ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СОСТАВНОГО КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО ЩЕЛЬ

Акопян В.Н.

Վ.Ն.Հակոբյան

Ճեղք պարունակող անիզոտրոպ բաղադրյալ սեպի համար մի խառը խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է գլանային անիզոտրոպիայով օժտված երկու տարբեր սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն սեպերի միացման գծի երկայնքով թուլացված է վերջավոր ճեղքով, որի ափերից մեկի վրա տրված են լարումները, իսկ մյուս ափի վրա ազդում է հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմ:
Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները, երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների տեսքով, եւ կառուցված են նրանց փակ լուծումները:

V.N.Hakobian

On a mixed problem for an anisotrope composite wedge involuing a crack

Много работ посвящено исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и кусочно-однородных тел, содержащих концентраторы напряжения различного типа. Отметим из них работы [1-6], которые наиболее тесно связаны с настоящей работой.

Здесь рассматривается антиплоское напряженное состояние анизотропного составного клина, содержащего щель, на одном из берегов которой действует штамп с плоским основанием. Построено замкнутое решение поставленной задачи.

1. Пусть упругий составной клин из двух разнородных клиньев, изготовленных из материалов, обладающих цилиндрической анизотропией, с углами раствора α и β соответственно, по линии соединения на отрезке $[a,b]$ ослаблен щелью и деформируется под воздействием плоского штампа, который действует на нижний берег щели, а также касательных напряжений $\tau_1(r)$, приложенных к верхнему берегу щели. При этом считается, что боковые кромки клиньев свободны от нагрузок, ось цилиндрической анизотропии проходит через вершину клина и имеет место соотношение $\alpha a_1 = \beta a_2 = \gamma$. Здесь $a_i = \sqrt{1 - a_{44}^{(i)} / a_{55}^{(i)}}$ $(i = 1,2)$ комбинации упругих постоянных клиньев.

Необходимо определить контактные напряжения под штампом и по линии соединения клиньев, коэффициенты их интенсивностей в вершинах щели, а также раскрытие щели.

Для определенности в дальнейшем все величины, касающиеся верхнего или нижнего клиньев, будем снабжать индексами 1 и 2, соответственно.

Тогда, поставленная задача математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$\tau_{\vartheta z}^{(1)}(r,d)=\tau_{\vartheta z}^{(2)}(r,-\beta)=0; \quad (0<r<\infty)$$

$$\tau_{\vartheta z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\vartheta z}^{(2)}(r,0); \quad w_1(r,0)=w_2(r,0); \quad (0<r<a,\ b<r<\infty) \tag{1.1}$$

$$\tau_{\vartheta z}^{(1)}(r,0)=\tau_1(r); \quad w_2(r,0)=0; \quad (a<r<b)$$

Заметим, что функции перемещения $w_i(r,\vartheta)$ $(i=1,2)$, каждая в области своего определения, удовлетворяют уравнению [7]

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_i}{\partial r}-\frac{2\lambda_i}{r}\frac{\partial^2 w_i}{\partial r\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_i}{\partial\vartheta^2}=0 \tag{1.2}$$

где $\lambda_i=a_{45}^{(i)}/a_{55}^{(i)}$ - соотношение упругих постоянных соответствующих материалов [7].

Интегрируя уравнения (1.2) при помощи интегрального преобразования Меллина и удовлетворяя условиям (1.1), для определения меры раскрытия щели $w(r)=w_1(r,0)-w_2(r,0)$ $(a<r<b)$ и скачка напряжений, действующих на берегах щели, $\tau(r)=\tau_1(r)-\tau_2(r)$ $(a<r<b)$, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$r\tau(r)-\frac{\nu_2}{\gamma}\int_a^b\frac{(rr_0)^{\pi/2\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma}-r^{\pi/\gamma}}w'(r_0)dr_0=\lambda r\tau_1(r)$$

$$\nu_1 rw'(r)-\frac{1}{\gamma}\int_a^b\frac{r_0^{\pi/\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma}-r^{\pi/\gamma}}\tau(r_0)dr_0=0 \tag{1.3}$$

при условиях

$$\int_a^b\tau(r)dr=T_0; \quad w(a)=w(b)=0 \tag{1.4}$$

Здесь

$$\nu_i=\frac{a_i a_{44}^{(i)}}{d_i}; \quad d_i=\left(a_{45}^{(i)}\right)^2-\left(a_{44}^{(i)}\right)^2; \quad (i=1,2)$$

$$T_0=\int_a^b\tau_1(r)dr-T_2; \quad \lambda=1+\nu_2/\nu_1$$

а T_2 - действующее на штамп усилие.

При этом контактные напряжения вне щели определятся формулой

$$\tau_{\vartheta z}^{(j)}(r)=\frac{\nu_1\nu_2}{\gamma r(\nu_1+\nu_2)}\int_a^b\frac{(rr_0)^{\pi/2\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma}-r^{\pi/\gamma}}w'(r_0)dr_0 \quad (0<r<a,\ b<r<\infty) \tag{1.5}$$

Чтобы построить решение системы (1.3), перейдем к новым переменным $x=r^{\pi/2\gamma}$, $s=r_0^{\pi/2\gamma}$ и введем в рассмотрение новые функции $\varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ по формулам

$$\varphi_1(x)=x^{2\gamma/\pi}\tau\left(x^{2\gamma/\pi}\right);\quad \varphi_2(x)=\nu_1 x^{2\gamma/\pi}w'\left(x^{2\gamma/\pi}\right). \tag{1.6}$$

Далее, продолжив эти функции на отрицательную полуось соответственно нечетным и четным образом, придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(x)-\frac{\nu}{\pi}\int_L\frac{\varphi_2(s)}{s-x}ds=f(|x|)\operatorname{sgn}x\\&\varphi_2(x)-\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi_1(s)}{s-x}ds=0\end{aligned}\right. ;\quad (x\in L) \tag{1.7}$$

условия же (1.4) примут вид:

$$\int_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi_1(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2\gamma}T_0;\quad \int_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi_2(x)}{x}dx=0 \tag{1.8}$$

где

$$f(x)=\lambda x^{2\gamma/\pi}\tau_1\left(x^{2\gamma/\pi}\right);\quad \nu=\nu_2/\nu_1$$

$$a_1=a^{\pi/2\gamma};\quad b_1=b^{\pi/2\gamma};\quad L=(-b_1,-a_1)U(a_1,b_1)$$

Умножая второе из уравнений (1.6) на $\pm\sqrt{\nu}$ и суммируя с первым, для определения функций $\psi_\pm(x)=\varphi_1(x)\pm\sqrt{\nu}\varphi_2(x)$ получим отдельные интегральные уравнения:

$$\psi_\pm(x)\mp\frac{\sqrt{\nu}}{\pi}\int_L\frac{\psi_\pm(s)}{s-x}ds=f(|x|)\operatorname{sgn}x \quad (x\in L) \tag{1.9}$$

Очевидно, что после определения функций $\psi_\pm(x)$ из (1.9), легко найти функции $\varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ по формулам:

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}\left[\psi_+(x)+\psi_-(x)\right];\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{\nu}}\left[\psi_+(x)-\psi_-(x)\right] \tag{1.10}$$

2. Приступим к решению уравнений (1.9) в случае, когда щель конечная и не выходит на вершину клиньев, т.е. когда $0<a<b<\infty$.

Общее решение уравнений (1.9) имеют вид [6]

$$\psi_\pm(x)=\frac{f(|x|)\operatorname{sgn}x}{1+\nu}\pm\frac{\sqrt{\nu}X(\mp x)}{1+\nu}\left[\frac{1}{\pi}\int_L\frac{f(|x|)\operatorname{sgn}s}{X(\mp s)(s-x)}ds+p^\pm(x)\right]\quad (x\in L) \tag{2.1}$$

Здесь

$$X(x)=-\sqrt{g}\operatorname{sgn}x\begin{cases}(b_1+x)^{-\gamma_1}(a_1+x)^{\gamma_1-1}(x-a_1)^{-\gamma_1}(b_1-x)^{\gamma_1-1} & (a_1<x<b_1)\\ (b_1+x)^{-\gamma_1}(-a_1-x)^{\gamma_1-1}(a_1-x)^{-\gamma_1}(b_1-x)^{\gamma_1-1} & (-b_1<x<-a_1)\end{cases}$$

$p^\pm(x)=C_1^\pm x+C_0^\pm$ - многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами c_j $(j=0,1)$ и

$$0<\gamma_1=\frac{1}{2\pi}\arg^g<1\quad \left(g=\left(1-i\sqrt{\nu}\right)/\left(1+i\sqrt{\nu}\right)\right)$$

При этом, под $\arg^g$ нужно понимать то значение аргумента числа g, которое находится в интеграле $(0,2\pi)$.

Подставляя значения функций $\psi_\pm(x)$ из (2.1) в (1.10) и учитывая при этом нечетность $\varphi_1(x)$ и четность $\varphi_2(x)$, получим

$$\varphi_1(x)=\frac{f(|x|)\operatorname{sgn}x}{1+\nu}-\frac{\sqrt{\nu}}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{\pi}\int_L\left[\frac{X(x)}{X(s)}-\frac{X(-x)}{X(-s)}\right]\frac{f(|s|)\operatorname{sgn}s}{s-x}ds+\right.$$
$$\left.+c_0[X(x)-X(-x)]+c_1x[X(x)+X(-x)]\right\} \tag{2.2}$$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2(1+\nu)}\left\{\frac{1}{\pi}\int_L\left[\frac{X(x)}{X(s)}+\frac{X(-x)}{X(-s)}\right]\frac{f(|s|)\operatorname{sgn}s}{s-x}ds+\right.$$
$$\left.+c_0[X(x)+X(-x)]+c_1x[X(x)-X(-x)]\right\} \tag{2.3}$$

где $c_1=c_1^-=-c_1^+$; $c_0=c_0^+=c_0^-$.

Удовлетворяя условиям (1.8), найдем

$$c_0=-\frac{1}{\pi}\int_L\frac{f(|s|)ds}{|s|X(s)}-\frac{1+i\sqrt{\nu}}{\gamma}a_1b_1T_0;\quad c_1=-\frac{I_1+c_0I_2}{I_3}$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{x}\int_L\left[\frac{X(x)}{X(s)}+\frac{X(-x)}{X(-s)}\right]\frac{f(|s|)\operatorname{sgn}s}{s-x}ds$$

$$I_j=\int_{a_1}^{b_1}\left[X(x)+(-1)^jX(-x)\right]\frac{dx}{x^{j-1}},$$

После определения $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$, при помощи интегрирования и формулы (1.5) легко найти раскрытие щели, контактные напряжения вне щели, а также коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концевых точках щели.

Вычислим вышеуказанные величины в одном частном случае, когда $f(x)=T_1x$, т.е. в случае $\tau_1(x)=\dfrac{T_1}{\lambda}x^{1-2\gamma/\pi}$. Подставляя значение функции $f(x)$ в (2.2) и (2.3), вычисляя полученные интегралы и переходя к исходным переменным, для $\tau_2(r)$ и $w'(r)$ получим следующие выражения:

$$\tau_2(r)=\frac{1}{r}\left[\frac{T_1}{\lambda}r^{\pi/2\gamma}-\left(A_3r^{3\pi/2\gamma}+A_1r^{\pi/2\gamma}\right)Q^{+}\left(r^{\pi/2\gamma}\right)-\left(A_2r^{\pi/\gamma}+A_0\right)Q^{-}\left(r^{\pi/2\gamma}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$w'(r)=\frac{1}{\nu_1 r}\left[\left(B_3r^{3\pi/2\gamma}+B_1r^{\pi/2\gamma}\right)Q^{-}\left(r^{\pi/2\gamma}\right)+\left(B_2r^{\pi/\gamma}+B_0\right)Q^{+}\left(r^{\pi/2\gamma}\right)\right] \tag{2.5}$$

$$(a<r<b)$$

Здесь введены обозначения

$$Q^{\pm}(x)=X(x)\pm X(-x)$$

$$A_j=\frac{T_1\left(1+i\sqrt{\nu}\right)}{2(1+\nu)}l_j-\frac{\sqrt{\nu}}{2(1+\nu)}c_j;\quad B_j=-\frac{A_j}{\sqrt{\nu}};\quad (j=0,1,2,3)$$

$$l_0=-\frac{1}{3}\gamma_1(1-\gamma_1)(2\gamma_1-1)(b_1-a_1)\left(2a_1^2+2b_1^2-a_1b_1\right)$$

$$l_1=-2\gamma_1(1-\gamma_1)\left(a_1^2+b_1^2\right)-a_1b_1(2\gamma_1-1)^2$$

$$l_2=(b_1-a_1)(2\gamma_1-1);\quad l_3=1;\quad c_j=0\ (j=2,3)$$

Далее, используя формулы (1.5) и (2.5), для контактных напряжений вне щели и раскрытия щели получим:

$$\tau_{\vartheta z}(r)=\frac{2i\nu g}{(1+\nu)(g-1)r}\Big\{\left(A_3r^{3\pi/2\gamma}+A_1r^{\pi/2\gamma}\right)\left[X_1\left(r^{\pi/2\gamma}\right)+X_2\left(r^{\pi/2\gamma}\right)\right]+$$
$$+\left(A_2r^{\pi/\gamma}+A_0\right)\left[X_1\left(r^{\pi/2\gamma}\right)-X_2\left(r^{\pi/2\gamma}\right)\right]-2A_3r^{\pi/2\gamma}\Big\}$$

$$(0<r<a;\ b<r<\infty) \tag{2.6}$$

$$w(r)=\frac{1}{\nu_1}\int_a^r\left[\left(B_3 r^{3\pi/2\gamma}+B_1 r^{\pi/2\gamma}\right)Q^-\left(r^{\pi/2\gamma}\right)+\left(B_2 r^{\pi/\gamma}+B_0\right)Q^+\left(r^{\pi/2\gamma}\right)\right]\frac{dr}{r}$$

$$(a<r<b) \qquad (2.7)$$

При этом

$$X_j(x)=\left(x+b_1\right)^{-\gamma_j}\left(x+a_1\right)^{\gamma_j-1}\left(x-a_1\right)^{-\gamma_j}\left(x-b_1\right)^{\gamma_j-1}$$

$$\left(j=1,2,\ \gamma_2=1-\gamma_1;\quad 0<x<a_1;\quad b_1<x<\infty\right)$$

Теперь вычислим коэффициенты интенсивности $\tau_{\vartheta z}(r)$ в концевых точках щели a и b. С этой целью предположим, что $\gamma_1>\gamma_2$. Тогда будем иметь

$$K_{III}(a)=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to a}\left(a^{\pi/2\gamma}-r^{\pi/2\gamma}\right)^{\gamma_1}\tau_{\vartheta z}(r)$$

$$K_{III}(b)=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to b}\left(r^{\pi/2\gamma}-b^{\pi/2\gamma}\right)^{\gamma_1}\tau_{\vartheta z}(r)$$

Вычисление этих пределов для $K_{III}(a)$ и $K_{III}(b)$ дает следующие значения:

$$K_{III}(a)=-\frac{i\nu\sqrt{\pi}g\left[A_3 a^{3\pi/2\gamma}+A_2 a^{\pi/\gamma}+A_1 a^{\pi/2\gamma}+A_0\right]}{2^{1/2-\gamma_1}(1+\nu)(g-1)a^{\frac{\pi(1-\gamma_2)}{2\gamma}+1}\left(a^{\pi/2\gamma}+b^{\pi/2\gamma}\right)^{\gamma_1}\left(b^{\pi/2\gamma}-a^{\pi/2\gamma}\right)^{1-\gamma_1}}$$

$$K_{III}(b)=\frac{i\nu\sqrt{\pi}g\left[A_3 b^{3\pi/2\gamma}-A_2 b^{\pi/\gamma}+A_1 b^{\pi/2\gamma}-A_0\right]}{2^{1/2-\gamma_1}(1+\nu)(g-1)b^{\frac{\pi(1-\gamma_1)}{2\gamma}+1}\left(a^{\pi/2\gamma}+b^{\pi/2\gamma}\right)^{\gamma_1}\left(b^{\pi/2\gamma}-a^{\pi/2\gamma}\right)^{1-\gamma_1}}$$

Аналогичным путем можно вычислить $K_{III}(a)$ и $K_{III}(b)$ в случае $\gamma_1<\gamma_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман Д.И.* Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов.- ДАН СССР, 1940, т.27, №4, с.330-334.
2. *Черепанов Г.П.* Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.- ПММ, 1962, т.26, вып.5, с.907-912.
3. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983. 488 с.
4. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982. 344 с.
5. *Мхитарян С.М.* Об одном классе смешанных задач теории упругости.

Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and related Problems of Analysis" dedicated to the Centenary of Academician N.Muskhelischvili; Tbilisi, 1991, p.35.

6. *Мусхелишвили Н.М.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
28. 04. 1994