

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ
ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ
ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С
УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА**

Акопян А.С., Киракосян Р.М.

Ա.Ս. Նակոբյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակային սալի կայունության առանցքային խնդիրը ընդլայնական սահմի հաշվառմամբ:

Նախօրոք լուծվում է գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ օղակային սալի հարթ խնդիրը, երբ սալը գտնվում է արտաքին եզրում կիրառված շառավղորեն ձգող ուժերի ազդեցության տակ: Այնուհետև, օգտագործելով ճիգերի բաշխման համար գրած օրինաչափությունները, ճշգրտված [1] փնտրության շրջանակներում լուծվում է սալի կայունության առանցքային խնդիրը: Վերջնական արդյունքները բերվում են անչափ մեծությունների ալյուսակների փնտրված, որոնց վերլուծությամբ արվում են ընդլայնական սահմի ազդեցության վերաբերյալ որակական եզրակացություններ:

A. S. Hakobian, R. M. Kirakosian

Axissymmetric Problem of Stability of Orthotropic Ring Plates with Linear Variable Thickness with Colculation Transversal Displacement

Вопросам расчета на прочность и устойчивость переменной жесткости посвящено сравнительно мало публикаций. Среди них следует особо отметить работы [2-5]. В настоящей статье предварительно решается плоская задача ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины при действии радиально растягивающих единичных сил, приложенных по внешнему контуру пластинки. Затем, используя найденные закономерности распределения эталонных усилий, решается осесимметричная задача устойчивости пластинки в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Окончательные результаты решения приводятся в виде таблиц, охватывающих некоторые характерные значения физико-механических и геометрических параметров пластинки. Проводится анализ результатов и делаются качественные заключения.

1. Рассмотрим цилиндрически ортотропную кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами a и b , толщина которой меняется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad h_1 > -\frac{h_0}{b} \quad (1.1)$$

здесь h_0 и h_1 - заданные параметры, r - радиальная координата.

Пусть пластинка радиально растягивается силами равномерной интенсивности p , приложенными по внешнему контуру $r = b$. Попытаемся определить внутренние усилия пластинки. Примем обозначения:

$$r = \rho b, \quad a = \rho_0 b, \quad h = h_0 H, \quad \frac{h_0 b}{h_0} = \chi, \quad p = \sigma_0 h_0 \bar{p} \quad (1.2)$$

$$m^2 = \frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{E_\theta}{E_r}, \quad n = \frac{a_{12}}{a_{22}} = -\nu_{r\theta}, \quad T_r = \sigma_0 h_0 \bar{T}_r, \quad T_\theta = \sigma_0 h_0 \bar{T}_\theta$$

здесь ρ - безразмерная координата ($\rho_0 \leq \rho \leq 1$), a_{ij} - упругие постоянные; E_θ, E_r и $\nu_{r\theta}$ - модули Юнга и коэффициент Пуассона, σ_0 - характерное напряжение материала; T_r и T_θ - радиальное и кольцевое усилия пластинки, а безразмерная толщина определяется формулой

$$H = 1 + \chi \rho, \quad \chi > -1 \quad (1.3)$$

В силу осесимметричности сдвиговое усилие равно нулю, а из уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки следует

$$\bar{T}_\theta = \frac{d}{d\rho}(\rho \bar{T}_r) \quad (1.4)$$

Имея в виду это соотношение и обобщенный закон Гука цилиндрически ортотропного тела [6], уравнение неразрывности пластинки можно представить в виде

$$H\rho^2 \frac{d^2 \bar{T}_r}{d\rho^2} + (3 + 2\chi\rho)\rho \frac{d\bar{T}_r}{d\rho} + [1 - (n + m^2)\rho\chi] \bar{T}_r = 0 \quad (1.5)$$

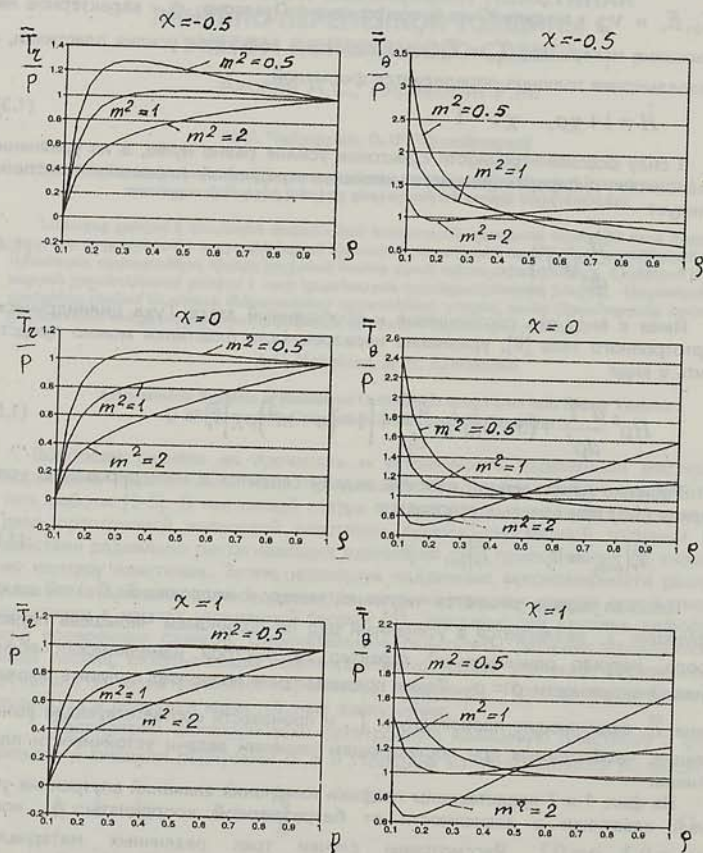
Решение поставленной плоской задачи сводится к интегрированию уравнения (1.5) при краевых условиях:

$$\bar{T}_r|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \bar{T}_r|_{\rho=1} = \bar{p} \quad (1.6)$$

Плоская задача решается численно, методом коллокаций. С этой целью функция \bar{T}_r разлагается в усеченный ряд по полиномам Чебышева первого рода, хорошо описывающий характер ее быстрой изменяемости вблизи малой окружности $\rho = \rho_0$. Такое представление позволяет получить выражение \bar{T}_θ , включающее производную \bar{T}_r , и произвести соответствующие вычисления, необходимые при последующем решении задачи устойчивости пластинки.

На фиг. 1 и 2 представлены графики изменения значений внутренних усилий пластинки в зависимости от безразмерной координаты ρ , когда $\nu_{r\theta} = 0,3$; $\rho = 0,1$. Рассмотрены случаи трех различных материалов: $m^2 = E_\theta / E_r = 0,5$; 1 и 2 и трех значений параметра изменяемости толщины пластинки $\chi = -0,5$; 0 и 1. Из этих графиков заключаем, что при $\bar{p} > 0$ внутренние усилия пластинки всюду положительны. С удалением от внутреннего контура пластинки радиальное усилие \bar{T}_r при $E_\theta \geq E_r$ и $\chi \geq 0$ моно-

тонно растет от нуля и на внешнем контуре $\rho = 1$ превращается в единицу. В случае же $E_0 < E_r$ усилие \bar{T}_r имеет максимум, после чего, монотонно убывая, стремится к единице. Наличие этого максимума связано с тем, что внутренние усилия в центре сплошной пластинки при $E_0 < E_r$ имеют особенность. Усилие \bar{T}_r имеет максимум также при $E_0 = E_r$, $\chi < 0$, что объясняется уменьшением толщины пластинки с удалением от ее внутреннего контура.



фиг. 1

фиг. 2

Что касается поведения кольцевого усилия \bar{T}_θ , то из графиков фиг.2 легко заметить, что независимо от характера изменения толщины пластинки оно

при $E_0 < E_r$ является монотонно убывающей функцией от ρ , а при $E_0 > E_r$ имеет минимум. В случае же $E_0 = E_r$ усилие \bar{T}_0 монотонно убывает при $\chi \leq 0$, а при $\chi > 0$ имеет минимум.

2. Пусть при некотором значении сжимающих сил p плоская форма равновесия пластинки становится неустойчивой и реализуется равновесие искривленной формы. Ограничимся рассмотрением осесимметричного случая потери устойчивости, которому при шарнирном опирании всегда, а при защемлении — до определенного значения отношения радиусов внутреннего и внешнего контуров пластинки a/b соответствуют наименьшие критические силы [7].

Интенсивность фиктивной поверхностной нагрузки q определится формулой [6]

$$q = T_r \frac{d^2 w}{dr^2} + T_0 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (2.1)$$

где W — прогиб пластинки. Положим:

$$w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} = z, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = d, \quad a_r \sigma_0 = l \quad (2.2)$$

$$\frac{h_0}{b} = s, \quad \varphi_1 = \sigma_0 t, \quad sz - lt = y, \quad M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r,$$

$$M_0 = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_0, \quad N_r = \sigma_0 h_0 \bar{N}_r,$$

здесь a_r, B_r — параметры материала [6], φ_1 — функция, характеризующая распределение касательных напряжений при изгибе [1].

Безразмерные значения поперечной силы \bar{N}_r и изгибающих моментов \bar{M}_r, \bar{M}_0 в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияния деформаций поперечных сдвигов, имеют выражения

$$\bar{N}_r = \frac{H}{12} \left[8t - d\chi H s^2 \left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r0} \frac{y}{\rho} \right) \right]$$

$$\bar{M}_r = -\frac{dsH^3}{12} \left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r0} \frac{y}{\rho} \right)$$

$$\bar{M}_0 = -\frac{dsm^2 H^3}{12} \left(v_{r0} \frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho} \right) \quad (2.3)$$

В силу осесимметричности, пятое уравнение равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки отпадает, а третье и четвертое принимают вид

$$\frac{d\bar{N}_r}{d\rho} + \frac{\bar{N}_r}{\rho} + s \left(\bar{T}_r \frac{dz}{d\rho} + \bar{T}_0 \frac{z}{\rho} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\bar{M}_r}{d\rho} + \frac{\bar{M}_r - \bar{M}_0}{\rho} - \frac{\bar{N}_r}{s} = 0 \quad (2.5)$$

С учетом (2.3) из уравнения (2.5) для функции t находим выражение

$$t = -\frac{dHs^2}{8} \left[H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(2\chi + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left(2v_{r0}\chi - \frac{H}{\rho} \right) y \right] \quad (2.6)$$

В силу этого поперечная сила определится формулой

$$\bar{N}_r = -\frac{ds^2 H^2}{12} \left[H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(3\chi + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left(3v_{r0}\chi - \frac{H}{\rho} \right) y \right] \quad (2.7)$$

Используя (2.2) и (2.7), уравнение (2.4) можно привести к виду

$$A_1 \frac{d^3 y}{d\rho^3} + A_2 \frac{d^2 y}{d\rho^2} + A_3 \frac{dy}{d\rho} + A_4 y = 0 \quad (2.8)$$

где

$$A_1 = H(2H + 3l\bar{T}_r)\rho^3$$

$$A_2 = \{4H(3\chi\rho + H) + 3l[(4\chi\rho + H)\bar{T}_r + H\bar{T}_0]\}\rho^2$$

$$A_3 = \{2(6\chi^2\rho^2 + 6\chi\rho H + 3m^2 v_{r0}\chi H\rho - m^2 H^2) -$$

$$-\frac{3\bar{T}_r}{H} \left[\frac{8\rho^2}{ds^2} + (1+m^2)lH^2 - 2\chi\rho l(\chi\rho + H + v_{r0}m^2 H) \right] +$$

$$+ 3l\bar{T}_0(2\chi\rho + H)\}\rho \quad (2.9)$$

$$A_4 = 2m^2(6v_{r0}\chi^2\rho^2 - 3\chi H\rho + H^2) - \frac{6\bar{T}_r l m^2}{H} [\chi\rho(H + v_{r0}H -$$

$$- v_{r0}\chi\rho) - H^2] - 3\bar{T}_0 \left[\frac{8\rho^2}{ds^2 H} - m^2 l(2v_{r0}\chi\rho - H) \right]$$

Условия свободного внутреннего контура пластинки с учетом (2.3) и (2.7) имеют вид:

$$\left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r0} \frac{y}{\rho} \right)_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (M_r|_{r=a} = 0) \quad (2.10)$$

$$\left[H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left(3\chi + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho} \left(3v_{r0}\chi - \frac{H}{\rho} \right) y \right]_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (N_r|_{r=a} = 0)$$

Так как задача ставится относительно не прогиба, а его производной, то на внешнем контуре достаточно удовлетворить лишь одному условию: при шарнирном опирании -

$$\left(\frac{dy}{d\rho} + m^2 v_{r0} \frac{y}{\rho} \right)_{\rho=1} = 0, \quad (M_r|_{r=b} = 0) \quad (2.11)$$

при защемлении -

$$y|_{\rho=1} = 0, \quad (u_r|_{r=b} = 0) \quad (2.12)$$

Таким образом, задача определения критических значений сжимающих сил сводится к нахождению собственных чисел уравнения (2.8) при двух условиях на внутреннем контуре (2.10) и одном из условий (2.11) и (2.12) на внешнем контуре пластинки.

Численная реализация решения производится методом коллокаций с разложением функции $y(\rho)$ в усеченный тригонометрический ряд. При этом, внутренние усилия невыпущенной пластинки представляются в виде произведений соответствующих распределений, найденных в предыдущем пункте, и неизвестных значений критических сил \bar{P} , взятых с отрицательным знаком.

Подобрав подходящее число точек разбиения промежутка $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ и удовлетворив уравнению устойчивости во всех точках разбиения, а краевым условиям - на контурах пластинки $\rho = \rho_0$ и $\rho = 1$, приходим к системе однородных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиальных решений этой системы и определяются критические значения сжимающих сил.

В табл. 1 иллюстрирована динамика сходимости процесса численного определения первой критической силы шарнирно опертой пластинки в одном частном случае, когда

$$v_{r0} = \rho_0 = 0,3, \quad d = 10^3, \quad \chi = 1, \quad E_0 / E_r = 2, \quad l = s = 0,05$$

Таблица 1

№	12	16	20	24	28	32	36
\bar{P}	4,7544	4,8885	4,9038	4,9056	4,9058	4,9058	4,9058

Из табл. 1 видно, что при числе точек разбиения $N > 24$ первая критическая сила определяется с точностью пяти значащих цифр, что свидетельствует о хорошей сходимости процесса решения не только задачи устойчивости, но и связанной с ней плоской задачи пластинки.

В нижеприведенных таблицах для некоторых характерных значений физико-механических и геометрических параметров пластинки представлены значения первых критических сил \bar{P} и их поправок

$$\Delta = \frac{\bar{P}_{\text{кл}} - \bar{P}}{\bar{P}_{\text{кл}}} \cdot 100\% \quad (2.13)$$

вносимых уточненной теорией по отношению к соответствующим классическим значениям $\bar{P}_{\text{кл}}$. При этом, индексы "1" и "2" относятся к случаям $I = 0,025$ и $I = 0,05$, а индексы "ш" и "з" - к случаям шарнирного опирания (табл.2) и защемления (табл.3), соответственно.

На основе данных этих таблиц заключаем:

1. Учет влияния поперечного сдвига, как и следовало ожидать, приводит к уменьшению критических сил пластинки.

2. Поправка, вносимая уточненной теорией при данных краевых условиях зависит от характера анизотропии материала и от относительной толщины пластинки. При этом она увеличивается с ростом:

а) параметра I , т.е. с уменьшением относительного модуля сдвига материала в поперечной плоскости,

б) отношения модулю Юнга материала кольцевого и радиального направлений E_{θ} / E_r ,

в) параметра χ , характеризующего скорость возрастания толщины пластинки в радиальном направлении.

3. При неизменных остальных условиях поправка сильно зависит от вида опирания пластинки. Она получается значительно большей при защемлении внешнего контура, чем при его шарнирном опирании. Причем, роль этого фактора более существенна при $E_{\theta} < E_r$ и заметно ослабевает с возрастанием отношения E_{θ} / E_r .

4. Увеличение радиуса внутреннего контура шарнирно опертой пластинки ρ_0 приводит к уменьшению значений как критических сил, так и их поправка, чего нельзя сказать для защемленной пластинки.

Инд. контура	Инд. контура				Инд. контура			
	1	2	ш	з	1	2	ш	з
0,025	0,98	0,97	0,96	0,95	0,98	0,97	0,96	0,95
0,05	0,97	0,96	0,95	0,94	0,97	0,96	0,95	0,94

Таблица 2

$$v_{r0} = 0,3; \quad s = 0,05; \quad d = 10^3$$

		$m^2 = E_0 / E_r = 0,5$								
ρ_0		0,05			0,1			0,3		
χ		-0,5	0	1	-0,5	0	1	-0,5	0	1
I	0	0,049	0,202	0,944	0,174	0,401	1,36	0,109	0,312	1,35
	0,025	0,048	0,199	0,917	0,172	0,395	1,32	0,108	0,309	1,32
	0,05	0,048	0,197	0,891	0,171	0,388	1,28	0,108	0,305	1,28
	Δ_{1w}	0,61	1,28	2,83	0,92	1,62	3,37	0,55	1,06	2,58
	Δ_{2w}	1,23	2,53	5,54	1,84	3,17	6,52	1,10	2,12	5,10

$$m^2 = E_0 / E_r = 1$$

I	0	0,116	0,456	2,13	0,307	0,814	2,97	0,220	0,647	2,80
	0,025	0,115	0,444	2,00	0,302	0,790	2,78	0,217	0,633	2,66
	0,05	0,113	0,432	1,89	0,297	0,770	2,62	0,215	0,620	2,53
	Δ_{1w}	1,37	2,70	5,83	1,63	2,95	6,33	1,14	2,10	5,07
	Δ_{2w}	2,84	5,24	11,1	3,22	5,73	11,9	2,18	4,14	9,64

$$m^2 = E_0 / E_r = 2$$

I	0	0,247	1,00	4,83	0,531	1,65	6,62	0,442	1,37	5,95
	0,025	0,240	0,949	4,29	0,517	1,56	5,85	0,432	1,32	5,38
	0,05	0,234	0,902	3,86	0,503	1,48	5,25	0,423	1,26	4,91
	Δ_{1w}	2,79	5,29	11,2	2,78	5,28	11,6	2,17	4,19	9,58
	Δ_{2w}	5,39	10,1	20,2	5,36	10,1	20,7	4,28	8,00	17,52

$$v_{r0} = 0,3; \quad s = 0,05; \quad d = 10^3$$

		$m^2 = 0,5$									
		ρ_0	0,05			0,1			0,3		
		χ	-0,5	0	1	-0,5	0	1	-0,5	0	1
I	0	0,331	1,35	5,99	0,560	1,85	7,87	0,546	2,56	14,9	
	0,025	0,322	1,26	5,10	0,541	1,72	6,61	0,529	2,37	12,1	
	0,05	0,312	1,18	4,40	0,522	1,60	5,68	0,513	2,21	10,21	
	Δ_{13}	2,72	6,53	14,8	3,39	7,23	16,0	3,11	7,31	18,6	
	Δ_{23}	5,74	12,3	26,5	6,79	13,4	27,8	6,04	13,7	31,5	
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	4,45	5,10	5,22	3,68	4,46	4,74	5,65	6,90	7,21	
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	4,67	4,86	4,78	3,69	4,22	4,26	5,49	6,46	6,18	
		$m^2 = 1$									
I	0	0,498	2,02	9,15	0,875	2,86	11,72	0,737	3,12	17,10	
	0,025	0,477	1,84	7,47	0,832	2,60	9,46	0,709	2,86	13,68	
	0,05	0,457	1,69	6,28	0,794	2,37	7,93	0,683	2,64	11,37	
	Δ_{13}	4,22	8,91	18,4	4,91	9,09	19,3	3,799	8,373	20,00	
	Δ_{23}	8,23	16,34	31,37	9,2	17,13	32,34	7,327	15,50	33,51	
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	3,08	3,30	3,16	3,01	3,08	3,05	3,33	3,99	3,94	
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	2,90	3,12	2,83	2,87	2,99	2,72	3,36	3,74	3,48	
		$m^2 = 2$									
I	0	0,779	3,25	15,44	1,388	4,827	20,21	1,14	4,334	21,84	
	0,025	0,729	2,85	11,71	1,293	4,208	15,22	1,08	3,890	16,90	
	0,05	0,686	2,54	9,42	1,209	3,728	12,20	1,03	3,520	13,72	
	Δ_{13}	6,42	12,3	24,2	6,84	12,8	24,7	5,26	11,5	22,6	
	Δ_{23}	11,9	21,9	39,0	12,9	22,8	39,6	9,65	19,9	37,2	
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	2,30	2,32	2,16	2,46	2,42	2,13	2,42	2,44	2,36	
	$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1w}}$	2,20	2,17	1,93	2,41	2,26	1,91	2,25	2,35	2,12	

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины.- Изв. АН Армении, Механика, 1991, т.44, № 3.
2. *Коваленко А.Д.* Круглые пластинки переменной толщины.- М.: Физматгиз, 1959. 294 с.
3. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной жесткости.- Киев: Наукова думка, 1981. 544 с.
4. *Лизарев А.Д.* Напряженное состояние термочувствительной кольцевой пластины переменной толщины.- Мат. методы и физ.- мех. поля. 1991, №33.
5. *Cheng Chang-Yun, Yang Xiao.* Buckling and Post-Buckling of Annular Plates Under Nonaxisymmetric Plane Edge Forces.- Appl. Math. and Mech.- 1991.- 12, №5.
6. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1987. 360 с.
7. *Хачатрян А.А.* Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру.- Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1966, т.19, №6.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
21. 06. 1994