ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

О ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВЫХ ДИСКОВ

Гаспарян А. Е., Хачатрян А. А.

Հ.Ե. Գասպարյան, Ա.Ա. Խաչատրյան

Կլոր դիսկերի հարթ փափանումների մասին

Աշխատանքում առանձին դիտարկված են հաստատուն դիսկի առանցքասիմետրիկ ռադիալ և տանգենցիալ տատանումների խնդիրները: Տեղափոխությունների համար ստացված են վերջնական բանաձևեր:

H.E.Gasparian, A.A. Khachatrian

On the plane vibration of circular diskes

В работе отдельно рассмотрены осесимметричные радиальные и тангенциальные колебания дисков с постоянными толщинами. Решены конкретные задачи. Получены окончательные выражения для соответствующих перемещений.

В настоящей работе рассматриваются задачи о плоских колебаниях круговых дисков, когда частицы диска совершают движения, оставаясь в своей плоскости. При этом, как обычно принято [1], отдельно рассмотрены осесимметричные радиальные колебания, когда любая частица движется только вдоль соответствующего радиуса, и тангенциальные колебания, когда движения частиц происходят по соответствующим окружностям.

1. Рассмотрим диск постоянной толщины в виде кругового кольца с внутренним и наружным радиусами r_1 и r_2, соответственно. Пусть внутренний контур диска закреплен, а на наружном контуре действует давление интенсивности q, которое в момент времени $t=0$ внезапно снимается. Тогда возникнут свободные осесимметричные радиальные колебания.

В этом случае уравнение движения есть

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\varphi\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

а напряжения σ_r и σ_φ определяются через радиальное перемещение $u(r,t)$ следующим образом:

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}\right),\quad \sigma_\varphi=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r}+\nu\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{1.2}$$

где E, ν, ρ - модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала диска, соответственно.

В силу (1.1) и (1.2) уравнения движения относительно $u(r,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2=\frac{E}{(1-\nu^2)\rho} \tag{1.3}$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия будут:

$$1)\ \text{при}\ r=r_1 \quad u=0 \qquad 2)\ \text{при}\ r=r_2 \quad \frac{\partial u}{\partial r}+\nu\frac{u}{r}=0 \tag{1.4}$$

$$3)\ \text{при}\ t=0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0$$

$$4)\ \text{при}\ t=0 \quad u=-\frac{qr_2^2(1-\nu^2)}{E\left[(1+\nu)r_2^2+(1-\nu)r_1^2\right]}\left(r-\frac{r_1^2}{r}\right)$$

Отметим, что последнее условие в (1.4) получено решением статической задачи до снятия давления q.

После разделения переменных $(u(r,t)=R(r)T(t))$ из (1.3) получим

$$\frac{1}{R}\left(R''+\frac{1}{r}R'-\frac{1}{r^2}R\right)=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\omega^2 \tag{1.5}$$

или

$$\begin{cases} R''+\dfrac{1}{r}R'+\left(\omega^2-\dfrac{1}{r^2}\right)R=0 \\ T''+a^2\omega^2T=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Общие решения уравнений (1.6) имеют вид

$$R(r)=A_1J_1(\omega r)+A_2Y_1(\omega r)$$

$$T(t)=B_1\cos a\omega t+B_2\sin a\omega t \tag{1.7}$$

Удовлетворив первым двум условиям (1.4), получим следующее трансцендентное уравнение относительно ωr_2, имеющее неограниченное количество корней

$$\frac{J_1(k\xi_n)}{Y_1(k\xi_n)}=\frac{\xi_nJ_0(\xi_n)-(1-\nu)J_1(\xi_n)}{\xi_nY_0(\xi_n)-(1-\nu)Y_1(\xi_n)}, \quad \xi_n=\omega_n r_2, \quad k=\frac{r_1}{r_2} \tag{1.8}$$

а в силу условия 3) $B_2=0$. Поэтому, решение задачи принимает вид

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[Y_1(k\xi_n)J_1(\omega_n r)-J_1(k\xi_n)Y_1(\omega_n r)\right]\cos\omega_n at \tag{1.9}$$

Для определения величин C_n следует учесть, что функции в квадратных скобках (1.9) ортогональны в интервале $r_1 \le r \le r_2$ с весом r. Тогда, удовлетворив четвертому условию (1.4) и определив C_n, после некоторых преобразований решение рассматриваемой задачи окончательно представим в виде

$$u(x,t) = \frac{\pi r_2 q\left(1-\nu^2\right)}{E} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(k\xi_n)\left[\xi_n J_0(\xi_n) - (1-\nu) J_1(\xi_n)\right]}{\left[\xi_n J_0(\xi_n) - (1-\nu) J_1(\xi_n)\right]^2 - \left(\xi_n^2 - 1 + \nu^2\right) J_1^2(k\xi_n)} \times \right. \tag{1.10}$$

$$\left. \times \left[Y_1(k\xi_n) J_1(\xi_n x) - J_1(k\xi_n) Y_1(\xi_n x)\right] \right] \cos\frac{\xi_n a}{r_2} t$$

$$\left(x = r / r_2\right)$$

В случае сплошного диска $\left(r_1 = 0\right)$ решение задачи существенно упрощается. Пропуская подробности, приведем окончательные результаты этого случая.

$$u(x,t) = -\frac{2q\left(1-\nu^2\right) r_2}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_n x)}{\left(\xi_n^2 - 1 + \nu^2\right) J_1(\xi_n)} \cos\frac{\xi_n a}{r_2} t \tag{1.11}$$

где ξ_n представляют собой корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\xi_n J_0(\xi_n) - (1-\nu) J_1(\xi_n) = 0 \tag{1.12}$$

В таблице приведены несколько первых корней ξ_n уравнения (1.12) при трех значениях коэффициента Пуассона.

Из таблицы видно, что по мере возрастания n влияние изменения коэффициента Пуассона на корни ξ_n становится все меньше и меньше.

Таблица

n \ ν	0,2	0,3	0,4
1	1,9844	2,0488	2,1092
2	5,3702	5,3894	5,4085
3	8,5600	8,5719	8,5837
4	11,7232	11,7318	11,7404
5	14,8771	14,8838	14,8904

2. Рассмотрим теперь тангенциальные колебания диска.

Пусть внутренний контур диска $\left(r = r_1\right)$ закреплен, а на внешнем контуре

$(r=r_2)$ действуют касательные напряжения (τ_0), которые в момент времени $t=0$ внезапно снимаются. Тогда возникают свободные тангенциальные колебания.

В этом случае уравнение движения относительно полярного угла $\varphi(r,t)$ имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

где G - модуль сдвига материала диска.

Учитывая, что здесь реальные перемещения точек $u(r,t)$ отсутствуют, а перемещения в тангенциальном направлении $\mathrm{v}(r,t)$ происходят по окружностям, имеем $\mathrm{v}(r,t)=r\varphi(r,t)$.

Поэтому уравнение движения относительно $\mathrm{v}(r,t)$ будет

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\mathrm{v}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2},\quad a_1^2=G/\rho \tag{2.2}$$

а для касательного напряжения будем иметь

$$\tau=Gr\frac{\partial\varphi}{\partial r}=G\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}-\frac{\mathrm{v}}{r}\right) \tag{2.3}$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия будут

$$\text{1) при } r=r_1 \quad \mathrm{v}=0 \qquad \text{3) при } t=0 \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{t}=0 \tag{2.4}$$

$$\text{2) при } r=r_2 \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}-\frac{\mathrm{v}}{r}=0 \qquad \text{4) при } t=0 \quad \mathrm{v}=\frac{\tau_0 r_2^2}{2Gr_1^2}\left(r-\frac{r_1^2}{r}\right)$$

Как видно, эта задача в принципе не отличается от задачи, рассмотренной в предыдущем пункте. Поэтому, не останавливаясь на ходе решения, приведем окончательные результаты решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, пользуясь принятыми выше обозначениями, для тангенциального перемещения будем иметь

$$\mathrm{v}(x,t)=\frac{\pi r_2\tau_0}{G}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(k\eta_n)\left[\eta_n J_0(\eta_n)-2J_1(\eta_n)\right]}{\eta_n^2 J_1^2(k\eta_n)-\left[\eta_n J_0(\eta_n)-2J_1(\eta_n)\right]^2}\times$$
$$\times\left[Y_1(k\eta_n)J_1(\eta_n x)-J_1(k\eta_n)Y_1(\eta_n x)\right]\cos\frac{\eta_n a_1}{r_2}t \tag{2.5}$$

где $\eta_n=\Omega_n r_2$ представляют собой корни следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{J_1(k\eta_n)}{Y_1(k\eta_n)}=\frac{\eta_n J_0(\eta_n)-2J_1(\eta_n)}{\eta_n Y_0(\eta_n)-2Y_1(\eta_n)} \tag{2.6}$$

Рассматривая решения приведенных здесь задач, заключаем, что при колебаниях частицы диска, как и в случае продольных колебаний стержней с переменными поперечными сечениями [2, 3], совершают непериодические движения и поэтому говорить здесь о периоде колебаний не приходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний.- М.: Машгиз, 1957. 335 с.
2. *Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.* О продольных колебаниях стержней с переменными сечениями.- Изв. НАН Армении, Механика, 1993, т. 46, №3-4, с. 36-41
3. *Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.* Некоторые задачи о продольных колебаниях стержней переменного поперечного сечения.- Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т. 47, №5-6, с. 14-23

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
8. 04. 1994