ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 3, 1996 Механика

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАНОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН С АНИЗОТРОПИЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

Агаловян Л.А. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М.

Լ. Ա. Աղալովյան, Յու. Մ. Բաղդասարյան, Ա. Մ. Խաչատրյան

Ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շերտավոր սալերի լարվածային - դեֆորմացիոն վիճակի որոշման մասին

Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով դիտարկվում է շերտավոր սալի լարվածային - դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրության հարցը, երբ շերտերը օժտված են ամենաընդհանուր անիզոտրոպիայով: Ստացված հավասարումները համեմատվում են դասական տեսության համապատասխան հավասարումների հետ:

L.A. Aghalovian, Yu.M. Bagdasarian, A.M. Khachatrian

On determination of stress - strain state of sandwich - type plates with general anizotropy

Методом асимптотического интегрирования рассматривается вопрос определения НДС слоистой анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида (21 упругая постоянная). Проведено сопоставление выведенных основных уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистой анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида (21 упругая постоянная). Исследование проводится методом асимптотического интегрирования уравнений трехмерной задачи теории упругости без принятия каких либо гипотез.

Полное напряженное состояние пластинки образуется из основного (внутреннего) и краевого напряженных состояний [1]. В работе асимптотическим методом построено решение, соответствующее внутренней задаче. Проведено сопоставление выведенных основных двумерных разрешающих уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых пластин, когда имеется плоскость упругой симметрии.

1.Для решения задач слоистых балок, пластин и оболочек обычно используется та или иная гипотеза. В первых исследованиях принималась гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета в целом [2,3]. В последствии были предложены многочисленные модели, обзор которых можно найти, например, в [3-6]. В работе [1] методом асимптотического интегрирования построена приближенная теория изгиба изотропных пластин. Асимптотическая теория ортотропных пластин построена в [7-9]. В [10] асимптотическим методом исследовано НДС однослойной пластинки, материал которой обладает анизотропией общего вида. В [11, 12] тем же методом исследовано НДС слоистой пластинки, состоящей из произвольного числа упругих изотропных слоев, жестко соединенных друг с другом. Дана классификация двумерных задач в зависимости от величины отношения модулей упругости слабых и несущих слоев.

Рассмотрим пластинку, состоящую из некоторого числа анизотропных слоев. Будем считать, что слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$. Общая толщина пластинки $2h$. Плоскость отсчета выберем таким образом, чтобы над этой плоскостью располагались n слоев, а под ней m слоев, n,m - произвольные натуральные числа.

Будем пользоваться декартовой системой координат x,y,z, располагая оси Ox,Oy в плоскости отсчета. Введя безразмерные переменные $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/a, V^{(k)} = v^{(k)}/a, W^{(k)} = w^{(k)}/a$, где a - характерный тангенциальный размер пластинки, слои пластинки будут задаваться неравенствами

$$\zeta_{k-1} \le \zeta \le \zeta_k (k = 1,2,\dots,n), \quad \zeta_k \le \zeta_k \le \zeta_{k+1} (k = -1,-2,\dots,-m)$$

где

$$\zeta_k = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{k} h_i \quad (k = 1,2,\dots,n)$$

$$\zeta_{-k} = -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{k} h_{-i} \quad (k = 1,2,\dots,m), \ \zeta_0 = 0 \tag{1.1}$$

Считается, что на верхней $(\zeta = \zeta_n)$ и нижней $(\zeta = \zeta_{-m})$ лицевых плоскостях пластинки заданы значения компонентов тензора напряжений. Соответствующие условия записываются в виде

$$\sigma_{xz} = a/h \quad X^{+}(x,y) \ (x,y), \quad \sigma_z = Z^{+}(x,y) \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_n \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xz} = -a/h \quad X^{-}(x,y) \ (x,y), \quad \sigma_z = -Z^{-}(x,y) \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_{-m}$$

Требуется найти решение уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.2), условиях полного контакта слоев и условиях краевых задач теории упругости на боковой поверхности (они пока не конкретизируются). В системе вышеприведенных безразмерных координат система уравнений теории упругости сингулярно возмущенная малым параметром. Ее решение складывается из решений внутренней задачи (основное решение) и пограничного слоя [1, 13].

Решение внутренней задачи ищется в виде

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s} Q^{(k,s)} \tag{1.3}$$

где $Q^{(k)}$ любое из компонентов тензора напряжений или безразмерных перемещений k-ого слоя. Целое число q для каждой величины выбирается так, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(k,s)}$. В нашем случае эта цель достигается при

$$q = 2 \ \text{для} \ \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}$$

$$q = 3 \ \text{для} \ W^{(k)}, \quad q = 1 \ \text{для} \ \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}$$

$$q = 0 \ \text{для} \ \sigma_z^{(k)} \tag{1.4}$$

Если считать вклад объемных сил $F_x^{(k)}, F_y^{(k)}, F_z^{(k)}$ того же порядка, что и вклад поверхностных сил, будем иметь

$$F_x^{(k)} = \varepsilon^{-2+s} a^{-1} F_x^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta), (x,y), F_z^{(k)} = \varepsilon^{-1+s} a^{-1} F_z^{(k,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.5}$$

$$F_x^{(k,0)} = F_x(a\xi, a\eta, h\zeta), (x,y,z), F_x^{(k,s)} \equiv 0, \quad s \neq 0, \quad s = \overline{0,S}$$

Подставив (1.3) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости, с учетом (1.4), (1.5) получим следующую систему для определения $Q^{(k,s)}$:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_x^{(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_y^{(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_z^{(k,s)} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{13}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-2)} + a_{14}^{(k)} \sigma_{zy}^{(k,s-1)} + a_{15}^{(k)} \sigma_{zx}^{(k,s-1)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \eta} = a_{12}^{(k)} \sigma_x^{(k,s)} + a_{22}^{(k)} \sigma_y^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-2)} + a_{24}^{(k)} \sigma_{zy}^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_{zx}^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s)}$$

(1.6)

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{23}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-2)} + a_{33}^{(k)}\sigma_z^{(k,s-4)} + a_{34}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-3)} + a_{35}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-3)} + a_{36}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \eta} = a_{14}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)}\sigma_z^{(k,s-3)} + a_{44}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{46}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{15}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)}\sigma_z^{(k,s-3)} + a_{54}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k,1)} + a_{36}^{(k)}\sigma_z^{(k,s-2)} + a_{46}^{(k)}\sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_{56}^{(k)}\sigma_{xz}^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s)}$$

Решив систему (1.6), получим

$$W^{(k,s)} = w^{(k,s)}(\xi,\eta) + w^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$U^{(k,s)} = -\zeta\frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \xi} + u^{(k,s)}(\xi,\eta) + u^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$V^{(k,s)} = -\zeta\frac{\partial w^{(k,s)}}{\partial \eta} + v^{(k,s)}(\xi,\eta) + v^{*(k,s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad (1.7)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \zeta\tau_{x1}^{(k,s)} + \tau_{x0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)} \qquad (x,y)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \zeta\tau_{xy1}^{(k,s)} + \tau_{xy0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)} \qquad (1.8)$$

$$\sigma_{xz}^{(k,s)} = 1/2 \quad \zeta^2\tau_{xz2}^{(k,s)} + \zeta\tau_{xz1}^{(k,s)} + \tau_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}\ ,\ (x,y)$$

$$\sigma_z^{(k,s)} = 1/6 \quad \zeta^3\tau_{z3}^{(k,s)} + 1/2\zeta^2\tau_{z2}^{(k,s)} + \zeta\tau_{z1}^{(k,s)} + \tau_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}$$

где

$$\tau_{x1}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)}\chi_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)}\chi_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)}\tau^{(k,s)}\ ,\ (x,y)$$

$$\tau_{xy1}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)}\chi_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)}\chi_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)}\tau^{(k,s)}$$

$$\tau_{x0}^{(k,s)} = B_{11}^{(k)}\varepsilon_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)}\varepsilon_2^{(k,s)} + B_{16}^{(k)}\omega^{(k,s)}\ ,\ (x,y)$$

$$\tau_{xy0}^{(k,s)} = B_{16}^{(k)}\varepsilon_1^{(k,s)} + B_{26}^{(k)}\varepsilon_2^{(k,s)} + B_{66}^{(k)}\omega^{(k,s)} \qquad (1.9)$$

$$\tau_{xz(i+1)}^{(k,s)} = -\left(\tau_{xi,\xi}^{(k,s)} + \tau_{xy,\eta}^{(k,s)}\right),\ (x,y) \quad (i=0:1)$$

$$\tau_{z(i+1)}^{(k,s)} = -\left(\tau_{xzi,\xi}^{(k,s)} + \tau_{yzi,\eta}^{(k,s)}\right) \quad i=0.1.2$$

$$\varepsilon_1^{(k,s)} = u,_{\xi}^{(k,s)},\quad \varepsilon_2^{(k,s)} = v,_{\eta}^{(k,s)},\quad \omega^{(k,s)} = u,_{\eta}^{(k,s)} + v,_{\xi}^{(k,s)}$$

$$\chi_1^{(k,s)} = -w,_{\xi\xi}^{(k,s)},\quad \chi_2^{(k,s)} = -w,_{\eta\eta}^{(k,s)},\quad \tau^{(k,s)} = -2w,_{\xi\eta}^{(k,s)} \qquad (1.10)$$

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)}$ определяются по формулам

$$B_{11}^{(k)} = \left(a_{22}^{(k)}a_{66}^{(k)} - \left(a_{26}^{(k)}\right)^2\right)/\Omega_k,\quad B_{22}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)}a_{66}^{(k)} - \left(a_{16}^{(k)}\right)^2\right)/\Omega_k$$

$$\mathrm{B}_{12}^{(k)} = \left(a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{66}^{(k)}\right) / \Omega_k, \quad \mathrm{B}_{66}^{(k)} = \left(a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)}\right)^2\right) / \Omega_k$$

$$\mathrm{B}_{16}^{(k)} = \left(a_{12}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{16}^{(k)} a_{22}^{(k)}\right) / \Omega_k, \quad \mathrm{B}_{26}^{(k)} = \left(a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} - a_{26}^{(k)} a_{11}^{(k)}\right) / \Omega_k$$

$$\Omega_k = \left(a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)}\right)^2\right) a_{66}^{(k)} + 2 a_{12}^{(k)} a_{16}^{(k)} a_{26}^{(k)} - a_{11}^{(k)} \left(a_{26}^{(k)}\right)^2 - a_{22}^{(k)} \left(a_{16}^{(k)}\right)^2 \quad (1.11)$$

Здесь и в последующем, для удобства, запятыми при нижних индексах выделены частные производные.

Величины со звездочкой для каждого s известны, если построены предыдущие приближения и определяются по формулам

$$w^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \left(a_{13}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-2)} + a_{23}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-2)} + a_{33}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-4)} + a_{34}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-3)} + a_{35}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-3)} + a_{36}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-2)}\right) d\zeta$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \left(-w_{,\xi}^{*(k,s)} + a_{15}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{25}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-3)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{56}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)}\right) d\zeta$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta} \left(-w_{,\eta}^{*(k,s)} + a_{14}^{(k)} \sigma_x^{(k,s-1)} + a_{24}^{(k)} \sigma_y^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)} \sigma_z^{(k,s-3)} + a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-2)} + a_{45}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-2)} + a_{46}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k,s-1)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = \mathrm{B}_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + \mathrm{B}_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + \mathrm{B}_{16}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + a_3^{(k)} \sigma_z^{(k,s-2)} + a_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + a_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} \ (x, y; a, b)$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = \mathrm{B}_{16}^{(k)} \varepsilon_1^{*(k,s)} + \mathrm{B}_{26}^{(k)} \varepsilon_2^{*(k,s)} + \mathrm{B}_{66}^{(k)} \omega^{*(k,s)} + c_3^{(k)} \sigma_z^{(k,s-2)} + c_4^{(k)} \sigma_{yz}^{(k,s-1)} + c_5^{(k)} \sigma_{xz}^{(k,s-1)} \quad (1.12)$$

$$\sigma_{xz}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\sigma_{x,\xi}^{*(k,s)} + \sigma_{xy,\eta}^{*(k,s)} + F_x^{(k,s)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_{yz}^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\sigma_{xy,\xi}^{*(k,s)} + \sigma_{y,\eta}^{*(k,s)} + F_y^{(k,s)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_z^{*(k,s)} = -\int_0^{\zeta} \left(\sigma_{xz,\xi}^{*(k,s)} + \sigma_{yz,\eta}^{*(k,s)} + F_z^{(k,s)}\right) d\zeta$$

где

$$\varepsilon_1^{*(k,s)} = u_{,\xi}^{*(k,s)}, \quad \varepsilon_2^{*(k,s)} = v_{,\eta}^{*(k,s)}, \quad w^{*(k,s)} = u_{,\eta}^{*(k,s)} + v_{,\xi}^{*(k,s)}$$

$$a_i^{(k)} = -\left(a_{1i}^{(k)} \mathrm{B}_{11}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} \mathrm{B}_{12}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} \mathrm{B}_{16}^{(k)}\right) \quad (1.13)$$

$$b_i^{(k)} = -\left(a_{1i}^{(k)} \mathrm{B}_{12}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} \mathrm{B}_{22}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} \mathrm{B}_{26}^{(k)}\right)$$

$$c_i^{(k)} = -\left(a_{1i}^{(k)} \mathrm{B}_{16}^{(k)} + a_{2i}^{(k)} \mathrm{B}_{26}^{(k)} + a_{i6}^{(k)} \mathrm{B}_{66}^{(k)}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2) , а также условиям полного контакта на плоскостях $\zeta = \zeta_k$ (k = 1, 2,..., n-1, 1, 2,..., m+1), все величины можно выразить через компоненты перемещения $u^{(n,s)}$, $v^{(n,s)}$ и $w^{(n,s)}$ Для определения же этих величин получается следующая система уравнений :

$$L_{11} u^{(n,s)} + L_{12} v^{(n,s)} + L_{13} w^{(n,s)} = p_1^{(s)} \quad (1.14)$$

$$L_{12} u^{(n,s)} + L_{22} v^{(n,s)} + L_{23} w^{(n,s)} = p_2^{(s)}$$

$$L_{13} u^{(n,s)} + L_{23} v^{(n,s)} + L_{33} w^{(n,s)} = q^{(s)}$$

где дифференциальные операторы L_{ij} имеют вид

$$L_{11} = C_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2C_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{66}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \qquad (1,2;\xi,\eta)$$

$$L_{12} = C_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(C_{12} + C_{66}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + C_{26}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$L_{13} = -\left[K_{11}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + 3K_{16}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} + \left(K_{12} + 2K_{66}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2} + K_{26}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right] \quad (1,2;\xi,\eta) \qquad (1.15)$$

$$L_{33} = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 2\left(D_{12}^{*} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + 4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\eta} + 4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta^3} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}$$

В (1.14) $p_i^{(s)}, q^{(s)}$ играют роль обобщенных нагрузок, для вычисления которых получаются формулы

$$p_1^{(s)} = -\left(X^{+(s)} + X^{-(s)}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{xz}^{*(k,s)}(\zeta_k) - \sigma_{xz}^{*(k,s)}(\zeta_{k-1})\right) - \sum_{k=1}^{m}\left(\sigma_{xz}^{*(-k,s)}(\zeta_{-k}) - \sigma_{xz}^{*(-k,s)}(\zeta_{-k+1})\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2\right)L_{13}^{(k)}\left(\sum_{j=k}^{n-1}W^{*(j,s)}(\zeta_j)\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k+1}^2\right)L_{13}^{(-k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}W^{*(j,s)}(\zeta_{-j}) - \sum_{j=1}^{k-1}W^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})\right)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\zeta_k - \zeta_{k-1}\right)\left[L_{11}^{(k)}\left(\sum_{j=k}^{n-1}U^{(j,s)}(\zeta_j)\right) + L_{12}^{(k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}V^{*(j,s)}(\zeta_j)\right)\right]\right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left\{\left(\zeta_{-k} - \zeta_{-k+1}\right)\left[L_{11}^{(-k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}U^{*(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1}U^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})\right) + L_{12}^{(-k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}V^{*(j,s)}(\zeta_j) -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sum_{j=1}^{k-1}V^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})\right)\right]\right\} \quad (x,y)$$

$$q^{(s)} = Z^{+(s)} + Z^{-(s)} + \zeta_n\frac{\partial X^{+(s)}}{\partial\xi} + \zeta_{-m}\frac{\partial X^{-(s)}}{\partial\xi} + \zeta_n\frac{\partial Y^{+(s)}}{\partial\eta} +$$

$$+\zeta_{-m}\frac{\partial Y^{-(s)}}{\partial\eta} - \sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_z^{*(k,s)}(\zeta_k) - \sigma_z^{*(k,s)}(\zeta_{k-1})\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\sigma_z^{*(-k,s)}(\zeta_{-k}) - \sigma_z^{*(-k,s)}(\zeta_{-k+1})\right) -$$

$$
-\sum_{k=1}^{n}\left[\zeta_k\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{*(k,s)}(\zeta_k)}{\partial\xi}+\frac{\sigma\delta_{yz}^{*(k,s)}(\zeta_k)}{\partial\eta}\right)+\zeta_{k-1}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{*(k,s)}(\zeta_{k-1})}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{*(k,s)}(\zeta_{k-1})}{\partial\eta}\right)\right]+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{m}\left[\zeta_{-k}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{*(-k,s)}(\zeta_{-k})}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{*(-k,s)}(\zeta_{-k})}{\partial\eta}\right)+\zeta_{-k+1}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}^{*(-k,s)}(\zeta_{-k+1})}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{*(-k,s)}(\zeta_{-k+1})}{\partial\eta}\right)\right]-
$$

$$
-\sum_{k=1}^{n}\left[1/3\,(\zeta_k^3-\zeta_{k-1}^3)L_{33}^{(k)}\left(\sum_{j=k}^{n-1}W^{*(j,s)}(\zeta_j)\right)+1/2\,(\zeta_k^2-\zeta_{k-1}^2)\times\right.
$$

$$
\left.\times\left(L_{13}^{(k)}\left(\sum_{j=k}^{n-1}U^{*(j,s)}(\zeta_j)\right)+L_{23}^{(k)}\left(\sum_{j=k}^{n-1}V^{*(j,s)}(\zeta_j)\right)\right)\right]+ \qquad (1.16)
$$

$$
+\sum_{k=1}^{m}[1/3\quad(\zeta_{-k}^3-\zeta_{-k+1}^3)L_{33}^{(k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}W^{*(j,s)}(\zeta_j)-\sum_{j=1}^{k-1}W^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})\right)+
$$

$$
+1/2\quad(\zeta_{-k}^2-\zeta_{-k+1}^2)\left(L_{13}^{(k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}U^{*(j,s)}(\zeta_j)-\sum_{j=1}^{k-1}U^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})\right)+\right.
$$

$$
\left.\left.+L_{23}^{(k)}\left(\sum_{j=1}^{n-1}V^{*(j,s)}(\zeta_j)-\sum_{j=1}^{k-1}V^{*(-j,s)}(\zeta_{-j})\right)\right)\right]
$$

$$
W^{*(\pm k,s)}=w^{*(\pm(k+1),s)}(\zeta_{\pm k})-w^{*(\pm k,s)}(\zeta_{\pm k})
$$

$$
U^{*(\pm k,s)}=u^{*(\pm(k+1),s)}(\zeta_{\pm k})-u^{*(\pm k,s)}(\zeta_{\pm k})+\frac{\partial W^{*(\pm k,s)}(\zeta_{\pm k})}{\partial\xi}\qquad(u,v)
$$

$$
X^{\pm(0)}=X^{\pm},Y^{\pm(0)}=Y^{\pm},Z^{\pm(0)}=Z^{\pm}
$$

$X^{\pm(s)}=Y^{\pm(s)}=Z^{\pm(s)}=0$ при $s\neq 0$

Жесткости C_{ij},K_{ij},D_{ij} определяются по формулам

$$
C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{(k)}(\zeta_k-\zeta_{k-1})-\sum_{k=1}^{m}B_{ij}^{(-k)}(\zeta_{-k}-\zeta_{-k+1})
$$

$$
K_{ij}=1/2\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{(k)}(\zeta_k^2-\zeta_{k-1}^2)-1/2\sum_{k=1}^{m}B_{ij}^{(-k)}(\zeta_{-k}^2-\zeta_{-k+1}^2) \qquad (1.17)
$$

$$
D_{ij}=1/3\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{(k)}(\zeta_k^3-\zeta_{k-1}^3)-1/3\sum_{k=1}^{m}B_{ij}^{(-k)}(\zeta_{-k}^3-\zeta_{-k+1}^3)
$$

а операторы $L_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$L_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \quad (1,2)$$

$$L_{12}^{(k)} = B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(B_{12}^{(k)} + B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \qquad (1.18)$$

$$L_{13}^{(k)} = -\left[B_{11}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \left(B_{12}^{(k)} + 2B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2} + 3B_{16}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right] \; (1,2)$$

$$L_{33}^{(k)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 2\left(B_{12}^{(k)} + 2B_{66}^{(k)}\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + 4B_{16}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\eta} + 4B_{26}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial\eta^3\partial\xi} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial\eta^4}$$

После удовлетворения условиям (1, 2) на лицевых поверхностях, в свою очередь, получаются

$$\tau_{xz0}^{(n,s)} = X^{+(s)} - 1/2\zeta_n^2\tau_{xz2}^{(n,s)} - \zeta_n\tau_{xz1}^{(n,s)} - \sigma_{xz}^{-(n,s)}(\zeta_n) \quad (x,y) \qquad (1.19)$$

$$\tau_{z0}^{(n,s)} = Z^{+(s)} - 1/6\zeta_n^3\tau_{z3}^{(n,s)} - 1/2\zeta_n^2\tau_{z2}^{(n,s)} - \zeta_n\tau_{z1}^{(n,s)} - \sigma_z^{+(n,s)}(\zeta_n) \quad .$$

Перемещения остальных слоев выражаются через $u^{(n,s)}, v^{(n,s)}$ и $w^{(n,s)}$ по формулам

$$u^{(k,s)} = u^{(n,s)} + \sum_{j=k}^{n-1} U^{+(j,s)}(\zeta_j) \quad (u,v)$$

$$w^{(k,s)} = w^{(n,s)} + \sum_{j=k}^{n-1} W^{+(j,s)}(\zeta_j) \quad (k = 1,2,\ldots, n\;\; 1) \qquad (1.20)$$

$$u^{(-k,s)} = u^{(n,s)} + \sum_{j=1}^{n-1} U^{+(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} U^{+(-j,s)}(\zeta_{-j}) \quad (u,v)$$

$$w^{(-k,s)} = w^{(n,s)} + \sum_{j=1}^{n-1} W^{+(j,s)}(\zeta_j) - \sum_{j=1}^{k-1} W^{+(-j,s)}(\zeta_{-j}) \quad (k = 1,2,\ldots,m)$$

а из условий полного контакта между слоями вытекают следующие реуррентные формулы для определения $\tau_{xz0}^{(k,s)}, \tau_{yz0}^{(k,s)}$ и $\tau_{z0}^{(k,s)}$

$$\tau_{xz0}^{(k,s)} = \tau_{xz0}^{(k+1,s)} - 1/2\zeta_k^2\left(L_{13}^{(k+1)}w^{k+1,s} - L_{13}^{(k)}w^{(k,s)}\right) -$$

$$-\zeta_k\left[\left(L_{11}^{(k+1)}u^{(k+1,s)} + L_{12}^{(k+1)}v^{(k+1,s)}\right) - \left(L_{11}^{(k)}u^{(k,s)} + L_{12}^{(k)}v^{(k,s)}\right)\right] + \sigma_{xz}^{+(k+1,s)}(\zeta_k) - \sigma_{xz}^{+(k,s)}(\zeta_k) \quad (x,y)$$

$$\tau_{z0}^{(k,s)} = \tau_{z0}^{(k+1,s)} + 1/3\zeta_k^2\left(L_{33}^{(k+1)}w^{(k+1,s)} - L_{33}^{(k)}w^{(k,s)}\right) +$$

$$+1/2\,\zeta_k^2\left(L_{13}^{(k+1)}u^{(k+1,s)} + L_{23}^{(k+1)}v^{(k+1,s)} - L_{13}^{(k)}u^{(k,s)} - L_{23}^{(k)}v^{(k,s)}\right) +$$

$$+\zeta_k\left(\sigma_{xz,\xi}^{+(k+1,s)}(\zeta_k) - \sigma_{xz,\xi}^{+(k,s)}(\zeta_k)\right) + \zeta_k\left(\sigma_{yz,\eta}^{+(k+1,s)}(\zeta_k) - \sigma_{yz,\eta}^{+(k,s)}(\zeta_k)\right) + \sigma_z^{+(k+1,s)}(\zeta_k) - \sigma_z^{+(k,s)}(\zeta_k)$$

После решения системы (1.14), остальные функции, входящие в (1.8), определяются по формулам (1.9). Таким образом, определяются все напряжения и перемещения, в том числе и напряжения $\sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}$ и $\sigma_{z}^{(k)}$, которыми, как обычно, пренебрегаются в классической теории пластин.

2.Сопоставим полученные результаты с результатами по классической теории пластин.

Для этого вместо напряжений введем в рассмотрение статически эквивалентные им внутренние силы и моменты по формулам

$$
\begin{aligned}
T_x^{(s)} &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \sigma_x^{(i,s)}d\zeta + \sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}} \sigma_x^{(-i,s)}d\zeta \quad (x,y)\\
S^{(s)} &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \sigma_{xy}^{(i,s)}d\zeta + \sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}} \sigma_{xy}^{(-i,s)}d\zeta \qquad (2.1)\\
N_x^{(s)} &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \sigma_{xz}^{(i,s)}d\zeta + \sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}} \sigma_{xz}^{(-i,s)}d\zeta \quad (x,y)\\
M_x^{(s)} &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta\sigma_x^{(i,s)}d\zeta + \sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}} \zeta\sigma_x^{(-i,s)}d\zeta \quad (x,y)\\
H^{(s)} &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \zeta\sigma_{xy}^{(i,s)}d\zeta + \sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}} \zeta\sigma_{xy}^{(-i,s)}d\zeta
\end{aligned}
$$

Используя формулы (2.1), (1.8) (1.10), для тангенциальных и поперечных сил, а также для изгибающих и крутящих моментов имеем

$$T_x^{(s)} = K_{11}\chi_1^{(s)} + K_{12}\chi_2^{(s)} + K_{16}\tau^{(s)} + C_{11}\varepsilon_1^{(s)} + C_{12}\varepsilon_2^{(s)} + C_{16}\omega^{(s)} + T_x^{*(s)}$$
$$(x,y)$$
$$S^{(s)} = K_{16}\chi_1^{(s)} + K_{26}\chi_2^{(s)} + K_{66}\tau^{(s)} + C_{16}\varepsilon_1^{(s)} + C_{26}\varepsilon_2^{(s)} + C_{66}\omega^{(s)} + S^{*(s)}$$
$$(x,y)$$
$$M_x^{(s)} = D_{11}\chi_1^{(s)} + D_{12}\chi_2^{(s)} + D_{16}\tau^{(s)} + K_{11}\varepsilon_1^{(s)} + K_{12}\varepsilon_2^{(s)} + K_{16}\omega^{(s)} + M_x^{*(s)}$$
$$H^{(s)} = D_{16}\chi_1^{(s)} + D_{26}\chi_2^{(s)} + D_{66}\tau^{(s)} + K_{16}\varepsilon_1^{(s)} + K_{26}\varepsilon_2^{(s)} + K_{66}\omega^{(s)} + H^{*(s)} \qquad (2.2)$$
$$N_x^{(s)} = \zeta_n X^{*(s)} - \left[D_{11}\frac{\partial^3 w^{(n,s)}}{\partial\xi^3} + (D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3 w^{(n,s)}}{\partial\xi\partial\eta^2} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w^{(n,s)}}{\partial\xi^2\partial\eta} + D_{26}\frac{\partial^3 w^{(n,s)}}{\partial\eta^3}\right] -$$
$$\left[K_{11}\frac{\partial^2 u^{(n,s)}}{\partial\xi^2} + 2K_{16}\frac{\partial^2 u^{(n,s)}}{\partial\xi\partial\eta} + K_{66}\frac{\partial^2 u^{(n,s)}}{\partial\eta^2} + K_{16}\frac{\partial^2 v^{(n,s)}}{\partial\xi^2} + \right.$$
$$\left. + K_{26}\frac{\partial^2 v^{(n,s)}}{\partial\eta^2} + (K_{12}+K_{66})\frac{\partial^2 v^{(n,s)}}{\partial\xi\partial\eta}\right] + N_x^{*(s)} \quad (x,y)$$

где

$$T_x^{*(s)} = \sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i}\left[\sigma_x^{*(i,s)} + \sum_{j=i}^{n-1}\zeta L_{111}^{(i)} W^{*(j,s)}\right]d\zeta +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}}\left[\sigma_x^{*(-i,s)} + \sum_{j=1}^{n}\zeta L_{111}^{(-i)} W^{*(j,s)} - \sum_{j=1}^{i-1}\zeta L_{111}^{(-i)} W^{*(-j,s)}\right]d\zeta + \tag{2.3}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\ell_{11}^{(i)}U^{*(j,s)} + \ell_{12}^{(i)}V^{*(j,s)}\right)d\zeta + \sum_{i=1}^{m}\int_{\zeta_{-i}}^{\zeta_{-i+1}}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\left(\ell_{11}^{(-i)}U^{*(-j,s)} + \ell_{12}^{(-i)}V^{*(-j,s)}\right) -\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{i-1}\left(\ell_{11}^{(-i)}U^{*(-j,s)} + \ell_{12}^{(-i)}V^{*(-j,s)}\right)\right]d\zeta \quad (x,y)$$

а операторы $L_{111}^{(i)}, \ell_{11}^{(i)}, \ell_{12}^{(i)}$ имеют вид

$$L_{111}^{(i)} = B_{11}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + B_{12}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} \quad (1,2;\xi,\eta)$$

$$\ell_{11}^{(i)} = B_{11}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}; \qquad \ell_{12}^{(i)} = B_{12}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta} + B_{16}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{2.4}$$

Величины $T_x^{*(s)}, S^{*(s)}, \dots, N_x^{*(s)}$ определяются аналогичным образом, меняются лишь операторы $L_{111}^{(i)}, \ell_{11}^{(i)}, \ell_{12}^{(i)}$ Они здесь не приводятся, их воспроизвести нетрудно.

Уравнения (1.14) и соответствующие соотношения (1.7)-(1.9) или (2.2), для нулевого приближения совпадают с классическими уравнениями анизотропной слоистой пластинки, когда для каждого слоя имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости xOy и принимается гипотеза Кирхгофа-Лява для всего пакета в целом. Усилия, моменты, а также жесткости и компоненты деформаций классической теории (они размерные, отмечены нами черточкой) выражаются через соответствующие величины нулевого приближения при помощи формул

$$\begin{aligned}
&\overline{T}_x = h\varepsilon^{-2}T_x^{(0)} \quad (x,y), \quad \overline{S} = h\varepsilon^{-2}S^{(0)} \\
&\overline{M}_x = h^2\varepsilon^{-2}M_x^{(0)} = a^2M_x^{(0)} \quad (x,y), \quad \overline{H} = a^2H^{(0)} \\
&\overline{C}_{ij} = hC_{ij}, \quad \overline{K}_{ij} = h^2K_{ij}, \quad \overline{D}_{ij} = h^3D_{ij} \\
&\overline{\chi}_1 = a^{-1}\varepsilon^{-3}\chi_1^{(0)}, \quad \overline{\chi}_2 = a^{-1}\varepsilon^{-3}\chi_2^{(0)}, \quad \overline{\tau} = a^{-1}\varepsilon^{-3}\tau^{(0)} \\
&\overline{\varepsilon}_1 = \varepsilon^{-2}\varepsilon_1^{(0)}, \quad \overline{\varepsilon}_2 = \varepsilon^{-2}\varepsilon_2^{(0)}, \quad \overline{\omega} = \varepsilon^{-2}\omega^{(0)}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Следовательно, гипотеза недеформируемых нормалей с определенной точностью применима и для слоистых пластинок с общей анизотропией. Лишь необходимо при определении $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}$ и $\sigma_{xy}^{(k)}$ в первых уравнениях обобщенного закона Гука наряду с нормальным напряжением $\sigma_z^{(k)}$ пренебречь также влиянием касательных напряжений $\sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}$.

В ходе асимптотического интегрирования напряжение $\sigma_z^{(k)}$ появляется в основных соотношениях, начиная с приближения $s=2$, а напряжения $\sigma_{xz}^{(k)}$ и $\sigma_{yz}^{(k)}$ - с приближения $s=1$. Это означает, что пренебрежение $\sigma_z^{(k)}$ приводит к формальной погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$, в то время, как пренебрежение напряжениями $\sigma_{xz}^{(k)}$ и $\sigma_{yz}^{(k)}$ приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon)$. Следовательно, гипотеза Кирхгофа Лява для слоистой пластинки со слоями с общей анизотропией (21 упругая константа) приведет к большой погрешности, чем в случае, когда слои ортотропные или имеют плоскость упругой симметрии.

На примере двухслойной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида, выясним, каков вклад общей анизотропии, если пожелать уточнить классические уравнения, когда принимается гипотеза Кирхгофа Лява. Для этого вычислим обобщенные нагрузки, входящие в правые части уравнений (1.14), соответствующие $s=1$.

$$
\begin{aligned}
p_1^{(1)} &= -\left(p_{15}^{(1)}X^+ + p_{14}^{(1)}Y^+\right)\zeta_1 - \left(p_{15}^{(-1)}X^- + p_{14}^{(-1)}\right)\zeta_{-1} + \\
&+ \left(L_{w1}^{(1)} - L_{w1}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{u1}^{(1)} - L_{u1}^{(-1)}\right)u^{(0)} + \left(L_{v1}^{(1)} - L_{v1}^{(-1)}\right)v^{(0)} \\
p_2^{(1)} &= -\left(p_{25}^{(1)}X^+ + p_{24}^{(1)}Y^+\right)\zeta_1 - \left(p_{25}^{(-1)}X^- + p_{24}^{(-1)}Y^-\right)\zeta_{-1} + \\
&+ \left(L_{w2}^{(1)} - L_{w2}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{u2}^{(1)} - L_{u2}^{(-1)}\right)u^{(0)} + \left(L_{v2}^{(1)} - L_{v2}^{(-1)}\right)v^{(0)} \\
q^{(1)} &= 1/2\zeta_1^2\left(p_5^{(1)}X^+ + p_4^{(1)}Y^+\right) - 1/2\zeta_{-1}^2\left(p_5^{(-1)}X^- + p_4^{(-1)}Y^-\right) + \\
&+ 1/4\zeta_1^4\left(p_5^{(1)}L_{13}^{(1)} + p_4^{(1)}L_{23}^{(1)}\right)w^{(0)} - 1/4\zeta_{-1}^4\left(p_5^{(-1)}L_{13}^{(-1)} + \right. \\
&\left. + p_4^{(-1)}L_{23}^{(-1)}\right)w^{(0)} + \left(L_{W1}^{(1)} - L_{W1}^{(-1)}\right)u^{(0)} + \left(L_{W2}^{(1)} - L_{W2}^{(-1)}\right)v^{(0)}
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

Входящие в (2.6) операторы имеют вид

$$
P_{14}^{(i)} = a_4^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + c_4^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}, \quad p_{24}^{(i)} = b_4^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta} + c_4^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} \quad (4,\ 5)
$$

$$
P_4^{(i)} = \frac{\partial p_{14}^{(i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial p_{24}^{(i)}}{\partial\eta} = a_4^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2c_4^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + b_4^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \quad (4,\ 5)
$$

$$
\begin{aligned}
L_{W1}^{(1)} &= -1/3\zeta_i^3\left(p_{15}^{(i)}L_{13}^{(i)} + P_{14}^{(i)}L_{23}^{(i)}\right) + 1/6\zeta_i^2\left(p_5^{(i)}L_{11}^{(i)} + P_4^{(i)}L_{12}^{(i)}\right) \\
L_{u1}^{(i)} &= -\zeta_i^2\left(p_{15}^{(i)}L_{11}^{(i)} + p_{14}^{(i)}L_{12}^{(i)}\right) \qquad (1,\ 2;\ 4,\ 5;\ u, v) \\
L_{v1}^{(i)} &= -1/2\zeta_i^2\left[p_{25}^{(i)}L_{11}^{(i)} + \left(p_{24}^{(i)} + p_{15}^{(i)}\right)L_{12}^{(i)} + p_{14}^{(i)}L_{22}^{(i)}\right] \quad (i = 1, -1)
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

Если обобщенные нагрузки $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q^{(1)}$ имеют порядок

$$p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, q^{(1)} \sim O\left(\varepsilon^{(-1)}\right) \qquad (2.8)$$

то поправка от приближения $s=1$ будет порядка первого члена в разложении (1.3) и асимптотика (1.4), следовательно, и класическая теория Кирхгофа Лява, не будут верны. Тогда, необходимо либо искать другую асимптотику, либо решать трехмерную задачу численными или другими методами. В практических приложениях такие случаи можно исключить, варьировав размерами пластинки.

Из выражений (2.6) для обобщенных нагрузок вытекает, что условия (2.8) могут выполняться в двух случаях:

а) внешние силы имеют большую изменяемость, б) для материалов, обладающих сильной анизотропией, т. е. когда имеют место соотношения

$$a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)} \sim O\left(\varepsilon^{-1}\right) \quad (i = 4, 5;\ k = -1, 1) \qquad (2.9)$$

Поправки от приближения $s=2$ будут важны, если

$$a_i^{(k)}, b_i^{(k)}, c_i^{(k)} \sim O\left(\varepsilon^{-2}\right) \quad (i = 3, 4, 5;\ k = -1, 1) \qquad (2.10)$$

в чем можно убедиться, если вычислить приведенную нагрузку для приближения $s=2$.

В заключение отметим, что построенные двумерные уравнения и соответствующие им решения верны во внутренней области пластинки, т. е. начиная с расстояний от боковой поверхности, равных зоне простирания пограничного слоя. Решение погранслоя и вопрос его взаимодействия с внутренним НДС рассматривается как в [8, 9, 14].

The research described in this publication was made possible in part by Grant No MVSOOO from the International Science Foundation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба плас тинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668-686.
2. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки.-М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. : Наука, 1967. 268 с.
4. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 447 с.
5. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек. - ПМ, 1972, т. 8, вып. 6, с. 3-17.

6. *Никитин В.С., Шапиро К.С.* Задачи теории упругости для много слойных сред. М.:Наука, 1973. 131 с.
7. *Агаловян Л.А.* К теории изгиба ортотропных пластин. Инж. журн. МТТ, 1966, N 6, 114-121.
8. *Агаловян Л.А.* К вопросу приведения граничных условий трехмерной задачи к двумерным в теории анизотропных пластинок. - Уч. записки ЕГУ, ест. науки, 1978, N 2 (138), с. 20-28.
9. *Агаловян Л.А.* О граничных условиях в теории анизотропных плас тинок. - Уч.записки ЕГУ, ест. науки 1978, N 3 (139), с. 21-30.
10. *Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М.* К вопросу определения напря женно-деформированного состояния пластинок с общей анизотро пией. В сб.: "XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин". Тезисы докладов М., 1977.
11. *Гусейн-Заде М.И.* Построение теории изгиба слоистых пластинок. - Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластин. - М. : Наука, 1966, с. 367-378.
12. *Гусейн-Заде М.И.* К построению теории изгиба слоистых пластинок. - ПММ, 1968, т.32, вып. 2, с. 232-243.
13. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 400 с.
14. *Агаловян Л.А.* О погранслое пластинок. - Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 55, N 3, с.155

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
17. 05. 1995