

К РАСЧЕТУ БЕТОННЫХ И ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ БЕТОНА

Симонян А.М., Карапетян К.А.

Ա.Մ. Միմոնյան, Կ.Ա. Կարապետյան

Բետոնի և երկաթբետոնի կառուցվածքների հաշվարկի մասին  
բնութի անհամասեռության հաշվառումով

Ինչպես ցույց են տրված մի շարք աշխատանքներում բետոնի փարթերի փարթեր կեղևերում մեխանիկական հատկությունները ժամանակի ընթացքում միմյանցից փարթերվում են: Ընդ որում կառուցվածքների մակերեսային մոտակայքում ամրությունը և առաձգականության մոդուլը զգալիորեն փոքր են, իսկ ստորը՝ էապես մեծ, քան նրանց խորքում:

Աշխատանքում դիտարկվում են բետոնի և երկաթբետոնի սեղմվող և ծովող կառուցվածքների հաշվարկի և լարումների գնահատման հարցերը հաշվի առնելով հիշարկված անհամասեռության փորձարարական ներազդությունների արդյունքները:

A.M. Simonian, K.A. Karapetian

On Calculation of Concrete and Reinforced Concrete Structures  
Taking Account of Concrete Heterogeneity

Как показано в ряде работ, механические свойства в различных точках бетонного элемента со временем различаются друг от друга, при этом вблизи от поверхности конструкции прочность и модуль упругости становятся меньше, а ползучесть выражена больше, чем в глубине его.

В настоящей работе на основе экспериментальных данных рассматривается вопрос расчета и оценки напряжений и несущей способности бетонных и железобетонных сжатых и изгибаемых конструкций с учетом вышеупомянутой неоднородности.

В ряде работ [1-6] экспериментально показано, что в бетонных массивах механические свойства материала со временем становятся неоднородными, а именно: вблизи поверхности массива у бетона прочность и модуль упругости становятся меньше, а ползучесть выражена больше, чем в глубине его. Естественно, это приводит к отличию действительной картины распределения напряжений от расчетной, осуществляемой в предположении об однородности бетона.

В настоящей работе на основе экспериментальных данных рассматривается вопрос расчета и оценки напряжений и несущей способности бетонных и железобетонных сжатых и изгибаемых элементов с учетом вышеупомянутой неоднородности бетона.

1. Расчет сжатых бетонных элементов

У однородных одноосно-сжатых бетонных элементов с поперечным сечением  $F$ , независимо от деформационных свойств материала, напряжение

$\sigma(t)$  определяется по формуле  $\sigma(t) = \frac{P(t)}{F}$ , где  $P$  - сжимающая сила. Если

же подвергаются сжатию неоднородные элементы, то в большинстве случаев может быть принято условие однородной деформации, то есть независимос-

ти компонент деформации от координат.

Положим, что деформационные свойства бетона определяются линейной теорией наследственности [7], при этом неоднородность связана не с различием возраста бетона в разных точках, как это принимается в работе [8], а с различием протекания процесса твердения и старения в связи с различной влажностью бетона, то есть соотношение между деформацией  $\varepsilon$  и напряжением  $\sigma$  может быть записано так:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(x, y, t)}{E(x, y, t)} + \int_0^t K(t, \tau, x, y) \sigma(x, y, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

где  $x$  и  $y$  - координаты сечения,  $E$  - модуль упругости,  $K$  - ядро ползучести, определяемое соотношением

$$K(t, \tau, x, y) = - \frac{\partial C(t - \tau, \tau, x, y)}{\partial \tau}$$

$C(t, \tau, x, y)$  - мера ползучести, зависящая от времени  $t$ , возраста  $\tau$  и координат  $x$  и  $y$  поперечного сечения.

Уравнение (1.1) может быть рассматриваемо как интегральное типа Вольтерра II рода относительно  $\sigma(x, y, t)$ , решение которого запишется так:

$$\sigma(x, y, t) = E(x, y, t) \varepsilon(t) - \int_0^t E(x, y, \tau) \varepsilon(\tau) H(t, \tau, x, y) d\tau \quad (1.2)$$

где  $H(t, \tau, x, y)$  - резольвентное ядро интегрального ядра

$$E(x, y, t) K(t, \tau, x, y)$$

Интегральное условие равновесия

$$\int_F \sigma(x, y, t) dF = P(t) \quad (1.3)$$

перепишем в виде следующего уравнения:

$$\varepsilon(t) \int_F E(x, y, t) dF - \int_0^t \varepsilon(\tau) \int_F E(x, y, \tau) H(t, \tau, x, y) dF d\tau = P(t) \quad (1.4)$$

которое может быть решено относительно  $\varepsilon(t)$  следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\int_F E(x, y, t) dF} \left[ P(t) + \int_0^t P(\tau) \chi(t, \tau, x, y) d\tau \right] \quad (1.5)$$

где

$$\chi(t, \tau, x, y) = \chi_1(t, \tau, x, y) \frac{\int_F E(x, y, \tau) dF}{\int_F E(x, y, t) dF}$$

а  $\chi_1(t, \tau, x, y)$  - резольвента интегрального ядра

$$\frac{\int_F E(x, y, \tau) H(t, \tau, x, y) dF}{\int_F E(x, y, t) dF}$$

Распределение напряжений  $\sigma(x, y, t)$  определяется по формуле (1.2) после подстановки в него выражения (1.5).

Трудности использования этого решения связаны с необходимостью определения резольвентных ядер  $H(t, \tau, x, y)$  и  $\chi(t, \tau, x, y)$  с помощью рядов Неймана [9], сходимость которых для уравнений (1.1) и (1.4), как для уравнений Вольтерра II рода, всего имеет место. Это обстоятельство препятствует практическому применению настоящего решения. В связи с этим сделаем допущение о подобии неоднородности в отношении упруго-мгновенных и реологических свойств материала, выражающемся в выполнении следующих условий:

$$E(x, y, t) = \frac{E_0(t)}{\eta(x, y)}; \quad C(t - \tau, \tau, x, y) = C_0(t - \tau, \tau) \cdot \eta(x, y) \quad (1.6)$$

где  $\eta(x, y)$  - некоторая функция, определяющая неоднородность механического поведения материала,  $E_0$  и  $C_0$  - модуль упругости и мера ползучести в некоторой точке. Принятие этого допущения связано с отнесением части измеряемой деформации к упругой или реологической, что, как известно, всегда условно. Рассмотрение какой-либо доли деформации ползучести как упругой, естественно, приведет, как правило, к расхождению с экспериментальной деформационной кривой лишь в первое время после приложения нагрузки. С другой стороны, допущение это приводит к существенному упрощению расчета напряжений. В этом случае распределение напряжений определяется по следующей формуле, полученной аналогично (1.1) - (1.5)

$$\sigma(x, y, t) = \frac{P(t)}{\eta(x, y) \int_F \frac{dF}{\eta(x, y)}} \quad (1.7)$$

Таким образом, при допущениях (1.6) напряжения в сжатом элементе могут быть определены вне зависимости от протекающей ползучести или от модуля упругости с использованием лишь вида их изменения по координатам, определяемого функцией  $\eta(x, y)$ .

Определенные трудности здесь связаны с построением функции  $\eta(x, y)$ , так как проведение эксперимента возможно лишь на образцах достаточно больших размеров, в пределах которых неоднородность уже проявляется; таким образом, для построения функции  $\eta(x, y)$  мы можем лишь использовать экспериментальные данные вырезанных из массива образцов, центр тяжести которых соответствует той или иной точке массива.

Рассмотрим расчет напряжения в поперечном сечении колонн на основе

экспериментальных данных о неоднородности легкого бетона на литоидной пемзе [6], загруженного в возрасте 28 дней, в направлении, перпендикулярном слоям бетонирования. Деформационные кривые аппроксимировались следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{нар}}(t) &= \sigma_{\text{нар}} \left\{ 1,523 \left[ 1 - 0,5 \left( e^{-0,005t} + e^{-0,06t} \right) \right] + 1,158 \right\} 10^{-4} \\ \varepsilon_{\text{вн}}(t) &= \sigma_{\text{вн}} \left\{ 0,6558 \left[ 1 - 0,5 \left( e^{-0,005t} + e^{-0,06t} \right) \right] + 0,4986 \right\} 10^{-4}\end{aligned}\quad (1.8)$$

где значения  $\sigma$  берутся в размерности МПа, наружные слои соответствуют образцам с диаметром 5,5 см, выбуренным из наружного слоя цилиндрического массива с радиусом  $r_0$ , причем центры тяжести этих образцов находятся на расстоянии 4,5 см от поверхности, а внутренние слои соответствуют образцам, выбуренным из внутренних слоев, независимо от расстояния от поверхности.

При принятии условия, что деформации в направлении оси колонны не зависят от  $r$ , соотношения (1.8) могут быть переписаны так:

$$\varepsilon(r) = \sigma \eta(r) \left\{ 0,6658 \left[ 1 - 0,5 \left( e^{-0,005r} + e^{-0,06r} \right) \right] + 0,4986 \right\} 10^{-4} \quad (1.9)$$

где  $\eta(r) = 1$  при  $r < r_0 - 9$  см,  $\eta(r) = 2,322$  при  $r = r_0 - 4,5$  см. При принятии наименее благоприятной аппроксимации

$$\eta(r) = \frac{1}{1 - ce^{\chi r}} \quad (1.10)$$

где предполагается, что на поверхности образца ( $r = r_0$ ) материал полностью теряет способность сопротивлению ( $\eta(r_0) \rightarrow \infty$ ), получим

$$c = \left( 1 - \frac{1}{2,322} \right)^{\frac{r_0}{4,5}}, \quad \chi = -\frac{1}{4,5} \ln \left( 1 - \frac{1}{2,322} \right)$$

Результаты, вычисленные по формуле (1.7) в зависимости от радиуса колонны  $r_0$ , представлены в табл. 1, где  $\frac{\sigma_{\text{max}}}{P}$  соответствуют точкам оси колонны, где по расчету напряжения наибольшие,  $\frac{\sigma_{\text{уср}}}{P}$  соответствуют от-

сутствию учета неоднородности, а  $k_{\text{пер}} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{уср}}}$

Как указано в работе [10], у легких бетонов, находящихся в условиях естественных атмосферных воздействий, образуется визуально наблюдаемый слой с глубиной 8-10 см, и именно в пределах этого слоя имеет место падение прочности и увеличение ползучести. Внутри же бетонного массива прочность и деформационные свойства практически не зависели от места пробуривания образцов.

Естественным представляется для  $\eta(r)$  принять следующую ступенчатую

аппроксимацию:

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0 - 9 \text{ см} \\ 2,322, & r > r_0 - 9 \text{ см} \end{cases} \quad (1.11)$$

что находится в согласии с (1.8) и (1.9).

Результаты расчета согласно (1.11), приведенные в табл. 1, несущественно отличаются от данных, полученных согласно (1.10), при этом предпочтение, видимо, должно быть отдано аппроксимации (1.11), приводящей к более простым вычислениям.

Таблица 1

Влияние учета неоднородности бетона  
на расчетные характеристики сжатых колонн

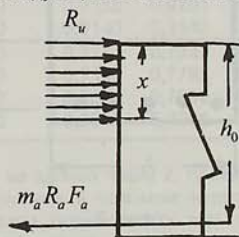
$r_0$ (см)	$\frac{\sigma_{\text{ср}} 10^4}{P}$ $\left(\frac{1}{\text{см}^2}\right)$	Аппроксимация (1.10)		Аппроксимация (1.11)		Расчет по предельным состояниям		
		$\frac{\sigma_{\text{max}} 10^4}{P}$ $\left(\frac{1}{\text{см}^2}\right)$	$k_{\text{пер}}$	$\frac{\sigma_{\text{max}} 10^4}{P}$ $\left(\frac{1}{\text{см}^2}\right)$	$k_{\text{пер}}$	$N_{\text{нес}}$ с учетом неоднородн. (т)	$N_{\text{нес}}$ с без учета неоднородн. (т)	$k_{\text{осл}}$
15	14.147	28.779	2.034	27.114	1.917	47.62	62.55	0.761
20	9.958	14.761	1.855	13.199	1.656	89.16	111.20	0.802
25	5.093	8.743	1.720	7.672	1.506	144.60	173.35	0.834
30	3.537	5.834	1.650	4.984	1.409	213.94	250.20	0.855
40	1.989	2.905	1.460	2.575	1.294	394.32	444.80	0.886
50	1.273	1.736	1.364	1.565	1.229	630.30	695.00	0.907
60	0.884	1.148	1.299	1.050	1.188	921.88	1000.80	0.921

Определение напряжений в колоннах выше осуществлялось в предположении линейной связи между деформациями и напряжениями, однако, как известно, отчетливо проявляющаяся нелинейность упомянутых характеристик бетона может привести к расхождению с расчетными данными, в особенности в условиях, когда напряжения близки к достижению прочности. Это и предопределяет использование расчета по предельным состояниям [11]. Результаты расчета несущей способности колонн с учетом разупрочнения поверхностного слоя, согласно данным, полученным авторами для бетона на литоидной пемзе при нагружении в направлении перпендикулярном слоям бетонирования через 5,5 лет после изготовления ( $R_{\text{нар}} = 19,9 \text{ МПа}$ ,  $R_{\text{вн}} = 27,8 \text{ МПа}$ ) также представлены в табл. 1 вкпе с отношением предельных значений  $N_{\text{нес}}$  с учетом и без учета неоднородности  $k_{\text{осл}}$ .

Из данных табл. 1 можно сделать вывод о том, что, вообще говоря, неоднородность незащищенного от атмосферных воздействий бетона, связанная с различием протекания процесса твердения в наружных и внутренних слоях сжатых элементов, может привести к существенному перераспределению напряжений, однако при расчете на прочность по предельным состояниям влияние неоднородности значительно менее существенно, при этом, естественно, с увеличением размера сечения колонны снижение расчетной несущей способности, определяемое коэффициентом ослабления  $k_{\text{осл}}$ , уменьшается.

## 2. Расчет изгибаемых элементов из железобетона

Расчет изгибаемых элементов здесь осуществляется для балок прямоугольного сечения с распространением результатов для плит при беспредельном увеличении ширины балок. В основе расчета положено определение несущей способности в виде предельного изгибающего момента  $M_{\text{пред}}$  по обычной методике [11]. Аналогично п.1, принимается, что наружная полоса сечения с толщиной  $c$  имеет прочность  $R_{\text{нар}}$ , отличную от прочности внутренней части сечения  $R_{\text{вн}}$ . Для балок прямоугольного сечения в случае однородного бетона имеем следующие соотношения статики [11] (фиг.1):



фиг.1

$$m_a R_a F_a = R_{\text{вн}} b x_0 \quad (2.1)$$

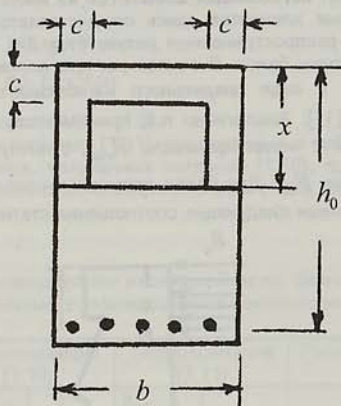
$$M_{\text{пред}}^0 = R_{\text{вн}} b x_0 \left( h_0 - \frac{x_0}{2} \right) \quad (2.2)$$

где  $m_a$  - коэффициент условий работы арматуры,  $b$  - ширина изгибаемого элемента,  $F_a$  - площадь поперечного сечения арматуры,  $h_0$  - расстояние от кромки сжатой области до центра тяжести арматуры,  $x_0$  - высота сжатой зоны однородного элемента,  $R_a$  - прочность арматуры. Здесь площадь сечения арматуры  $F_a$  ограничена условием  $x_0 < 0,55h_0$ .

При рассмотрении изгиба балок с учетом уменьшения прочности наружного слоя с толщиной  $c$  (фиг.2) до значения  $R_{\text{нар}}$ , вместо соотношений (2.1) и (2.2) будем иметь

$$m_a R_a F_a = R_{\text{вн}} (b - 2c)(x - c) + R_{\text{нар}} c(2x + b - 2c) \quad (2.3)$$

$$M_{\text{пред}} = R_{\text{вн}} (x - c)(b - 2c) \left( h_0 - c - \frac{x - c}{2} \right) + R_{\text{нар}} \left[ 2cx \left( h_0 - \frac{x}{2} \right) + (b - c)c \left( h_0 - \frac{c}{2} \right) \right] \quad (2.4)$$



фиг. 2

Как указано в работе [11], на основе анализа экспериментальных данных, проведенных для железобетонных балок, при  $\frac{x}{h_0} > 0,55$  разрушение балки происходит от продавливания бетона, в то время как при  $\frac{x}{h_0} < 0,55$  разрушению предшествует существенное увеличение ее прогиба в связи с достижением предела текучести у арматуры. Естественно, требование  $\frac{x}{h_0} < 0,55$  является необходимым при проектировании балок как для однородного, так и для неоднородного бетона. В табл. 2 приведены численные значения коэффициентов  $k_{осл} = \frac{M_{пред}}{M_{пред}^0}$  при условии  $R_{нар.} = 0,7R_{вн.}$ , что согласуется с данными [2, 3, 12] и могут быть приняты ориентировочными и для бетонов, исследование возрастной неоднородности которых не проводилось.

Определение значений  $k_{осл}$  осуществлено следующим способом. Принято армирование балки, обеспечивающее  $x_0 = h_0 / 3$  при этом расчетные значения  $x$  во всех рассмотренных случаях не достигали  $0,55 h_0$ . Учет ослаблений периферийных областей сечения балки, определяющих ее неоднородность, приводил к увеличению  $x$ , но уменьшение предельно воспринимаемого изгибающего момента было незначительным и не достигало 9%.

Во второй части табл. 2 рассматривались наиболее неблагоприятные случаи изгиба балки при предельном ее армировании  $x_0 = 0,55 h_0$ , при этом ослабление поверхностных слоев балки должно привести к недогрузке арматуры, так как увеличение значения  $x$  не может быть обоснованным, то есть условие (2.3) не удовлетворяется.

Таблица коэффициентов ослаблений  $k_{осл.}$  балок при изгибе вследствие неоднородности бетона

Изгиб при	h(см)	b(см)				
		20	40	60	80	$\infty$
$x_0 = \frac{h_0}{3}$	50	0,9186	0,9343	0,9385	0,9405	0,9458
	40	0,9172	0,9280	0,9309	0,9323	0,9358
	30	0,9155	0,9201	0,9213	0,9219	0,9234
	20	0,9140	0,9140	0,9140	0,9140	0,9140
Изгиб при предельном армировании $x = x_0 = 0,55h$	50	0,7172	0,7947	0,8205	0,8334	0,8716
	40	0,7142	0,7785	0,8000	0,8107	0,8429
	30	0,7090	0,7534	0,7680	0,7752	0,7969
	20	0,7018	0,7098	0,7125	0,7138	0,7178

Как можно заключить из данных табл. 2, проектирование железобетонных балок и плит, эксплуатируемых в условиях непосредственных атмосферных воздействий, целесообразно осуществлять при относительно малом количестве арматуры, что соответствует относительно малым значениям  $x$ . Отметим, что при рассмотрении поперечного изгиба (с учетом касательных напряжений от поперечных сил) ситуация оказывается более благоприятной, так как наибольшие касательные напряжения возникают в средней области балки, где прочностные свойства материала не являются сниженными.

#### Основные выводы

1. Учет возрастной неоднородности бетона может привести к существенному расхождению значений расчетных и действительных напряжений (см. значения  $k_{пер.}$  в табл. 1).

2. Влияние возрастной неоднородности бетона на результаты прочностных расчетов по несущей способности значительно менее существенно, причем оно тем существеннее, чем меньше размеры конструкции (см. значения  $k_{осл.}$  в табл. 1 и 2). Поскольку значения  $k_{осл.}$  в табл. 1 и 2 превышают значения коэффициента неоднородности бетона, принимаемые в пределах 0,55- 0,65 для расчета несущей способности бетона, то, вероятно, возрастная неоднородность бетона может быть и не учитываемой при прочностных расчетах.

3. При проектировании железобетонных изгибаемых элементов имеет смысл избегать предельного армирования, так как при этом ( $x_0 / h_0 = 0,55$ ) влияние возрастной неоднородности бетона на несущую способность изгибаемого элемента оказывается более существенным, чем при меньшем армировании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Kemi Torao, Hiraga Tomoaki, Kurabayashi Kiyoshi, Shinozaki Tooru, Aramaki Tetsuo.* Strenght distribution of massive concrete Rev. 33 rd Gen. Meet. Cem. Assoc. Jap. Techn. Sess. Tokyo, 1979, Synos, Tokyo, 1979, p. 241-243.
2. *Худавердян В.М.* О некоторых свойствах летнего бетона. - Сб. Тр. совещания по теории технологии бетонов.- Ереван. Изд. АН АрмССР, 1956, с.287-304.



3. *Ботвина Л.М.* Изучение физико-механических свойств силикатного бетона в условиях сухого и жаркого климата. Ст. Материалы I Всесоюзного координационного совещания по проблеме технологии бетонных работ в условиях жаркого климата. 1970. Ташкент, Узбекистан, 1974, с. 124-127.
4. *Ашрабов А.Б., Тарасов О.Г., Сайганов Р.Ш.* Влияние сухого жаркого климата на прочностные и деформативные свойства бетона.- Строительство и архитектура Узбекистана. 1972, №11, с.8-9.
5. *Reichard T.W.* Creep and drying shrinkage of lightweight and normal-weight concretes. NBS. Monogr. U.S. Dept. Commerce, 1964, №74, p. 111.
6. *Карпетян К.С., Карпетян К.А.* Исследование неоднородности прочности, модуля деформации и ползучести бетонного элемента.- Изв. АН АрмССР. Механика. 1983, т.36, №2, с. 37-53.
7. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы ползучести.- М.- Л.: Гостехтеориздат. 1952. 323 с.
8. *Арутюнян Н.Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих тел. Препринт. №170. М. 1981. 75 с.
9. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники.- М.- Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949, 380 с.
10. *Карпетян К.С., Карпетян К.А.* Прочность и деформации различных зон сечения бетонного цилиндра при сжатии.- Изв. АН АрмССР. Механика 1982, т.35, №4, с. 56-67.
11. *Сахновский К.В.* Железобетонные конструкции.- М.: Госстройиздат, 1950, 839 с.
12. *Карпетян К.С., Карпетян К.А.* Влияние высыхания на анизотропию прочности и модуль деформации бетона.- Теоретична и приложна механика. Варна. 1981. Докл. кн.I. София. 1981, с.262-267.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
29.04.1994