом, граничные условия в координатах $(t, \varphi), t = \ln \frac{R}{r}$

записываются в виде :

условия на круговой части границы -

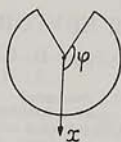
$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \varphi) &= f(\varphi), & (0 \leq \varphi \leq \varphi_1 < \pi) \\ \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= g(\varphi), & (0 \leq \varphi \leq \varphi_1 < \pi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

условия симметрии

$$\tau_{r\varphi}(t, 0) = 0, \quad v(t, 0) = 0, \quad (0 < t < \infty) \quad (1.3)$$

и условия на радиальной части контура

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) &= g_1(r), & (0 < t < \infty) \\ \sigma_\varphi(t, \varphi_1) &= f_1(r) & (0 < t < \infty) \end{aligned} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Условие статки $\sum F_r = 0$ дает

$$R \int_0^{\varphi_1} [f(\varphi) \cos \varphi - g(\varphi) \sin \varphi] d\varphi = \int_0^R [f_1(r) \sin \varphi_1 - g_1(r) \cos \varphi_1] dr \quad (1.5)$$

Функцию $F(t, \varphi)$ для кругового сектора $0 \leq r < 1, -\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$ при наличии одной оси симметрии ($\varphi = 0$) представим в виде суммы тригонометрического ряда и интеграла Фурье

$$F(t, \varphi) = (A_0 + iB_0)e^{-\nu t} + \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \alpha_k \varphi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\beta, \varphi) \cos \beta t d\beta \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_k(t) &= \frac{(-1)^k X_k}{2} \left[\frac{e^{-(\alpha_k - 1)t}}{\alpha_k - 1} - \frac{e^{-(\alpha_k + 1)t}}{\alpha_k + 1} \right] - \frac{g_k}{2} [e^{-(\alpha_k - 1)t} - e^{-(\alpha_k + 1)t}] \\ \Psi_k(0) &= \frac{(-1)^k X_k}{\alpha_k^2 - 1}, \quad \Psi_k'(0) = 0, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\beta, \varphi) &= \gamma(\beta) Y(\beta) \Phi_1(\beta, \varphi) + \tilde{g}_1(\beta) \Phi_3(\beta, \varphi) \\ \Phi_1(\beta, \varphi) &= \beta \Phi_1(\beta, \varphi) - \Phi_2(\beta, \varphi) \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \Phi(\beta, \varphi_1) &= \frac{Y(\beta)}{\beta^2 + 1} + \frac{\tilde{g}_1(\beta) \sin 2\varphi_1}{2\delta(\beta)}, \quad \int_0^{\varphi_1} \Phi(\beta, \varphi) d\varphi = \frac{2\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{(\beta^2 + 1)^2} \\ \Phi'(\beta, \varphi_1) &= -\tilde{g}_1(\beta), \quad \Phi'(\beta, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\delta(\beta)\Phi'_1(\beta, \varphi) = \text{sh}\beta\varphi \cos \varphi \text{ch}\beta\varphi_1 \sin \varphi_1 - \text{ch}\beta\varphi \sin \varphi \text{sh}\beta\varphi_1 \cos \varphi_1$$

$$\delta(\beta)\Phi'_2(\beta, \varphi) = \text{sh}\beta\varphi \cos \varphi \text{sh}\beta\varphi_1 \cos \varphi_1 - \text{ch}\beta\varphi \sin \varphi \text{ch}\beta\varphi_1 \sin \varphi_1$$

$$\delta(\beta) = \text{sh}^2 \beta\varphi_1 + \sin^2 \varphi_1, \quad \gamma(\beta) = \frac{\text{ch}2\beta\varphi_1 - \cos 2\varphi_1}{\text{sh}2\beta\varphi_1 + \beta \sin 2\varphi_1}, \quad \chi(\beta, t) = \sin \beta t - \beta \cos \beta t$$

$$g_k = \frac{R}{\alpha_k} \int_0^{\varphi_1} g(\varphi) \sin \alpha_k \varphi d\varphi, \quad f_k = \int_0^{\varphi_1} f(\varphi) \cos \alpha_k \varphi d\varphi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\tilde{g}_1(\beta) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} r g_1(r) \sin \beta_k t dt, \quad \tilde{f}_1(\beta) = \int_0^{\infty} r f_1(r) \chi(\beta, t) dt, \quad \tilde{f}_{10} = \int_0^{\infty} r f_1(r) e^{-t} dt$$

При удовлетворении граничным условиям, заданным на дуге окружности ($t = 0, 0 < \varphi < \varphi_1$), используем ортогональность тригонометрических функций, а для удовлетворения условиям, заданным на линиях ($\varphi = \text{const}, 0 < t < \infty$), кроме обычного интеграла Фурье, используем интегральные преобразования:

$$\varphi(\beta) = \int_0^{\infty} f(t) \chi_k(\beta, t) dt \quad k = 1, 2$$

$$f(t) = (-1)^k e^{-\gamma t} H_0(\gamma) \int_0^{\infty} f(x) e^{-\gamma x} dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\beta) \chi_k(\beta, t) d\beta}{\beta^2 + \gamma^2}; \quad (1.9)$$

$$\chi_1(\beta, t) = \gamma \cos \beta t + \beta \sin \beta t, \quad \chi_2(\beta, t) = \gamma \sin \beta t - \beta \cos \beta t, \quad (1.10)$$

где γ - произвольное число, а $H_0(\gamma)$ - функция Хевисайда.

При выборе (1.6) - (1.8) условия симметрии и граничные условия на касательные напряжения удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям на нормальные напряжения, получаются следующие уравнения для определения $X_k, Y(\beta), A_0$ и B_0

$$X_k + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha_k^2 - 1) \beta \gamma(\beta) Y(\beta)}{[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2]} d\beta = (-1)^k (g_k - R f_k) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 (\beta^2 + 3\alpha_k^2 + 1) \tilde{g}_1(\beta)}{[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2]} d\beta \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$Y(\beta) + \frac{4}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta^2 + 1) \alpha_k X_k}{[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2]} = \frac{2B_0}{\beta^2 + 1} + \frac{1}{\beta} \tilde{f}_1(\beta) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\beta^2+1)\sin 2\varphi_1}{2\delta(\beta)}\bar{g}_1(\beta)+\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha_k^2(\alpha_k^2+3\beta^2+1)g_k}{\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]} \quad (0<\beta<\infty) \\
(2A_0-B_0)\varphi_1+\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{(\beta^2+1)^2}d\beta &= Rf_0+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta^2\bar{g}_1(\beta)}{\beta^2+1}d\beta \quad (1.11) \\
A_0-B_0 &= \int_0^{\infty}rf_1(r)e^{-r}dr-\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k g_k
\end{aligned}$$

На основе условия статике нетрудно показать, что коэффициент $B_0=0$.

Докажем, что бесконечные системы (1.11) вполне регулярны. Вычислим суммы

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{4|\alpha_k^2-1|}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\gamma(\beta)d\beta}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]} \leq \\
&\leq \frac{|\alpha_k^2-1|}{\pi\alpha_k}\ln\left|\frac{\alpha_k+1}{\alpha_k-1}\right| = \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{2}{3\alpha_k^2}-\frac{2}{3\cdot 5\alpha_k^4}-\frac{2}{5\cdot 7\alpha_k^6}-\dots\right] \rightarrow \frac{2}{\pi} \quad (1.12) \\
\rho_2 &= \frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(\beta^2+1)}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]} \leq \\
&\leq \frac{4(\beta^2+1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha d\alpha}{\left[\beta^2+(\alpha-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha+1)^2\right]} = \frac{(\beta^2+1)}{\pi\beta}\operatorname{arccctg}\frac{\beta^2-1}{2\beta} = \\
&= \frac{2(\beta^2+1)}{\pi(\beta^2-1)}\left[1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}-\dots\right], \quad x = \frac{2\beta}{\beta^2-1}
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_2 = \frac{2}{\pi} \quad (1.13)$$

В общем случае свободные члены стремятся к нулю как $O(k^{-1})$. При отсутствии касательных напряжений порядок убывания к нулю свободных членов увеличивается на единицу.

В частном случае, когда $g_1(r)=g(\varphi)=0$, $f_1(r)=f(\varphi)=P_0=\text{const}$, система (1.11) становится однородным и в силу (1.8) имеет только нулевое решение, кроме

$$A_0 = \frac{1}{2}RP_0 \quad (1.14)$$

2. Плоская задача для кругового сектора с трещиной

Рассматривается плоская задача для кругового сектора, имеющего разрез на линии симметрии сектора (фиг.2). На радиальных частях контура приложены гладкие штампы. На контуре сектора касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения заданы в виде произвольных интегрируемых функций.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, \varphi) &= f_0(\varphi), & v(t, \varphi_1) &= a + be^{-1}; & \tau_{r\varphi}|_t &= 0; & (2.1) \\ \sigma_\varphi(t, 0) &= \sigma(t), & (t_0 < t < \infty); & & v(t, 0) &= 0 & (0 \leq t \leq t_0) \end{aligned}$$

Условия на τ_{k1} удовлетворяются тождественно. Из остальных условий (2.1) получим

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \alpha_k \varphi + D - 2A = \int_0^{\infty} [\Phi''(\beta, \varphi) + \Phi(\beta, \varphi)] d\beta - Rf_0(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \int \Phi(\beta, \varphi) d\varphi \chi(\beta, t) d\beta - 4\varphi_1 De^{-1} + a_0 \sin \varphi_1 + C_0 e^{-1} = a + be^{-1} \quad (2.2)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \Phi(\beta, 0) \chi(\beta, t) d\beta + \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k''(t) - \Psi_k'(t)] + 2\Phi_0(t) - 3De^{-1} = r\sigma(t) \quad (t_0 < t < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \int \Phi(\beta, \varphi) d\varphi \chi(\beta, t) d\beta + C_0 e^{-1} = 0 \quad (0 \leq t \leq t_0)$$



Фиг.2

Из первого и второго соотношений (2.2) имеем

$$4\varphi_1 D = -2(a - a_0 \sin \varphi_1) - b + c_0 \quad (2.3)$$

$$B(\beta) \cos \varphi_1 + C(\beta) \operatorname{ch} \beta \varphi_1 = \frac{a - a_0 \sin \varphi_1}{\pi} \left[\frac{1}{\varphi_1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\beta}{x^2 + \beta^2} \right] \equiv Z(\beta)$$

$$A_k = \frac{2(\alpha_k^2 - 1)}{\varphi_1} \int_0^{\infty} \frac{\beta [\tilde{X}(\beta) - (-1)^k Z(\beta)] d\beta}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} - f_{0k}$$

$$D - 2A = -\frac{2}{\varphi_1} \int_0^{\infty} \frac{\beta [\tilde{X}(\beta) - Z(\beta)] d\beta}{(\beta^2 + 1)^2} - f_{\infty}$$

где

$$\tilde{X}(\beta) = -C(\beta) \frac{\operatorname{ch}^2 \beta \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1} + \frac{Z(\beta) \operatorname{ch} \beta \varphi_1}{\cos \varphi_1} = X(\beta) N_0(\beta)$$

$$C(\beta) = \frac{Z(\beta) \operatorname{ch} \beta \varphi_1 - \tilde{X}(\beta) \cos \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}; \quad B(\beta) = \frac{\tilde{X}(\beta) \operatorname{ch} \beta \varphi_1 - Z(\beta) \cos \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}$$

$$f_{0k} = \frac{R}{\varphi_1} \int_0^{\varphi_1} f_0(\varphi) \cos \alpha_k \varphi d\varphi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

$$N_0(\beta) = \frac{\operatorname{ch}^2 \beta \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{\operatorname{sh} \beta \varphi_1 \operatorname{ch} \beta \varphi_1 + \beta \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}; \quad M_0(\beta) = \frac{\operatorname{sh} \beta \varphi_1 \cos \varphi_1 + \beta \operatorname{ch} \beta \varphi_1 \sin \varphi_1}{\operatorname{ch}^2 \beta \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}$$

$$Z(\beta) = \frac{a - a_0 \sin \varphi_1}{\pi} \left[\frac{1}{\beta} - \beta \delta(\beta) \right]; \quad \chi(\beta, t) = \sin \beta t - \beta \cos \beta t$$

Из последних двух соотношений (2.2) получим парные уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{X(\beta) N_0(\beta) \chi(\beta, t)}{\beta^2 + 1} d\beta + \frac{c_0}{2} e^{-t} = 0 \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta X(\beta) \chi(\beta, t)}{\beta^2 + 1} d\beta = \int_0^{\infty} \frac{\beta Z(\beta) M_0(\beta)}{\beta^2 + 1} \chi(\beta, t) d\beta + 2\Phi_0(t) -$$

$$- 3De^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k''(t) - \Psi_k'(t)] - r\sigma(t) \quad (t_0 < t < \infty) \quad (2.5)$$

Перейдём к решению парных уравнений (2.5). Умножим оба уравнения на e^{-t} и проинтегрируем первое из них в пределах $(0, t)$, второе - в пределах (t, ∞) , получим

$$\int_0^{\infty} \left[1 + N(\beta) \right] \frac{X(\beta) \sin \beta t}{\beta^2 + 1} d\beta = \frac{c_0}{2} \operatorname{sh} t \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta X(\beta) \sin \beta t}{\beta^2 + 1} d\beta = f_1(t) \quad (t_0 < t < \infty) \quad (2.6)$$

где

$$-N(\beta) = 1 - N_0(\beta), \quad f_1 = \int_0^{\infty} e^{t-x} f(x) dx \quad (2.7)$$

а через $f(t)$ обозначена правая часть второго уравнения (2.5).

Представим решение (2.6) в виде [6]

$$\frac{\beta X(\beta)}{\beta^2 + 1} = \beta \int_0^{\infty} x F_1(x) J_0(\beta x) dx + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k J_{2k+1}(\beta t_0) =$$

$$= -t_0 F_1(t_0) J_1(t_0 \beta) - \int_{t_0}^{\infty} x F_1'(x) J_1(\beta x) dx + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k J_{2k+1}(\beta t_0) \quad (2.8)$$

где

$$F_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \quad G_1(x) = -\frac{c_0}{P} \int_0^x \frac{cht dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = -\frac{c_0}{2} I_0(x) \quad (2.9)$$

На основе результатов работы [6], для определения Z_k получим систему

$$\frac{Z_k}{2(2k+1)} + \int_0^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_m J_{2m+1}(\beta_0) + \beta \int_{t_0}^{\infty} x F_1(x) J_0(x\beta) dx \right] \frac{N(\beta)}{\beta} J_{2k+1}(\beta_0) d\beta =$$

$$- \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} t G_1(t) P_k \left(1 - \frac{2t^2}{t_0^2} \right) dt = \frac{c_0}{\pi} \int_0^{t_0} \frac{\text{sh}t \sin[(2k+1)t_0]}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} dt \quad (2.10)$$

Кроме (2.10) для определения свободных членов из (2.8) получается ещё одно уравнение

$$t_0 F_1(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z_k \quad (2.11)$$

Пользуясь свойствами функции $N(\beta)$ и асимптотическими формулами бesselевых функций J_n и K_n при больших значениях индекса нетрудно доказать, что в системе (2.10) сумма модулей коэффициентов при неизвестных стремится к нулю, когда $k \rightarrow \infty$. Значит, система (2.10) при $\varphi_1 > 0$ квазиинтегрально регулярна.

После приведения всех кратных интегралов к одномерным на основе формулы (2.8) соотношения (2.10) и (2.11) приведем к виду:

$$(A - D)I_0 K_0(t_0) + D t_0^2 K_1(t_0) + \frac{t_0(a - a_0 \sin \varphi_1)}{2} \int_0^{\infty} \frac{M_0(\beta) J_0(\beta t_0)}{\beta^2 + 1} d\beta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z_k - t_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left\{ K_0[(\alpha_k - 1)t_0] - K_0[(\alpha_k + 1)t_0] \right\} + \frac{\pi t_0}{2} \sigma_0(t_0) \quad (2.12)$$

$$\frac{Z_k}{2(2k+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R\sigma_m}{\gamma_m + 2} P_0(k, \gamma_m + 1) - (A - D)P_0(k, 1) - DP_1(k, 1) -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} Z_m J_{m+1} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[P_0(k, \alpha_m - 1) - P_0(k, \alpha_m + 1) \right] + \frac{c_0(-1)^k}{2} I_{2k+1}(\beta t_0) -$$

$$\frac{a-a_0 \sin \varphi_1}{\pi} \int_0^{\infty} N(\beta) J_{2k+1}(\beta t_0) d\beta \int_0^{\infty} \frac{M_0(y)}{y^2+1} [\delta(y-\beta) - J_0(y, \beta, t_0)] dy \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2.13)$$

где $I_n(x), K_n(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента, $J_n(x)$ функция Бесселя от действительного аргумента, $\delta(x)$ функция Дирака, $H_0(x)$ функция Хевисайда.

$$P_n(k, q) = \int_0^{\infty} N(\beta) J_{2k+1}(\beta t_0) K_n(q, \beta) d\beta \quad (n=0,1) \quad (2.14)$$

$$J_{mk} = \int_0^{\infty} \beta^{-1} N(\beta) J_{2m+1}(\beta t_0) J_{2k+1}(\beta t_0) d\beta \quad (m, k \geq 0)$$

$$J_0(\alpha, \beta, a) = \int_0^a x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx; \quad K_n(\alpha, \beta, a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x^{n+1} J_0(\beta x) K_n(\alpha x) dx; \quad (n=0,1)$$

При получении (2.12) и (2.13) было использовано представление

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k e^{-\gamma_k t}, \quad \gamma_k > -1 \quad (2.15)$$

где (γ_k) – монотонно возрастающая последовательность.

Подставляя выражение функции $X(\beta)$ из (2.8) в (2.3), после ряда элементарных преобразований получим вторую бесконечную систему

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1 A_k}{2(\alpha_k^2 - 1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} Z_m C(m, k) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m [D_0(\alpha_m - 1, k) - D_0(\alpha_m + 1, k)] + \\ &+ (A - D)D_0(1, k) + DD_1(1, k) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R\sigma_m}{\gamma_m + 2} D_0(\gamma_m + 1, k) + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{\beta(\beta^2 + 1)N_0(\beta)d\beta}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} \int_0^{\infty} \frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2 + 1} [\delta(y - \beta) - J_0(y, \beta, t_0)] dy - \\ &- \frac{\varphi_1}{2(\alpha_k^2 - 1)} \left[f_{0k} + \frac{2(-1)^k (a - a_0 \sin \varphi_1)}{4\alpha_k \varphi_1} \right], \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{2} (2A - D - f_{00}) + \frac{a - a_0 \sin \varphi_1}{4} &= \sum_{m=0}^{\infty} Z_m C(m, 0) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m [D_0(\alpha_m - 1, 0) - D_0(\alpha_m + 1, 0)] + DD_1(1, 0) + \\ &+ (A - D)D_0(1, 0) + \int_0^{\infty} \frac{\beta N_0(\beta)d\beta}{\beta^2 + 1} \int_0^{\infty} \frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2 + 1} [\delta(y - \beta) - J_0(y, \beta, t_0)] dy - \end{aligned}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R\sigma_m}{\gamma_m + 2} D_0(\gamma_m + 1, 0), \quad (k=0) \quad (2.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C(m, k) = \int_0^{\infty} \frac{N_0(\beta)(\beta^2 + 1)J_{2m+1}(\beta t_0)}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} d\beta \quad (2.18)$$

$$D_n(b, k) = \int_0^{\infty} \frac{\beta(\beta^2 + 1)N_0(\beta)K_n(b, \beta, t_0)}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} d\beta \quad (n=0,1)$$

Интегралы (2.18) сходятся очень медленно, что затрудняет вычислительные работы. Их сходимость существенно улучшается, если пользоваться формулами типа

$$\begin{aligned} C^{(0)}(m, k) &= \int_0^{\infty} \frac{(\beta^2 + 1)J_{2m+1}(\beta t_0)}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} d\beta = \quad (\alpha_k > 1) \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{4} \frac{\alpha_k + 2}{\alpha_k + 1} \left\{ K_{2m+1}[(\alpha_k + 1)t_0] - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (2m-p)!}{p!} \left[\frac{2}{(\alpha_k + 1)t_0} \right]^{-2p+2m+1} \right\} - \\ &- \frac{(-1)^{m-1}}{4} \frac{\alpha_k - 2}{\alpha_k - 1} \left\{ K_{2m+1}[(\alpha_k - 1)t_0] - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (2m-p)!}{p!} \left[\frac{2}{(\alpha_k - 1)t_0} \right]^{-2p+2m+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n^{(0)}(b, k) &= \int_0^{\infty} \frac{\beta(\beta^2 + 1)K_n(b, \beta, t_0)}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{\infty} x^{n+1} K_n(bx) \{ (\alpha_k + 2)K_0[(\alpha_k + 1)x] - (\alpha_k - 2)K_0[(\alpha_k - 1)x] \} dx \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_0^{\infty} \frac{\beta(\beta^2 + 1)[\delta(y - \beta) - J_0(y, \beta, t_0)]}{[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2][\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2]} d\beta = \\ &= \frac{\pi}{8} [(\alpha_k + 2)K_0(\alpha_k + 1, y, t_0) - (\alpha_k - 2)K_0(\alpha_k - 1, y, t_0)] \end{aligned}$$

Вычислим теперь контактные напряжения и нормальные перемещения точек берегов трещины. Для этого сначала на основе работы [6], из (2.10) и (2.11) получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta X(\beta) \sin \beta t d\beta}{\beta^2 + 1} = -\frac{2}{t_0^2} H_0(t_0 - t) \sqrt{t_0^2 - t^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dot{Z}_k U_k \left(\frac{t}{t_0} \right) U_{k-1} \left(\frac{t}{t_0} \right) -$$

$$-t \int_{t_0}^{\infty} \frac{F_1'(x) H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx \quad (0 \leq t < \infty) \quad (2.20)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{N_0(\beta) X(\beta) \sin \beta t d\beta}{\beta^2 + 1} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{x F_1(x) H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_k}{2k+1} \left\{ \frac{\sin[(2k+1)u_0]}{(-1)^k q_0^{2k+1}(t)} \quad (t \leq t_0) \right\} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_m J_{2m+1}(\beta t_0) + \beta \int_{t_0}^{\infty} x F_1(x) J_0(x\beta) dx \right] \frac{N(\beta) \sin \beta t}{\beta} d\beta \quad (0 \leq t \leq \infty)$$

где $U_k(x)$ - полином Чебышева второго рода,

$$u_0 = \arcsin \frac{t}{t_0}, \quad q_0(t) = \frac{t_0}{t + \sqrt{t^2 - t_0^2}}; \quad (2.21)$$

Затем, пользуясь очевидными соотношениями преобразования Абея и формулой (2.11), после ряда преобразований из (2.20) получим

$$\frac{Ev(t,0)}{2} = \frac{c_0}{2} e^{-t} + \int_0^{\infty} \frac{X(\beta) N_0(\beta)}{\beta^2 + 1} \chi(\beta, t) d\beta = \frac{c_0}{2} e^{-t} - F_1(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \frac{x F_1(x) - t F_1'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} Z_m J_{2m+1}(\beta t_0) + \beta \int_{t_0}^{\infty} x F_1(x) J_0(x\beta) dx \right] \frac{N(\beta)}{\beta} \chi(\beta, t) d\beta -$$

$$- \frac{1}{t_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z_k \left[2 \sum_{\mu=1}^k q_0^{2k}(t) - \frac{t_0}{2k+1} q_0^{2k+1}(t) \right]; \quad (t_0 < t < \infty) \quad (2.22)$$

$$r\sigma_{\varphi}(t,0) = r\sigma(t) + \int_t^{\infty} \frac{[x F_1'(x)] - t F_1(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} * \quad (2.23)$$

$$* \left\{ -t_0 F_1(t_0) + \frac{1}{t_0} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k (-1)^k \left[(2k+1) U_{2k} \left(\frac{t}{t_0} \right) - 1 + \frac{2(t_0^2 - t^2 - t)}{t_0} U_k \left(\frac{t}{t_0} \right) U_{k-1} \left(\frac{t}{t_0} \right) \right] \right\}$$

где функция $\sigma(t)$ является аналитическим продолжением граничной функции $\sigma(t)$ на область $(0 \leq t \leq t_0)$.

На основе формулы (2.22) вычислим $v(\infty, 0)$. Пользуясь известными свойствами интеграла Фурье, получим

$$\frac{Ev(\infty,0)}{2} = -F_1(t_0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{\infty} \frac{x F_1(x) - t F_1'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx +$$

$$+ \frac{2t_0 \sin^2 \varphi_1}{2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1} \left\{ \frac{\pi Z_0}{4} + (A - D)K_1(t_0) + Dt_0 K_2(t_0) + L_{10} + L_{20} \right\} \quad (2.24)$$

$$L_{10} = \frac{\pi}{2t_0} \int_0^\infty \frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2 + 1} \left[\delta(y) - \frac{t_0}{y} J_1(t_0, y) \right] dy$$

$$L_{20} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \left[\frac{K_1[(\alpha_k - 1)t_0]}{\alpha_k - 1} + \frac{K_1[(\alpha_k + 1)t_0]}{\alpha_k + 1} \right] - \frac{R\sigma_k K_1[(\gamma_k + 1)t_0]}{(\gamma_k + 1)(\gamma_k + 2)} \right\}$$

Пользуясь формулами для напряжений, вычислим интегралы

$$\int_0^R \sigma_\varphi(t, \varphi) dr = 2A - D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_k \cos \alpha_k \varphi}{\alpha_k^2 - 1} + \int_0^R \Phi(\beta, \varphi) d\beta$$

$$\int_0^R r \sigma_\varphi(t, \varphi) dr = R(A - D) \quad (2.25)$$

Из первой формулы (2.20) при $\varphi = \varphi_1$ получим условие статики

$$P_1 \sin \varphi_1 = R \int_0^\varphi f_0(\varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (2.26)$$

а при $\varphi = 0$ получается другое условие статики

$$\int_0^{R_0} \sigma(t) dr + \int_{R_0}^R \sigma(t) dr = \frac{R}{\sin \varphi_1} \int_0^{\varphi_1} f_0(\varphi) \cos(\varphi_1 - \varphi) d\varphi$$

Из второй формулы (2.26) следует

$$R_1 P_1 = \int_0^{R_0} r \sigma(t) dr + \int_{R_0}^R r \sigma_\varphi(t, 0) dr = R(A - D) \quad (2.27)$$

где P_1 -сила, действующая на штамп на расстоянии R_1 от точки $t = \infty$, $\sigma(t)$ -нагрузка на берегах трещины.

Таким образом, задача свелась к определению коэффициентов A_k и Z_m ($k = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$) из бесконечных систем (2.13) и (2.16), а также постоянных a_0, c_0, A, D из первого и четвертого соотношений в (2.4) и (2.12). Соотношение (2.27) является связью между коэффициентами a, b , главным вектором P_1 и главным моментом $R_1 P_1$, действующим на штамп. Контактные напряжения и перемещения точек берегов трещины будем определять по формулам (2.23) и (2.24), в частности, максимальное расхождение точек берегов трещины $2v(\infty, 0)$ определяется формулой (2.25).

Пользуясь асимптотическими формулами, для бesselевых функций нетрудно установить следующие асимптотические поведения

коэффициентов бесконечных систем (2.13) и (2.16)

1) при $m = \text{const}, k \rightarrow \infty$

$$J_{m,k} = 0 \left[\frac{t_0^{2k}}{(2k)!} \right], \quad P_0(k, m) = 0 \left[\frac{t_0^{2k}}{(2k)!} \right] \quad (2.28)$$

$$C(m, k) = 0 \left[\frac{1}{\alpha_k^4} \right], \quad D_0(m, k) = 0 \left[e^{-a_k t_0} \right]$$

2) при $k = \text{const}, m \rightarrow \infty$

$$J_{m,k} = 0 \left[\frac{t_0^{2m}}{(2m)!} \right], \quad P_0(k, m) = 0 \left[e^{-a_k t_0} \right], \quad C(m, k) = 0 \left[\frac{(\alpha_k t_0)^m}{(2m)!} \right], \quad D_0(m, k) = 0 \left[e^{-a_k t_0} \right]$$

На этой основе нетрудно доказать, что сумма модулей всех коэффициентов в системах (2.13) и (2.16) при возрастании номера строки стремится к нулю.

Следовательно, совокупность бесконечных систем (2.13) и (2.16) в общем случае квазивполне регулярна.

Во всех приведенных формулах удалось выразить кратные интегралы через быстро сходящиеся ряды или одномерные интегралы, кроме тех членов, которые содержат функцию $Z(\beta)$, или же постоянную $(a - a_0 \sin \varphi_1)$. Для того, чтобы избавиться от этого неудобства, можно поступить следующим образом: свободные члены в формулах для компонент перемещения представим в виде

$$\begin{aligned} Eu_0(t, \varphi) &= 2(1 - \nu)(A + Dt)e^{-t} + (1 + \nu)De^{-t} - a_0 \cos \varphi + b_0 \sin \varphi \\ Ev_0(t, \varphi) &= -4\varphi De^{-t} + a_0 \sin \varphi + b_0 \cos \varphi + c_0 e^{-t} \end{aligned} \quad (2.29)$$

и будем считать, что $b_0 \neq 0$, то есть смещаем обычное условие симметрии на отрезке ($\varphi = 0, 0 \leq t \leq t_0 < \infty$). При $t_0 = \infty$ будем считать $b_0 = 0$, то есть приходим к обычным условиям симметрии.

При этом из (2.29) имеем

$$\begin{aligned} Eu_0(\infty, 0) &= -a_0, \quad Ev_0(\infty, 0) = b_0 \quad (\varphi = 0) \\ Eu_0(\infty, \varphi_1) &= -a_0 \cos \varphi_1 + b_0 \sin \varphi_1, \quad (\varphi = \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$Ev_0(t, \varphi_1) = a_0 \sin \varphi_1 + b_0 \cos \varphi_1 + (c_0 - 4\varphi_1 D_0) e^{-t}, \quad \varphi = \varphi_1, t \rightarrow \infty$$

Условие симметрии представим уже в виде

$$\tau_{kp}(t, 0) = 0, \quad Ev(t, 0) = -b_0 \quad (0 \leq t \leq t_0 < \infty) \quad (2.31)$$

а при удовлетворении граничному условию $Ev(t, \varphi_1) = a + be^{-t}$ будем

считать, что $a = a_0 \sin \varphi_1 + b_0 \cos \varphi_1$, после чего из этого же условия вместо первых двух соотношений в (2.3) получаются

$$B(\beta) \cos \varphi_1 + C(\beta) \operatorname{ch} \beta \varphi_1 = 0, \quad 4\varphi_1 D = c_0 - b \quad (2.32)$$

Все остальные формулы и выражения, а также бесконечные системы остаются в силе, если в них положить $Z(\beta) \equiv 0$, или же $a = a_0 \sin \varphi_1$, а в правой части бесконечной системы (2.13) добавить член

$$\frac{b_0}{E} \left\{ (-1)^k I_{2k+1}(\beta t_0) \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \frac{(1 - e^{-t}) \sin \left[(2k+1) \arcsin \frac{t}{t_0} \right]}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} dt \right\} \quad (2.33.)$$

или

$$\frac{b_0}{E} \left\{ (-1)^k I_{2k+1}(\beta t_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-t_0 \sin x}) \sin[(2k+1)x] dx \right\} \quad (2.34)$$

где последний интеграл при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю, как $O(k^{-1})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А.А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. - Изв. АН АрмССР, сер. физ. мат. наук, 1962, т. 15, No 1.
2. *Алексян Р.К., Казанчян Э.П., Саркисян В.Г.* Плоская контактная задача теории упругости составного круга. - Межвуз. сб.: Механика, вып. 3. Ереван, 1984.
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Л.: Наука, 1968.
4. *Макарян В.С., Саркисян В.Г.* Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т. 43, No 2.
5. *Чобалян К.С.* Напряжения в упругих составных телах. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1987.
6. *Баблоян А.А., Макарян В.С.* Решение парных интегральных уравнений, содержащих комбинации тригонометрических функций. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N 2.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1981.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995