ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 3, 1996 Механика

О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Григорян Э. Х., Саркисян Л. В.

Է. Խ. Գրիգորյան, Լ. Վ. Սարգսյան

Պյեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների մասին

Դիտարկվում է խնդիր պյեզոէլեկտրիկ կիսատարածության սահքային տատանումների վերաբերյալ, երբ կիսատարածության եզրային մակերևույթի վրա կիրառված է ըստ գծի կենտրոնացված պերիոդիկ ուժ: Ցույց է տրված, պյեզոէֆեկտով պայմանավորված, եզրից դեպի կիսատարածության խորքը տարածվող ալիքի առկայությունը: Հեռավոր գոտում տեղաթոխության և էլեկտրական պոտենցիալի համար, ստացվել են ասիմպտոտիկ բանաձևեր:

E. K. Grigorian, L. V. Sarkisian

About shear vibrations of the piezoelectric half space

В работе рассматривается установившиеся сдвиговые колебания пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса 6 mm гексагональной симметрии), когда на граничной поверхности действует сосредоточенная по линии периодическая сила. Получены представления перемещений и электрического потенциала в виде суммы волновых и неволновых частей. Оказывается, что внутри среды перемещения состоят только из волновых частей, а электрический потенциал имеет неволновую часть. Обнаружено, что указанные волновые части состоят не только из поверхностных и обычных волн, но и волны (обусловленной пьезоэффектом), распространяющейся вглубь от поверхности полупространства. Получены также асимптотические формулы, характеризующие поведения перемещений и электрического потенциала на дальной зоне. В этих асимптотических формулах отмечено наличие волновой части, распространяющейся перпендикулярно к граничной поверхности со скоростью объемной волны.

Пусть пьезоэлектрическое полупространство отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$. Ось z совпадает с главной осью симметрии пьезоэлектрика класса 6 mm гексагональной симметрии. Ось x направлена вдоль границы раздела пьезоэлектрического полупространства и вакуума. Границей раздела является плоскость $y=0$, на граничной поверхности действует сила $Pe^{-i\omega t}\delta(x)$, где $\delta(x)$ - функция Дирака, ω - частота колебаний, t - параметр, характеризующий время. В таком случае поле упругих смещений можно искать в виде $\vec{u}=\left(0,0,w(x,y)b^{-i\omega t}\right)$, а электрические потенциалы

$\Phi_b(x,y,t)=\overline{\Phi}_b(x,y)e^{-i\omega t}$, $\Phi_c(x,y,z)=\overline{\Phi}_c(x,y)e^{-i\omega t}$, где $\Phi_b(x,y,t)$ соответствует вакууму, а $\Phi_c(x,y,t)$ - упругой среде.

Поставленная задача для амплитуд перемещений и электрических потенциаллов формулируется в виде следующей граничной задачи [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \Delta\overline{\Phi}_c = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\Delta w, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty$$

для вакуума

$$\Delta\overline{\Phi}_b = 0, \quad -\infty < y < 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

На границе раздела $y = 0$ выполняется условие

$$c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial\overline{\Phi}_c}{\partial y} = P\delta(x), \qquad e_{15}\frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11}\frac{\partial\overline{\Phi}_c}{\partial y} = -\frac{\partial\overline{\Phi}_b}{\partial y},$$

$$\overline{\Phi}_c = \overline{\Phi}_b, (y = 0, \quad -\infty < x < \infty)$$

где $k = \omega / c, \quad c = G / \rho, \quad G = c_{44} / \left(1 + \chi^2\right), \chi^2 = e_{15}^2 / \varepsilon_{11}c_{44}$ - коэффициент электромеханической связи, e_{15} - пьезоэлектрическая постоянная, ε_{11} - диэлектрическая постоянная пьезоэлектрика, c_{44} - упругая постоянная, ρ - плотность материала пьезоэлектрика, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. Рассмотренная граничная задача решается с помощью метода интегрального преобразования Фурье. В результате для $w(x, y), \overline{\Phi}_c(x, y), \overline{\Phi}_b(x, y)$ получены формулы

$$w(x, y) = \frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i(\sigma|x|) - i\sqrt{\sigma^2 - k^2}\, y\right]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma \tag{1}$$

$$\overline{\Phi}_c(x, y) = -\frac{AP}{2\pi e_{15}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i(\sigma|x| - i|\sigma|y)\right]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w(x, y) \tag{2}$$

$$\Phi_b(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i(\sigma|x| + i|\sigma|y)\right]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma \tag{3}$$

где

$$A = e_{15}^2 / \varepsilon_{11}\left(1 + \varepsilon_{11}\right), B = e_{15}^2 / \varepsilon_{11} + c_{44}.$$

Функция $A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}$ имеет нули $\pm\sigma_n$ $\left(\sigma_n = Bk / \sqrt{B^2 - A^2}\right)$, которые являются волновыми числами поверхностной волны Блюстейна-Гуляева. Чтобы $w(x, y), \overline{\Phi}_c(x, y), \overline{\Phi}_b(x, y)$ удовлетворяли условиям уходящей волны, контур интегрирования в (1), (2), (3) должны обходить точки $-k, -\sigma_n$ сверху, а точки k, σ_n - снизу [2]. Причем $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$

Как видно, подынтегральные функции в выражениях $w(x, y), \overline{\Phi}_c(x, y), \overline{\Phi}_b(x, y)$ содержат $|\sigma|$, который говорит о том, что эти функции не могут быть граничными значениями аналитических функций, поэтому для вычисления этих интегралов нельзя применять методы теории функций комплексного переменного. В дальнейшем эти интегралы приведем к такому виду, чтобы возможно было применить к ним вышеуказанные методы.

Рассмотрим $w(x,y)$ и представим ее в виде

$$w(x,y)=P\left(I^{+}+I^{-}\right)$$

где

$$I^{+}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\exp\left[-i\left(\sigma|x|-i\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}\right)y\right]}{A\sigma-B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}}d\sigma,\quad I^{-}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\exp\left[-i\left(\sigma|x|-i\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}\right)y\right]}{A\sigma+B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}}d\sigma$$

Далее исследуем I^{-}, представляя его в виде

$$I^{-}=I_{1}^{-}+I_{2}^{-}$$

где

$$I_{1}^{-}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-k}\frac{\exp\left[-ir\left(\sigma|\cos\varphi|-i\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}\sin\varphi\right)\right]}{A\sigma+B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}}d\sigma$$

$$I_{2}^{-}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{0}\frac{\exp\left[-ir\left(\sigma|\cos\varphi|-i\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}\sin\varphi\right)\right]}{A\sigma+B\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}}d\sigma$$

где $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad r=\sqrt{x^{2}+y^{2}},\quad 0<\varphi<\pi.$

Пользуясь подходом, изложенным в работе [3], сделаем в I_{1}^{-} замену переменных

$$\sigma|\cos\varphi|-i\sqrt{\sigma^{2}-k^{2}}\sin\varphi=\lambda \qquad (4)$$

Тогда $I_{1}^{-}=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\gamma(\lambda)}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_{2}+B\sqrt{\sigma_{2}^{2}-k^{2}}}\frac{d\sigma_{2}}{d\lambda}d\lambda$, где $\sigma_{2}(\lambda)$ определяется из (4) и равна $\sigma_{2}(\lambda)=\lambda|\cos\varphi|-\sqrt{k^{2}-\lambda^{2}}\sin\varphi$.

Контур интегрирования $\gamma(\lambda)$ -это контур в комплексной плоскости λ, который начинается с точки $-k\,|\cos\varphi|$ и стремится, монотонно убывая, к бесконечности при $\sigma\to-\infty$, при этом обходя точку $-\lambda_{n}=-\sigma_{n}\left(|\cos\varphi|+iAB^{-1}\sin\varphi\right)$ снизу. Поскольку подынтегральная функция регулярна в области, содержащейся между линией $\gamma(\lambda)$ и частью действительной оси, обходящей точку ветвления $\lambda=-k$ снизу, $-\infty<\lambda<-k\,|\cos\varphi|$, то нетрудно видеть, что

$$I_{1}^{-}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-k|\cos\varphi|}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_{2}+B\sqrt{\sigma_{2}^{2}-k^{2}}}\frac{d\sigma_{2}}{d\lambda}d\lambda \qquad (5)$$

Далее, поскольку $\sqrt{k^{2}-\lambda^{2}}>0$ при $-k<\lambda<0$ и точка $\lambda=-k$

обходит снизу, то $\sqrt{k^2-\lambda^2}$ будет отрицательно мнимым при $\lambda < -k$. Тогда $\sqrt{k^2-\lambda^2}$ можно представить в виде $\sqrt{k^2-\lambda^2} = -i\sqrt{\lambda^2-k^2}$, полагая $\sqrt{\lambda^2-k^2} > 0$ при $\lambda < -k$. В таком случае $\sigma_2(\lambda)$ представится в виде $\sigma_2(\lambda) = \lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2-k}\ \sin\varphi,\quad 0 < \varphi < \pi$

Теперь переходим к обсуждению интеграла I_2^-. Нетрудно видеть, что $d\lambda/d\sigma = 0$ при $\sigma = -k|\cos\varphi|$. Кроме того, $d\lambda/d\sigma < 0$ при $-k < \sigma < -k|\cos\varphi|$, а при $-k|\cos\varphi| < \sigma < 0$ -$d\lambda/d\sigma > 0$. Имея в виду это, получим

$$I_2^- = -\frac{1}{2\pi}\int_{-k|\cos\varphi|}^{-k}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_2 + B\sqrt{\sigma_2^2-k^2}}\frac{d\sigma_2}{d\lambda} - \frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{-k\sin\varphi}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_1 + B\sqrt{\sigma_1^2-k^2}}\frac{d\sigma_1}{d\lambda}d\lambda \qquad (6)$$

где

$$\sigma_1(\lambda) = \lambda|\cos\varphi| + \sqrt{k^2-\lambda^2}\sin\varphi$$

Окончательно имея в виду (5), (6), для I^- получим представление

$$I^- = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-k\sin\varphi}\frac{e^{i\lambda r}}{A\sigma_1 + B\sqrt{\sigma_1^2-k^2}}\frac{d\sigma_1}{d\lambda}d\lambda,$$

где $\sqrt{\lambda^2-k^2} = -i\sqrt{k^2-\lambda^2}$ при $\lambda < -k\sin\varphi$, то есть контур интегрирования обходит точку ветвления $\lambda = -k$ сверху. Причем $\sigma_2(\lambda) = \sigma_1(\lambda) = \lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2-k^2}$ при $-\infty < \lambda < -k\sin\varphi$.

Поступая аналогичным образом относительно I^+, получим

$$I^+ = \frac{1}{2\pi}\int_{-k\sin\varphi}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\sigma_1 - B\sqrt{\sigma_1^2-k^2}}\frac{d\sigma_1}{d\lambda}d\lambda + i\frac{A}{A^2-B^2}e^{-i\bar{\lambda}_2 r},$$

где $\bar{\lambda}_n = \sigma_n\left(|\cos\varphi| - iAB^{-1}\sin\varphi\right)$. Контур интегрирования обходит точку ветвления $\lambda = k$ снизу, то есть $\sqrt{\lambda^2-k^2} = -i\sqrt{k^2-\lambda^2}$ при $-k\sin\varphi < \lambda < \infty$.

Таким образом, мы пришли к искомому представлению $w(r,\varphi)$

$$w(r,\varphi) = -\frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2-k^2}|\cos\varphi|\right)e^{-i\lambda r}d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}\left[B\left(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2-k^2}|\cos\varphi|\right) + iA\,\mathrm{sgn}(\lambda + k\sin\varphi)\left(\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2-k^2}\sin\varphi\right)\right]} +$$

$$+\frac{iA}{A^2-B^2}e^{-i\bar{\lambda}_2 r}$$

где

$$\sqrt{\lambda^2-k^2} = -i\sqrt{k^2-\lambda^2},\quad -\infty < \lambda < \infty \qquad (7)$$

Ветвь функции $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$, удовлетворяющая условию (7), можно выбирать, например, если провести разрезы в комплексной плоскости по линиям $-k - i\infty$. В дальнейшем мы будем иметь дело с указанным образом разрезанной плоскостью.

Очевидно, в силу аналитического продолжения, что (7) имеет место во всей комплексной плоскости.

Далее нашей целью будет получение представления $w(r,\varphi)$ в виде суммы интегралов по разрезам $-k - i\infty$, $k + i\infty$ и $-k\sin\varphi - i\infty$, то есть представления в виде суммы волновых частей и части поверхностной волны. Для этого $w(r,\varphi)$ запишем в виде

$$w(r,\varphi) = -\frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda,\varphi)e^{-i\lambda r}d\lambda - \frac{P}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(\lambda + k\sin\varphi)F_2(\lambda,\varphi)e^{-i\lambda r} + \frac{iAP}{A^2 - B^2}e^{-i\bar{\lambda}_1 r}, \quad (8)$$

где

$$F_1(\lambda,\varphi) = \frac{B\left(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2 - k^2}|\cos\varphi|\right)^2}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}\left[B^2\left(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2 - k^2}|\cos\varphi|\right)^2 + A^2\left(\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2 - k^2}\sin\varphi\right)^2\right]}$$

$$F_2(\lambda,\varphi) = \frac{A\left(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2 - k^2}|\cos\varphi|\right)\left(\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2 - k^2}\sin\varphi\right)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}\left[B^2\left(\lambda\sin\varphi - i\sqrt{\lambda^2 - k^2}|\cos\varphi|\right)^2 + A^2\left(\lambda|\cos\varphi| + i\sqrt{\lambda^2 - k^2}\sin\varphi\right)^2\right]}$$

Поскольку второй интеграл в (8) взят от функции, не допускающей продолжения в комплексную плоскость, и так как она содержит функцию $\operatorname{sgn}(\lambda + k\sin\varphi)$, то очевидно, что к этому интегралу, непосредственно, нельзя применить методы функций комплексного переменного. Поэтому поступим следующим образом. Рассмотрим однозначные ветви функции $\ln(k\sin\varphi + \lambda)$, одна из которых на вещественной оси равна

$$\ln(k\sin\varphi + \lambda + i0) = \ln|k\sin\varphi + \lambda| + i\pi\theta(-(k\sin\varphi + \lambda)) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \arg(k\sin\varphi + \lambda) < \frac{3\pi}{2}\right)$$

а другая равна

$$\ln(k\sin\varphi + \lambda + i0) = \ln|k\sin\varphi + \lambda| - i\pi\theta(-(k\sin\varphi + \lambda)) \qquad \left(-\frac{3\pi}{2} < \arg(k\sin\varphi + \lambda) < \frac{\pi}{2}\right)$$

где $\theta(z)$ - функция Хевисайда.

Тогда $\operatorname{sgn}(k\sin\varphi + \lambda)$ можно представить в виде

$$\operatorname{sgn}(k\sin\varphi + \lambda) = \frac{1}{\pi i}\ln(k\sin\varphi + \lambda - i0) - \frac{1}{\pi i}\ln(k\sin\varphi + \lambda + i0) + 1 \qquad (9)$$

Далее, выражения $\operatorname{sgn}(k\sin\varphi + \lambda)$ из (9) подставим во второй интеграл в выражении $w(r,\varphi)$. В итоге получим

$$w(r,\varphi)=-\frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\lambda)e^{-i\lambda r}d\lambda+\frac{P}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\lambda,\varphi)\ln(k\sin k\varphi+\lambda-i0)e^{-i\lambda r}d\lambda-$$

$$-\frac{P}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\lambda)\ln(k\sin\varphi+\lambda+i0)e^{-i\lambda r}d\lambda-\frac{P}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\lambda,\varphi)e^{-i\lambda r}d\lambda+\frac{iAP}{A^2-B^2}e^{-i\bar{\lambda}_0 r}$$

Здесь уже $w(r,\varphi)$ представлена в виде суммы интегралов, подынтегральные выражения которых аналитически продолжили в соответствующих комплексных плоскостях и поэтому к ним можно применить методы теории функции комплексного переменного. Поступая указанным образом, получим

$$w(r,\varphi)=-\frac{iP}{\pi}\int_0^{\infty}f_1(\tau,\varphi)e^{-\tau r}d\tau e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{P}{\pi}\int_0^{\infty}f_2(r,\varphi)e^{-\tau r}d\tau e^{ikr}+$$

$$+\frac{iPA}{A^2-B^2}\exp\left(i\sigma_n|x|-AB^{-1}\sigma_n y\right) \qquad (10)$$

где

$$f_1(\tau,\varphi)=\frac{Bi\tau(i\tau+2k)+k^2\sin\varphi\left(B\sin\varphi-iA|\cos\varphi|\right)}{\sqrt{\tau(2k+i\tau)}\left[(B^2-A^2)i\tau(2k+i\tau)+k^2\left(B\sin\varphi-iA|\cos\varphi|\right)^2\right]}$$

$$f_2(\tau,\varphi)=F_2(\lambda,\varphi),\quad \lambda=-k\sin\varphi-i\tau$$

Выше имелось в виду, что на линии $-k-i\infty$

$$\ln(k\sin\varphi+\lambda+i0)=\ln(k\sin\varphi+\lambda-i0)+i2\pi.$$

Итак, мы получили искомое представление $w(r,\varphi)$. Как видно из (10), первый член представляет обычную объемную волну, второй член это волна, обусловленная пьезоэффектом, распространяющаяся вглубь от поверхности полупространства, а третий член представляет поверхностную волну. Как нетрудно видеть, второй член это неволновая часть $w(r,0)$.

Далее, ввиду того, что подынтегральные функции в (10) экспоненциально убывают, то главный вклад в значении интегралов дает их поведение в окрестности нуля. Имея в виду вышесказанное, для $w(r,\varphi)$ при $r\to\infty$, получим асимптотическую формулу

$$w(r,\varphi)=-\frac{iPA}{B^2-A^2}\exp\left(i\sigma_n|x|-AB^{-1}\sigma_n y\right)+$$

$$+\left[\frac{-iP}{2\pi}\frac{\sin\varphi}{\left(B\sin\varphi-iA|\cos\varphi|\right)(kr^{1/2})}+\frac{P}{\sqrt{2\pi}\left(B\sin\varphi-iA|\cos\varphi|\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{A(A\sin\varphi - iB|\cos\varphi|)}{(B\sin\varphi - iA|\cos\varphi|)^2} - \frac{\sin\varphi}{8}\right)\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right]e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)} +$$

$$+ w_0(r,\varphi)e^{iky} + 0\left((kr)^{-\delta/2}\right) \tag{11}$$

где

$$w_0(r,\varphi) = -\frac{PA}{\pi B^2}\frac{1}{(kx)^2} + 0\left((kr)^{-3}\right) \qquad \text{при} \qquad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

$$w_0\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{iPA}{\pi B^2}\frac{1}{ky} + \frac{P(2A^2 - B)}{\pi(ky)^2} + 0\left((ky)^{-3}\right) \tag{12}$$

Как видно из (12), последний член формулы (11) представляет волну, распространяющуюся по направлению оси y со скоростью объемной волны.

Приступив к обсуждению $\overline{\Phi}_c(x,y)$, рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-i(\sigma|x| - i|\sigma|y)]}{A|\sigma| - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma = \int_0^{\infty}\frac{\exp[-ir(\sigma|\cos\varphi| - i\sigma\sin\varphi)]}{A\sigma - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma -$$

$$-\int_{-\infty}^{0}\frac{\exp[-ir(\sigma|\cos\varphi| + i\sigma\sin\varphi)]}{A\sigma + B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma \tag{13}$$

С помощью деформирования контуров интегрирования, для первого интеграла (13) получим

$$\int_0^{\infty}\frac{\exp[-ir(\sigma|\cos\varphi| - i\sigma\sin\varphi)]}{A\sigma - B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma = \int_0^{\infty}\frac{e^{-\tau r}}{A\tau - B\sqrt{\tau^2 + (k\bar{z})^2}}d\tau$$

а для второго интеграла получим

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\exp[-ir(\sigma|\cos\varphi| + i\sigma\sin\varphi)]}{A\sigma + B\sqrt{\sigma^2 - k^2}}d\sigma = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\lambda + B\sqrt{\lambda^2 - (kz)^2}}d\lambda, \tag{14}$$

где $z = |\cos\varphi| + i\sin\varphi, \quad \bar{z} = |\cos\varphi| - i\sin\varphi$ (15)

Из (15) следует, что интеграл (14) можно рассматривать в комплексной плоскости с разрезами, идущими по линиям $-kz - i\infty$ и $kz + i\infty$. Поступая указанным образом, после деформирования контура интегрирования получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-i\lambda r}}{A\lambda + B\sqrt{\lambda^2 - (kz)^2}}d\lambda = -\frac{iA}{B^2 - A^2}\exp(i\sigma_n|x| - \sigma_n y) +$$

$$+\frac{B}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{(2kz + i\tau)\tau}}{(B^2 - A^2)(kz + i\tau)^2 - B^2(kz)^2}e^{-\tau r}d\tau\exp\left(ik|x| - i\frac{\pi}{4} - ky\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\tau r}}{A\tau+B\sqrt{\tau^2+(kz)^2}}d\tau$$

Тогда, для $\overline{\Phi}_c(x,y)$ получим

$$\overline{\Phi}_c(x,y)=\frac{iA^2P}{e_{15}(B^2-A^2)}\exp(i\sigma_n|x|-\sigma_n y)+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w(x,y)-$$

$$-\frac{ABP}{\pi e_{15}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{(2kz+i\tau)\tau}}{(B^2-A^2)(kz+i\tau)^2-B^2(kz)^2}e^{-\tau r}d\tau\exp\left[i\left(k|x|-\frac{\pi}{4}\right)-ky\right]-$$

$$-\frac{AP}{2\pi e_{15}}\int_0^\infty\left[\left(A\tau-B\sqrt{\tau^2+(k\bar{z})^2}\right)^{-1}+\left(A\tau+B\sqrt{\tau^2+(kz)^2}\right)^{-1}\right]e^{-\tau r}d\tau \quad (16)$$

Как видно из (16), в отличие от $w(r,\varphi)$, $(0<\varphi<\pi)$, $\overline{\Phi}_c(r,\varphi)$ имеет неволновую часть. Кроме того, в выражении $\overline{\Phi}_c(r,\varphi)$ третий член представляет поверхностную волну, распространяющуюся со скоростью объемной волны, которая опять отсутствует в $w(r,\varphi)$. Очевидно, что $\overline{\Phi}_c(r,\varphi)$ имеет также волновую часть, распространяющуюся вглубь от поверхности полупространства.

Поступая как выше, для $\overline{\Phi}_c(r,\varphi)$ получим асимптотическую формулу при $r\to\infty$

$$\overline{\Phi}_c(r,\varphi)=\frac{iA^2P}{e_{15}(B^2-A^2)}\exp(i\sigma_n|x|-\sigma_n y)+\frac{BP\exp\left[i\left(k|x|-\frac{\pi}{4}\right)-ky\right]}{e_{15}z^{3/2}\sqrt{2\pi}(kr)^{3/2}}+$$

$$+\frac{iAP\sin\varphi}{\pi Be_{15}}\frac{1}{kr}+\frac{AP\left(A\cos2\varphi-iB\sin\varphi|\cos\varphi|\right)}{\pi B^2e_{15}(kr)^2}+0\left((kr)^{-5/2}\right)+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w(r,\varphi).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакирев М.К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристалах.- Новосибирск: Изд. "Наука" , 1982.
2. *Нобл Б.* Метод Винера - Хопфа. - М.: ИЛ, 1962.
3. *Григорян Э.Х.* О колебании магнитоупругой среды, возбуждаемой сосредоточенной гармонической силой. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978. т. 31, N 5.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
30. 12. 1995