ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ УПРУГИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Геворкян Р. С.

Ռ.Ս. Գևորգյան

Իրար հաջորդող առաձգական եւ ռեոլոգիական շերտերից կազմված շերտավոր սալերի խառը խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ եղանակով լուծված են շերտավոր սալերի խառը խնդիրները, երբ անիզոտրոպ առաձգական եւ իզոտրոպ առաձգամածուցիկ շերտերը հաջորդում են իրար: Լուծված են ներքին խնդիրներ, երբ սալի մեկ երեսնային մակերեւույթի վրա տրված են կինեմատիկական պայմաններ, իսկ հանդիպակաց երեսնային մակերեւույթի վրա տրված են լարումները, տեղափոխումները եւ նրանց համապատասխան կոմբինացիաները: Արտածված են ռեկուրենտ բանաձեւեր շերտերում լարումները եւ տեղափոխումները հաշվելու համար: Նշված են դեպքերը, երբ իտերացիոն պրոցեսն ընդհատվում է՝ բերելով ճշգրիտ լուծումների: Բերված են արտածված բանաձեւերի կիրառությունները լուսաբանող օրինակներ:

R.S.Gevorgian

On Asymptotic Solution of Mixed Boundary Problems of Layered Plates, Consisting of Alternated Elastic and Rheological Layers

Слоистые пластины, состоящие из чередующихся упругих и реологических слоев, широко распространены в качестве конструктивных элементов во многих областях техники и строительства. Многие композиционные слоистые конструктивные элементы летательных и других аппаратов состоят из чередующихся упругих основ и вяжущих с реологическими свойствами, упругий фундамент лежит на вязкоупругом основании и др. Разработка методов решения соответствующих задач представляет теоретический и практический интерес.

Асимптотическим методом решаются смешанные краевые задачи пластины (слоя), состоящей из чередующихся упругих анизотропных и наследственно ползучих изотропных слоев четного и нечетного количества, когда на одной лицевой поверхности пластины заданы компоненты вектора перемещения, а на противоположной - статические, кинематические или смешанные условия краевых задач теории упругости. Считается, что между слоями выполняются условия полного контакта. Выведены рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений в каждом слое. Приводится анализ распространения фактора времени (зависимости от времени) по компонентам полей напряжений и перемещений трехслойной пластины, когда внешние слои упругие. Считается, что одна из упругих лицевых поверхностей жестко закреплена, а на другую действуют полиномиальные нормальная и тангенциальные нагрузки. Подобные задачи, в частности, моделируют клеевое соединение двух ортотропных пластин (слоев) с учетом реологических свойств клея.

1. Имеем слоистую тонкую пластину, отнесенную к прямоугольной системе координат

$$0xyz:\quad \Omega = \left\{ x, y, z:\ 0 \le z \le H,\ -a \le x,\ y \le a,\ H = \sum_{i=1}^{\infty} h_i,\ H << a, \right.$$

где a-характерный продольный размер пластины, i -номер слоя толщины h_i, $\sum_{k=i+1}^{n} h_k \le z \le \sum_{k=i}^{n} h_k$, n -количество слоев. Слои под нечетными номерами $i = 2m-1$ упругие, прямолинейно анизотропные, а под четными номерами $i = 2m$ - упруго-ползучие.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, если на лицевой поверхности $z = 0$ нижнего слоя $i = n$ заданы значения компонентов вектора перемещения

$$u_j(z=0) = u_j^-(x,y), \quad j = x,y,z \tag{1.1}$$

а на противоположной лицевой поверхности $z = H$ ($i = 1$ соответствует первому упругому слою) заданы условия первой краевой задачи

$$\sigma_{jz}(z=H) = \varepsilon^{-1}\sigma_{jz}^+(x,y), \quad j = x,y,z \tag{1.2}$$

второй краевой задачи

$$u_j(z=H) = u_j^+(x,y), \quad j = x,y,z \tag{1.3}$$

или смешанных краевых задач теории упругости

а) $u_j(z=H)u_j^+,\ j = x,y;\qquad \sigma_{zz}(z=H) = \varepsilon^{-1}\sigma_{zz}^+$ (1.4)

б) $u_z(z=H)u_z^+,\qquad \sigma_{jz}^{\cdot}(z=H) = \varepsilon^{-1}\sigma_{jz}^+\quad j = x,y$ (1.5)

Считается, что между упругими и реологическими слоями пластины выполняются условия полного контакта

$$\sigma_{jz}^{(i)}(z_i) = \sigma_{jz}^{(i+1)}(z_i), \quad u_j^{(i)}(z_i) = u_j^{(i+1)}(z_i), \quad j = x,y,z$$

$$z_i = \sum_{k=i+1}^{n} h_k, \quad i = 1,2,\cdots,n-1 \tag{1.6}$$

Индексом i обозначены величины, относящиеся к слою с таким номерам.

Для решения поставленной задачи должны быть удовлетворены уравнения равновесия с учетом объемных сил

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(i)}}{\partial z} + F_x^{(i)} = 0 \quad (x,y,z) \tag{1.7}$$

получим интегральные уравнения Вольтерра второго рода относительно $\sigma_{xx}^{(i)}(t), \sigma_{yy}^{(i)}(t), \sigma_{zz}^{(i)}(t)$, формальными решениями которых являются

$$\sigma_{xx}^{(i)}(t)=\frac{E_i(t)}{1-\nu_i^2(t)}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial x}+\nu_i(t)\frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial y}\right)+\frac{\nu_i(t)}{1-\nu_i(t)}\sigma_{zz}^{(i)}(t)-$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz}^{(i)}(\tau)R_{2i}(t,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial x}+\frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial y}\right)R_{1i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial y}\right)R_i(t,\tau)\right]d\tau \qquad (x,y)$$

$$\sigma_{xy}^{(i)}(t)=\frac{E_i(t)}{2\left(1+\nu_i(t)\right)}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial x}\right)R_i(t,\tau)d\tau \tag{1.11}$$

$$R_i(t,\tau)=\frac{E_i(\tau)}{1+\nu_i(t)}R_i^*(t,\tau),\qquad R_{1i}(t,\tau)=\frac{E_i(\tau)}{1-\nu_i(\tau)}R_{1i}^*(t,\tau)$$

$$R_{2i}(t,\tau)=\frac{E_i(\tau)}{1-\nu_i(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)-\frac{\nu_i(\tau)}{1-\nu_i(\tau)}R_{1i}^*(t,\tau)+$$

$$+\int_{\tau}^{t}\frac{E_i(\alpha)}{1-\nu_i(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(\alpha,\tau)R_{1i}^*(\alpha,\tau)d\alpha$$

где $R_i^*(t,\tau)$ и $R_{1i}^*(t,\tau)$ -резольвенты ядер

$$K_i(t,\tau)=\frac{E_i(t)}{1+\nu_i(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)+\delta_{1i}(t,\tau)\right)$$

$$K_{1i}(t,\tau)=\frac{E_i(t)}{1-\nu_i(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)-\delta_{1i}(t,\tau)\right)$$

Получим асимптотическое решение поставленных краевых задач. Для этого, следуя [2-6], в (1.7)-(1.11) перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad z = h\zeta = a\varepsilon\zeta, \quad \varepsilon = h/a, \quad h = \max\{h_i\}$$

$$u_x = au, \quad (x, y, z;\ u, \mathrm{v}, w) \tag{1.12}$$

В результате, получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений относительно компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, решение которой (решение внутренней задачи) ищем в виде асимптотического разложения [4-6]

$$Q^{(i)} = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{\chi_Q + s} Q^{(i,s)} \tag{1.13}$$

где $\chi_u = 0$ для перемещений и $\chi_\sigma = -1$ для напряжений. А объемные силы представим в виде разложения $F_j^{(i)} = \sum_{s=0}^{s} \varepsilon^{-2+s} F_j^{(i,s)} a^{-1}, \quad j = x, y, z.$

Подставив (1.13) в указанную сингулярно возмущенную систему и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях каждого уравнения (метод Пуанкаре), получим непротиворечивую систему относительно неизвестных коэффициентов $Q^{(i,s)}$ разложения (1.13). Решив эту систему, получим рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений каждого слоя пластинки. Чтобы придавать этим формулам удобный для прикладных приложений вид, целесообразно возвратиться к исходным размерным координатам по (1.12). Расчетные формулы можно представить в виде

$$Q^{(i)} = \sum_{s=0}^{S} Q^{(i,s)}(x, y, z), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.14}$$

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$\sigma_{jz*}^{(i,s)} = -\int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial y} + F_j^{(i,s)} \right) dz \tag{1.15}$$

$$j = x, y, z; \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

для упругих слоев $i = 2m - 1$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = A_{13}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{14}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{15}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$(xx, yy, xy;\ 1j, 2j, 6j;\ j = 3, 4, 5)$$

$$u_x^{(i,s)} = z\left(A_{53}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} \right) + u_{x0}^{(i,s)}(x, y) + u_{x*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$(u_x, u_y, u_z;\ 5j, 4j, 3j;\ j = 3, 4, 5)$$

$$\sigma_{xx*}^{(i,s)} = B_{11}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{12}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{16}^{(i)} P_3^{(i,s)}$$

$$(xx, yy, xy;\ 1j, 2j, 6j;\ j = 1,2,6) \qquad (1.16)$$

$$P_1^{(i,s)} = \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} - a_{13}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} - a_{14}^{(i)} \sigma_{yz*}^{(i,s)} - a_{15}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)} \qquad (x, y;\ 1,2)$$

$$P_3^{(i,s)} = \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x} - a_{36}^{(i)} \sigma_{zz*}^{(i,s)} - a_{46}^{(i)} \sigma_{yz*}^{(i,s)} - a_{56}^{(i)} \sigma_{xz*}^{(i,s)}$$

$$u_{x*}^{(i,s)} = \int_0^z \left(a_{15}^{(i)} \sigma_{xx*}^{(i,s)} + a_{25}^{(i)} \sigma_{yy*}^{(i,s)} + \cdots + a_{65}^{(i)} \sigma_{xy*}^{(i,s)} - q_x \right) dz$$

$$(u_x, u_y, u_z;\ q_x, q_y, q_z;\ j5, j4, j3;\ j = 1,2,\cdots,6) \quad q_x = \frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x}(x, y),\ q_z = 0$$

$$B_{nj}^{(i)} = \left(a_{nk}^{(i)} a_{jk}^{(i)} - a_{nj}^{(i)} a_{kk}^{(i)} \right) / \Delta^{(i)}, \quad n \neq j \neq k \neq n$$

$$B_{kk}^{(i)} = \left(a_{nn}^{(i)} a_{jj}^{(i)} - a_{nj}^{(i)2} \right) / \Delta^{(i)}, \quad B_{nj}^{(i)} = B_{jn}^{(i)},\ n, j, k = 1,2,6$$

$$A_{kl}^{(i)} = -a_{1l}^{(i)} B_{k1}^{(i)} - a_{2l}^{(i)} B_{k2}^{(i)} - a_{6l}^{(i)} B_{k6}^{(i)}, \quad A_{ml}^{(i)} \neq A_{lm}^{(i)}$$

$$A_{ml}^{(i)} = a_{1m}^{(i)} A_{1l}^{(i)} + a_{2m}^{(i)} A_{2l}^{(i)} + a_{6m}^{(i)} A_{6l}^{(i)} + a_{lm}^{(i)}, \quad m, l = 3,4,5$$

$$\Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i)} a_{26}^{(i)} a_{16}^{(i)} - a_{11}^{(i)} a_{26}^{(i)2} - a_{22}^{(i)} a_{16}^{(i)2} - a_{12}^{(i)2} a_{66}^{(i)}$$

для упруго-ползучих слоев $i = 2m$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = \frac{\nu_i(t)}{1 - \nu_i(t)} \sigma_{zz0}^{(i,s)}(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma_{zz0}^{(i,s)}(\tau) R_{2i}(t, \tau) d\tau + \sigma_{xx*}^{(i,s)}, \quad (x, y)$$

$$\sigma_{xy}^{(i,s)} = \frac{E_i(t)}{2(1 + \nu_i(t))} \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^t \left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} \right) R_i(t, \tau) d\tau$$

$$u_x^{(i,s)} = 2z \left(\frac{1 + \nu_i(t)}{E_i(t)} \sigma_{xz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_{xz0}^{(i,s)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\delta_i(t, \tau) + \delta_{1i}(t, \tau) \right) d\tau \right) +$$

$$+ u_{x0}^{(i,s)} + u_{x*}^{(i,s)} \qquad (x, y)$$

$$u_z^{(i,s)} = z\left(\frac{1-\nu_i(t)-2\nu_i^2(t)}{\left(1-\nu_i(t)\right)E_i(t)}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(\tau)R_{3i}(t,\tau)d\tau\right) + \tag{1.17}$$

$$+u_{z0}^{(i,s)} + u_{z*}^{(i,s)}$$

$$\sigma_{xx*}^{(i,s)} = \frac{E_i(t)}{1-\nu_i^2(t)}\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(t)}{\partial x} + \nu_i(t)\frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(t)}{\partial y}\right) + \frac{\nu_i(t)}{1-\nu_i(t)}\sigma_{zz*}^{(i,s)}(t) +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz*}^{(i,s)}(\tau)R_{2i}(t,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y}\right)R_{1i}(t,\tau) +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y}\right)R_i(t,\tau)\right]d\tau$$

$$u_{xx}^{(i,s)} = \int_0^z\left[\frac{2\left(1+\nu_i(t)\right)}{E_i(t)}\sigma_{xz*}^{(i,s)} - 2\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz*}^{(i,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)+\delta_{1i}(t,\tau)\right)d\tau -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x}\right]dz \qquad (x,y)$$

$$u_{zz}^{(i,s)} = \int_0^z\left(E_i^{-1}(t)\left[\sigma_{zz*}^{(i,s)}(t) - \nu_i(t)\left(\sigma_{xx*}^{(i,s)}(t)+\sigma_{yy*}^{(i,s)}(t)\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_{zz*}^{(i,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \left(\sigma_{xx*}^{(i,s)}(\tau)+\sigma_{yy*}^{(i,s)}(\tau)\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_{1i}(t,\tau)\right]d\tau\right)dz$$

$$R_{3i}(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\delta_i(t,\tau) - \frac{2\nu_i(\tau)}{1-\nu_i(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_{1i}(t,\tau) +$$

$$+\frac{2\nu_i(t)}{E_i(t)}R_{2i}(t,\tau) - \int_{\tau}^{t}R_{2i}(\alpha,\tau)\frac{\partial}{\partial\alpha}\delta_{1i}(t,\alpha)\,d\alpha$$

Общий интеграл системы (1.7)-(1.11), выраженный рекуррентными формулами (1.14)-(1.17), содержит $6n$ функций интегрирования $\sigma_{jz0}^{(i,s)}, u_{j0}^{(i,s)}$, $j = x,y,z;\ i = 1,2,\ldots,n$ для каждого шага итерации s, которые однозначно определяются из граничных условий (1.1)-(1.5) и из условий контакта слоев (1.6).

2. Удовлетворив условиям контакта слоев, получим

$$\sigma_{jz0}^{(i+1,s)} = \sigma_{jz0}^{(1,s)} + \sum_{k=1}^{i}\left(\sigma_{jz*}^{(k,s)}(z_k) - \sigma_{jz*}^{(k+1,s)}(z_k)\right) \tag{2.1}$$
$$j = x, y, z \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

$$u_{x0}^{(i,s)} = u_{x0}^{(i+1,s)} + u_{x*}^{(i+1,s)}(z_i) + z_i\left(\frac{\mu_x^{(i+1)}(t)}{E_{i+1}(t)}\sigma_{xz0}^{(i+1,s)}(t) - \right.$$
$$\left. -\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz0}^{(i+1,s)}(\tau)K_{xz}^{(i+1)}(t,\tau)\,d\tau\right) - u_{x*}^{(i,s)}(z_i) -$$
$$-z_i\left(A_{53}^{(i)}\sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)}\sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)}\sigma_{xz0}^{(i,s)}\right)$$

$$\left(u_x, u_y, u_z; \quad \mu_x, \mu_y, \mu_z; \quad xz, yz, zz; \quad 5,4,3\right) \tag{2.2}$$

$$\mu_x^{(i)}(t) = \mu_y^{(i)}(t) = 2\left(1+\nu_i(t)\right), \quad \mu_z^{(i)}(t) = \frac{1-\nu_i(t) - 2\nu_i^2(t)}{1-\nu_i(t)}$$
$$K_{xz}^{(i)}(t,\tau) = K_{yz}^{(i)}(t,\tau) = 2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau) + \delta_{1i}(t,\tau)\right)$$
$$K_{zz}^{(i)}(t,\tau) = R_{3i}(t,\tau)$$

для слоев с нечетными номерами $i = 2m-1$, а для слоев с четными номерами $2m$

$$u_{x0}^{(i,s)} = u_{x0}^{(i+1,s)} + z_i\left(A_{53}^{(i+1)}\sigma_{zz0}^{(i+1,s)} + A_{54}^{(i+1)}\sigma_{yz0}^{(i+1,s)} + A_{55}^{(i+1)}\sigma_{xz0}^{(i+1,s)}\right) -$$
$$-z_i\left(\frac{\mu_x^{(i)}(t)}{E_i(t)}\sigma_{xz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\tau)K_{xz}^{(i)}(t,\tau)\,d\tau\right) + \tag{2.3}$$
$$+u_{x*}^{(i+1,s)}(z_i) - u_{x*}^{(i,s)}(z_i) \quad \left(u_x, u_y, u_z;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z;\ xz, yz, zz;\ 5,4,3\right)$$

Удовлетворив на поверхности $z = 0$ пластины граничным условиям (1.1), получим

$$u_{j0}^{(n,s)} = u_j^{-(s)}, \quad u_{j0}^{-(0)} = u_j^{-}, \quad u_j^{-(s)} = 0 \quad s \neq 0, \quad j = x, y, z \tag{2.4}$$

Если на поверхности $z = H$ пластины заданы статические условия (1.2), то для оставшихся неопределенными трех функций интегрирования получим

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)} = \sigma_{jz}^{+(s)} - \sigma_{jz*}^{(1,s)}(H), \quad \sigma_{jz}^{+(0)} = \sigma_{jz}^{+}$$
$$\sigma_{jz}^{+(s)} = 0 \quad s \neq 0, \quad j = x, y, z \tag{2.5}$$

Отметим, что формулы (2.4), (2.5) не зависят от того, является ли последний слой упругим или упруго-ползучим.

Если на поверхности $z=H$ заданы кинематические условия (1.3), то для определения $\sigma_{jz0}^{(1,s)}$ $j=x,y,z$ получаются интегральные уравнения, формальные решения которых для ортотропных тел дают

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)} = U_{jz}^{(s)}(t) + \int_{\tau_1}^{t} U_{jz}^{(s)}(\tau) R_{jz}(t,\tau)\, d\tau, \quad j=x,y,z$$

$$U_{xz}^{(s)} = \frac{1}{T_5(t)}\left[V_{xz}^{(s)} - \sum_{k=1}^{p}\left(W_{xz}^{(k,s)} + D_5^{(k)} \sum_{l=1}^{2k}\left(\sigma_{xz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{xz*}^{(l+1,s)}(z_l)\right)\right)\right]$$

$$(xz, yz, zz;\ 5,4,3) \tag{2.6}$$

$$V_{jz}^{(s)} = u_j^{+(s)} - u_j^{-(s)} - \sum_{k=1}^{n}\left(u_{j*}^{(k,s)}(z_{k-1}) - u_{j*}^{(k,s)}(z_k)\right), \quad j=x,y,z$$

$$W_{jz}^{(k,s)}(t) = \sum_{l=1}^{2k-1} h_{2k}\left[\frac{\mu_j^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)}\left(\sigma_{jz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{jz*}^{(l+1,s)}(z_l)\right) - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_1}^{t}\left(\sigma_{jz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{jz*}^{(l+1,s)}(z_l)\right) K_{jz}^{(2k)}(t,\tau)\, d\tau\right], \quad j=x,y,z$$

$R_{xz}(t,\tau)$ -резольвента ядра $T_5^{-1}(t)\sum_{k=1}^{p} h_{2k} K_{xz}^{(2k)}(t,\tau)$ $(xz, yz, zz;\ 5,4,3)$

где для нечетного общего количества слоев n имеем

$$T_5(t) = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} h_{2k} \frac{\mu_x^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)} \tag{2.7}$$

$$(5,4,3;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z); \quad D_5^{(k)} = h_{2k+1} A_{55}^{(2k+1)} \quad (5,4,3)$$

а для четного общего количества слоев n имеем

$$T_5(t) = \sum_{k=1}^{n/2}\left(h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)} + h_{2k} \frac{\mu_x^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)}\right) \tag{2.8}$$

$$(5,4,3;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z); \quad D_5^{(k)} = h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)}; \quad p = n/2$$

В том случае, когда на поверхности $z=H$ заданы смешанные условия (1.4), то $\sigma_{zz0}^{(1,s)}$ определяется по формуле (2.5), а $\sigma_{xz0}^{(1,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(1,s)}$ - по формулам (2.6)-(2.8).

При смешанных условиях (1.5) неизвестная $\sigma_{zz0}^{(1,s)}$ определяется по формулам (2.6)-(2.8), а $\sigma_{xz0}^{(1,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(1,s)}$ - по формулам (2.5).

Полученные асимптотические решения сформулированных краевых задач (1.1) -(1.5) позволяют с любой заранее заданной асимптотической точностью определить напряженно-деформированное состояние слоистой пластины во всех ее внутренних точках, кроме небольшой области вблизи поперечных кромок, ширина которой равна глубине затухания решений типа пограничного слоя [2,3]. Для вычисления напряженно-деформированного состояния пластины, справедливого всюду, необходимо к полученным решениям добавить согласованное с ним решение типа пограничного слоя [2,3].

Точность расчетов напряженно-деформированного состояния слоистой пластины по полученным итерационным формулам зависит как от количества шагов, так и от физико-механических свойств материалов слоев и изменяемостей функций σ_{jz}^{+}, $u_j^{\pm}$, $j = x, y, z$, заданных на лицевых поверхностях, что существенно затрудняет ее оценку в приведеной выше общей постановке краевых задач. В каждом же конкретном случае оценка остаточного члена асимптотического разложения (1.3) не представляет трудности. Причем, если граничные функции σ_{jz}^{+}, $u_j^{\pm}$, $j = x, y, z$ являются полиномами степени p, то итерационный процесс обрывается на $p+1$ шаге и получается математически точное решение для слоя.

Заметим, что алгоритм решений приведенных краевых задач не обусловлен конкретно примененной линейной моделью ползучести [1]. Поэтому, полученные рекурентные расчетные формулы остаются в силе и для других линейных моделей вязкоупругости [7,8], если в полученных формулах заменить ядра ползучести и соответствующие резольвенты согласно выбранной модели.

3. Пусть пластина из композиционного материала состоит из анизотропной основы нечетных слоев, соединенных с помощью изотропного вязкоупругого вяжущего, имеющего физико-механические коэффициенты [1]

$$\begin{aligned} &\delta_i(t,\tau) = E_i^{-1}(\tau) + \varphi_i(\tau)\left(1 - \exp\left[-\gamma_i(t-\tau)\right]\right) \\ &\delta_{1i}(t,\tau) = \nu_i \delta_i(t,\tau), \qquad \nu_i = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Одна упругая лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а на противоположную -действуют постоянные нагрузки

$$u_j(z=0) = 0, \quad \sigma_{jz}(z=H) = \sigma_{jz}^{+} = \mathrm{const}, \quad j = x, y, z \tag{3.2}$$

Итерация обрывается на первом шаге приближения и приводит к точному решению краевой задачи

$$\begin{aligned} &\sigma_{jz}^{(i)} = \sigma_{jz}^{+}, \quad j = x, y, z; \quad \sigma_{xy}^{(i)} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\sigma_{xx}^{(i)} = A_{13}^{(i)}\sigma_{zz}^{+} + A_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{+} + A_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{+} \qquad (xx, yy; 1,2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$
\begin{gathered}
u_x^{(i)} = \sum_{k=(i+1)/2}^{(n-1)/2} \Big[h_{2k} \mu_x^{(2k)} \delta_{2k}\left(t, \tau_1\right) \sigma_{xz}^{+} + \\
+ h_{2k+1}\left(A_{53}^{(2k+1)} \sigma_{zz}^{+} + A_{54}^{(2k+1)} \sigma_{yz}^{+} + A_{55}^{(2k+1)} \sigma_{xz}^{+} \right) \Big] + \\
+ \left(z - \sum_{k=i+1}^{n} h_k \right) \left(A_{53}^{(i)} \sigma_{zz}^{+} + A_{54}^{(i)} \sigma_{yz}^{+} + A_{55}^{(i)} \sigma_{xz}^{+} \right) \\
\left(u_x, u_y, u_z;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z;\ xz, yz, zz;\ 5,4,3 \right) \quad i = 1,3,5,\ldots
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

$$
\mu_x^{(i)} = \mu_y^{(i)} = 2\left(1 + \nu_i\right), \quad \mu_z^{(i)} = \left(1 + \nu_i\right)\left(1 - 2\nu_i\right) / \left(1 - \nu_i\right)
$$

для слоев с нечетными номерами и

$$
\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \sigma_{zz}^{+} \qquad (x, y)
$$

$$
\begin{gathered}
u_x^{(i)} = \sum_{k=(i+2)/2}^{n/2} h_{2k} \mu_x^{(2k)} \delta_{2k}(t, \tau) \sigma_{xz}^{+} + \left(z - \sum_{k=i+1}^{n} h_k \right) \mu_x^{(i)} \sigma_{xz}^{+} + \\
+ \sum_{k=i/2}^{(n-1)/2} h_{2k} \left(A_{53}^{(2k+1)} \sigma_{zz}^{+} + A_{54}^{(2k+1)} \sigma_{yz}^{+} + A_{55}^{(2k+1)} \sigma_{xz}^{+} \right) \\
\left(u_x, u_y, u_z;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z;\ xz, yz, zz;\ 5,4,3 \right) \quad i = 2,4,\ldots
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

для слоев с четными номерами.

Формулы (3.3)-(3.5) показывают, что напряжения, возникающие от постоянной внешней нагрузки, передаются по всем упругим и вязкоупругим слоям без изменения. А перемещения меняются во времени в ползучих слоях и упругих слоях, расположенных выше ползучих. В последнем упругом слое $i = n$ во времени не меняются ни напряжения, ни перемещения. Для переменных по линейным координатам x, y внешних нагрузок, эти выводы имеют точность $O(\varepsilon)$.

Таблица

шаг (порядок)		$I(\varepsilon^0)$	$II(\varepsilon^1)$	$III(\varepsilon^2)$	$IV(\varepsilon^3)$
нагрузки $z = h_1 + h_2 + h_3$		постоянные	линейные	квадратич.	кубические
порядок временного фактора НДС в слоях	(1)	$u_x, u_y, u_z \rightarrow$	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \rightarrow$	$\sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rightarrow$	σ_{zz}
	(2)	$u_x, u_y, u_z \rightarrow$	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \rightarrow$	$\sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rightarrow$	σ_{zz}
	(3)	-----	-------	$\sigma_{xz}, u_x, (x, y)$	$\sigma_{zz} \rightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{xy}$; σ_{yy}, u_z
$z = 0$		u_x^-	u_y^-	u_z^-	

На предлагаемой таблице показана схема распространения временного фактора (зависимости от времени) по напряжениям и перемещениям трехслойной ортотропной пластины $(n=3)$ с ползучим средним слоем при постоянной, линейной, квадратичной и кубической внешних нагрузках, исходя из математически точных решений краевых задач. (Если же нагрузки не полиномиальные, то выводы имеют соответствующие асимптотические порядки ε^0, ε^1, ε^2, ε^3). Таким образом, при постоянной и линейной нагрузках, в третьем слое напряженно-деформированное состояние не зависит от времени, а во втором и первом слоях временной фактор не действует на напряжения σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz}. При квадратичной нагрузке временной фактор действует на σ_{xz}, σ_{yz} всех слоев и u_x, u_y третьего слоя. Только тогда, когда внешние нагрузки - полиномы третьей (и выше) степени, все компоненты напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины меняются во времени.

Автор выражает свою признательность Л. А. Агаловяну.

Литература

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести.-М.: ГИТТЛ, 1952. 323 с.
2. *Агаловян Л. А.* Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач.-Механика. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1984. №3. с. 51-58.
3. *Геворкян Р. С.* Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин.- Изв. АН Арм ССР. Механика. 1984, т. 37, №6, с. 3-15.
4. *Агаловян Л. А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.- Механика. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1982, №2, с. 7-12.
5. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. - ПММ, 1986, т.50, №2, с. 271-278.
6. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев.- Изв.РАН, МТТ, 1992, №5, с. 120-128.
7. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести.-М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
8. *Миненков Б. В., Стасенко И.В.* Прочность деталей из пластмасс. - М.: Машиностроение, 1977. 264 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1. 06. 1994