ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ КОМБИНАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Баблоян А.А., Макарян В.С.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Վ.Ս. Մակարյան

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների կոմբինացիաներ պարունակող զույգ ինտեգրալ հավասարումներ

Աշխատանքում դիտարկվում են ընդհանուր տիպի զույգ ինտեգրալ հավասարումներ, որոնք պարունակում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների (0.1) կոմբինացիաները: Ներկայացնելով անհայտ ֆունկցիան տարբեր տեսքերով, զույգ հավասարումները բերվում են կամ Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը տարբեր տիրույթներում կամ քվազի-լիովին ռեգուլյար-անվերջ համակարգի: Հաշված են զույգ հավասարումների մեջ մտնող ինտեգրալների արժեքները ամբողջ կիսաառանցքի վրա:

A.H. Babloyan , V.S. Makaryan

Dual Integral Equations, Involving Combinations of Trigonometric Functions

Парными уравнениями занимались многие авторы [1-7]. Общие подходы для решения отдельных классов парных уравнений предложены в работах [4-5]. Обзор по парным уравнениям содержится в работах [4-5].

В данной работе рассматриваются парные интегральные уравнения, содержащие следующие комбинации тригонометрических функций:

$$\chi(\beta,t)=\gamma\sin\beta t-\beta\cos\beta t\,,\quad \eta(\beta,t)=\gamma\cos\beta t+\beta\sin\beta t \tag{0.1}$$

Разложения по функциям (0.1), а также рассматриваемые здесь парные уравнения встречаются в задачах теории упругости при удовлетворении граничным условиям в радиальных направлениях [9,11]. На полуоси ($0<t<\infty$) формулы разложения произвольной функции в интеграл Фурье по функциям (0.1) имеют вид:

$$f(t)=2\gamma H_0(\gamma)e^{-t\gamma}\int_0^\infty f(x)e^{-x\gamma}dx+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\chi(\beta,t)d\beta}{\beta^2+\gamma^2}\int_0^\infty f(x)\chi(\beta,x)dx$$

$$f(t)=-2\gamma H_0(\gamma)e^{-t\gamma}\int_0^\infty f(x)e^{-x\gamma}dx+ \tag{0.2}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\eta(\beta,t)d\beta}{\beta^2+\gamma^2}\int_0^\infty f(x)\eta(\beta,x)dx$$

где γ - произвольное число, а $H_0(\gamma)$ - функция Хевисайда

$$H_0(\gamma)=\begin{cases}1, & \gamma>0\\ 0, & \gamma<0\end{cases}$$

Для полноты здесь же приведем соответствующие формулы разложения для конечной области (0<t<T)

$$f(t)=\frac{2\gamma e^{-t\gamma}}{1-e^{-2T\gamma}}\int_0^T f(x)e^{-x\gamma}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\chi_k(t)}{T(\beta^2+\gamma^2)}\int_0^T f(x)\chi_k(x)dx$$

$$f(t)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx-\frac{2\gamma e^{-t\gamma}}{1-e^{-2T\gamma}}\int_0^T f(x)e^{-x\gamma}dx+$$

$$+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k(t)}{\beta^2+\gamma^2}\int_0^T f(x)\eta_k(x)dx \qquad (0.3)$$

где

$$\chi_k(t)=\gamma\sin\beta_k t-\beta_k\cos\beta_k t\,,\qquad \beta_k=\frac{k\pi}{T}$$

$$\eta_k(t)=\gamma\cos\beta_k t+\beta_k\sin\beta_k t \qquad (0.4)$$

При $\gamma=0$ из (0.2) и (0.3) получаются соответствующие формулы разложения по синусам и косинусам.

При решении парных интегральных уравнений используются формулы обращения интегральных уравнений Абеля, разрывные интегралы Сонина и др. Все эти формулы содержатся в книгах [4, 5, 7] и др., поэтому здесь не приводим.

Сперва рассмотрим парные интегральные уравнения

$$Ae^{-t\gamma}+\int_0^{\infty}\beta^l Y(\beta)(1-\gamma(\beta))\chi(\beta,t)d\beta=f(t) \qquad (a<t<\infty)$$

$$cAe^{-t\gamma}+\int_0^{\infty}Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta=g(t) \qquad (0<t<a) \qquad (0.5)$$

где $l=\pm1,\gamma\geq0$ и c - заданные числа, $f(t)$ и $\gamma(t)$ - интегрируемые, а $g(t)$ - кусочно-дифференцируемая функция, причем существует такое число $\varepsilon>0$, для которого имеют место

$$\lim_{t\to\infty}f(t)e^{\varepsilon t}=\lim_{t\to\infty}\gamma te^{\varepsilon t}=0 \qquad (0.6)$$

В уравнениях (0.5) неизвестными являются коэффициент A, функция

$Y(\beta)$, а также значение первого (второго) интеграла в области $0 < t < a$ $(a \le t < \infty)$.

1. Первый способ решения при $l = 1$.

Умножая уравнения (0.5) на $e^{-\gamma t}$ и проинтегрируя первое из них в пределах (t, ∞), а второе - в пределах $(0, t)$, получим

$$\int_0^\infty \beta Y(\beta)[1-\gamma(\beta)]\sin\beta t d\beta = f_2(t) \qquad (a < t < \infty)$$

$$\int_0^\infty Y(\beta)\sin\beta t d\beta = -g_2(t) \qquad (0 < t < a) \tag{1.1}$$

где

$$f_2(t) = f_1(t) - \frac{A}{2\gamma}e^{-\gamma t}, \qquad g_2(t) = g_1(t) - \frac{cA}{\gamma} sh\gamma t$$

$$f_1(t) = \int_t^\infty e^{\gamma(t-x)} f(x)dx, \qquad g_1(t) = \int_0^t e^{\gamma(t-x)} g(x)dx \tag{1.2}$$

Парные уравнения (1.1) рассматривались в работах [2-7], где они с использованием интегральных представлений функции Бесселя

$$J_0(\beta x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\cos\beta t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\beta t dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \tag{1.3}$$

сначала приводим к виду

$$\int_0^\infty \beta Y(\beta)[1-\gamma(\beta)]J_0(\beta x)d\beta = F_2(x) \qquad (a < x < \infty)$$

$$\int_0^\infty \beta Y(\beta)J_0(\beta x)d\beta = -G_2(x) \qquad (0 < x < a) \tag{1.4}$$

а затем, по формуле обращения Ханкеля, для определения неизвестной функции $Y(\beta)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$Y(\beta)[1-\gamma(\beta)] + \int_0^\infty z\gamma(z)Y(z)dz \int_0^a xJ_0(\beta x)J_0(zx)dx =$$

$$\int_0^\infty xH_2(x)J_0(\beta x)dx \qquad (0 \le \beta < \infty)$$

где введены обозначения

$$H_k(x)=\begin{cases}-G_k(x) & (0\le x\le a)\\ F_k(x) & (a\le x<\infty)\end{cases}\qquad (k=1;2) \tag{1.5}$$

$$G_k(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{g_k'(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}},\quad F_k(x)=\frac{2}{\pi}\int_x^\infty\frac{f_k(t)dt}{\sqrt{t^2-x^2}} \tag{1.6}$$

$$G_2(x)=G_1(x)-cAI_0(\gamma x),\quad F_2(x)=F_1(x)-\frac{A}{\pi\gamma}K_0(\gamma x)$$

При получении (1.6) были использованы интегральные представления функций Бесселя от мнимого аргумента

$$\left(\frac{2z}{\gamma}\right)^\nu I_\nu(\gamma z)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\int_0^z\left(z^2-y^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}ch\gamma y dy \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{2z}{\gamma}\right)^\nu K_\nu(\gamma z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\int_z^\infty e^{-\gamma y}\left(z^2-y^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dy$$

Неизвестную постоянную A будем определять из условия ограниченности первого (второго) интеграла уравнений (1.1), (0.5), когда $t\to a-0$ $(t\to a+0)$.

Это условие приводит к соотношению

$$G_2(a)+F_2(a)+\int_0^\infty z\gamma(z)Y(z)J_0(za)dz=0 \tag{1.8}$$

В силу (1.6) соотношение (1.8) представляем в виде

$$A\left[cI_0(a\gamma)+\frac{1}{\pi\gamma}K_0(a\gamma)\right]=G_1(a)+F_1(a)+\int_0^\infty z\gamma(z)Y(z)J_0(za)dz \tag{1.9}$$

Отметим, что (1.8) является условием эквивалентности парных уравнений (0.5) (при $l=1$) и (1.1). В случае $\gamma(\beta)\equiv 0$ (1.8) превращается в условие непрерывности функции $H_2(x)$ в точке $x=a$. При $\gamma(\beta)\equiv 0$ и $a\to 0$ из (1.8) получается выражение для коэффициента свободного члена первого разложения (0.2). При условии (1.8) интегральное уравнение (1.5) принимает вид

$$\beta Y(\beta)[1-\gamma(\beta)]+\int_0^\infty z^2\gamma(z)Y(z)dz\int_0^a xJ_1(\beta x)J_1(zx)dx=$$

$$= -\int_0^\infty x H_2'(x) J_1(\beta x) dx \qquad (0 \le \beta < \infty) \tag{1.10}$$

Из (1.5) и (1.10) для интегралов, входящих в (0.5) при $l = 1$, получим следующие значения:

$$\int_0^\infty \beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta = \left[G'_2(a) + F'_2(a) + U'(a)\right]\frac{aH_0(a-t)}{\sqrt{a^2-t^2}} +$$

$$+ * \int_t^\infty \frac{\left[xH_2'(x)\right]' - \gamma t H_2'(x)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx - H_0(a-t)\int_t^a \frac{\left[xU'(x)\right]' - \gamma t U'(x)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx \tag{1.11}$$

$$\int_0^\infty Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta = g(0) - cA + \int_0^t \frac{\gamma x H_2(x) - tH_2'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx +$$

$$+ H_0(t-a)\int_a^t \frac{\gamma x U(x) - tU'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx \qquad (0 \le t < \infty) \tag{1.12}$$

где $\quad U(x) = \int_0^\infty \beta\gamma(\beta)Y(\beta)J_0(\beta x)d\beta \quad$ (1.13)

а * перед знаком интеграла означает, что влияние обобщенных функций, фигурирующих в подынтегральном выражении, на значение интеграла не учитывается, т.к. оно уже учтено при выделении первого слагаемого формулы (1.11).

Пользуясь решением интегрального уравнения Абеля из (1.11) и (1.12), получим

$$\int_0^\infty \beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta = \gamma f_2(t) - f_2'(t) = f(t) - Ae^{-t\gamma} \qquad (a < t < \infty)$$

$$\int_0^\infty \beta Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta = g_2'(t) - g_2(t)\gamma = g(t) - cAe^{-t\gamma} \qquad (0 < t < a)$$

т.е. функция $Y(\beta)$, действительно, является решением уравнений (0.5).

2. Второй способ решения (0.5) при $l = 1$.

Приведем уравнения (0.5) к виду (1.1) и представим функцию $Y(\beta)$ в виде

$$\beta Y(\beta) = \beta\int_a^\infty xZ(x)J_0(\beta x)dx - \beta\int_0^a xG_2(x)J_0(\beta x)dx =$$

$$=-\int_a^\infty xZ'(x)J_1(\beta x)dx+\int_0^a xG_2'(x)J_1(\beta x)dx \tag{2.1}$$

где принято

$$Z(a)+G_2(a)=0 \tag{2.2}$$

функция $Z(x)$ подлежит к определению, а $G_2(x)$ определяется формулами (1.2) и (1.6).

На основе (2.1) и (2.2) вычислим интегралы, входящие в (1.1) (1.10)

$$\int_0^\infty \beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)\sin\beta t d\beta=\int_0^a\left\{\frac{tH_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}-x\int_0^\infty\gamma(\beta)J_1(\beta x)\sin\beta t d\beta\right\}\times$$

$$\times G_2'(x)dx-\int_a^\infty\left\{\frac{H_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}-x\int_0^\infty\gamma(\beta)J_1(\beta x)\sin\beta t d\beta\right\}Z'(x)dx \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty Y(\beta)\sin\beta t d\beta=\int_a^\infty\frac{xZ(x)H_0(t-x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx-\int_0^a\frac{xG_2(x)H_0(t-x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx \qquad (0<t<\infty)$$

$$\int_0^\infty\beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)J_0(\beta t)d\beta=\int_0^a\left\{H_0(x-t)-x\int_0^\infty\gamma(\beta)J_1(\beta x)J_0(\beta t)d\beta\right\}G_2'(x)dx-$$

$$-\int_a^\infty\left\{H_0(x-t)-x\int_0^\infty\gamma(\beta)J_1(\beta x)J_0(\beta t)d\beta\right\}Z'(x)dx$$

Отсюда следует, что вторые уравнения (0.5) и (1.1) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя первым уравнениям (1.1) или (1.4), для определения функции $Z(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$Z(t)-\int_a^\infty xZ(x)dx\int_0^\infty\beta\gamma(\beta)J_0(\beta x)J_0(\beta t)d\beta=$$

$$=F_2(t)-\int_0^a xG_2(x)dx\int_0^\infty\beta\gamma(\beta)J_0(\beta x)J_0(\beta t)d\beta \qquad (a<t<\infty) \tag{2.4}$$

Неизвестную постоянную A будем определять из соотношения (2.2), а интегралы в (0.5) легко вычисляются при помощи формул (2.3).

3. Третий способ решения (0.5) при $l=1$

Представим решение парных уравнений (0.5) или (1.1) в виде

$$\beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)=\beta\int_a^\infty xF_2(x)J_0(\beta x)dx-\beta\int_0^a xZ(x)J_0(\beta x)dx=$$

$$= \int_0^a xZ'(x)J_1(\beta x)dx - \int_a^\infty xF_2'(x)J_1(\beta x)dx \quad (3.1)$$

где

$$F_2(a) + Z(a) = 0 \quad (3.2)$$

а функция $F_2(x)$ определяется формулами (1.2) и (1.6). На основе (3.1) и (3.2) вычислим интегралы, входящие в уравнения (1.1) и (1.4).

$$\int_0^\infty \beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)\sin\beta t d\beta = t\int_0^a Z'(x)\frac{H_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx -$$

$$-t\int_a^\infty \frac{F_2'(x)H_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx, \quad (0 \le t < \infty)$$

$$\int_0^\infty Y(\beta)\sin\beta t d\beta = \int_a^\infty \left\{\frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2-x^2}} + \int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_0(\beta x)\sin\beta t d\beta\right\}xF_2(x)dx -$$

$$-\int_0^a \left\{\frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2-x^2}} + \int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_0(\beta x)\sin\beta t d\beta\right\}xZ(x)dx + \quad (3.3)$$

$$\int_0^\infty \beta Y(\beta)J_0(\beta t)d\beta = \int_0^a xZ'(x)dx\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_1(\beta x)J_0(\beta t)d\beta -$$

$$-\int_a^\infty xF_2'(x)dx\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_1(\beta x)J_0(\beta t)d\beta + \begin{cases} -Z(t) & (t \le a) \\ F_2(t) & (t \ge a) \end{cases}$$

Из (3.3) следует, что при выборе (3.1) первые уравнения (0.5) и (1.1) удовлетворяются тождественно. После удовлетворения (1.1) и (1.4) для определения неизвестной функции Z(t) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$Z(t) + \int_0^a xZ(x)dx\int_0^\infty \beta\gamma_1(\beta)J_0(\beta x)J_0(\beta t)d\beta =$$

$$= G_2(t) + \int_a^\infty xF_2(x)dx\int_0^\infty \beta\gamma_1(\beta)J_0(\beta x)J_0(\beta t)d\beta \quad (0 \le t \le a) \quad (3.4)$$

где $\gamma_1(\beta)$ определяется из соотношения

$$[1-\gamma(\beta)][1+\gamma_1(\beta)] = 1 \quad (3.5)$$

Постоянную A будем определять из (3.2), а интегралы, входящие в (0.5) легко вычисляются при помощи формул (3.3).

Отметим, что правая часть уравнения (3.4) зависит от неизвестного постоянного A, вследствие чего функция $Z(t)$ является линейной функцией от A. Поэтому значение A целесообразно определить только после решения (3.4).

4. Четвертый способ решения (0.5) при $l=1$

Представим решение парных уравнений в виде

$$\beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)=\beta\int_a^\infty xF_2(x)J_0(\beta x)dx+\sum_{k=0}^\infty b_k J_{2k+1}(\beta a)=$$

$$=-aF_2(a)J_1(\beta a)-\int_a^\infty xF_2'(x)J_1(\beta x)dx+\sum_{k=0}^\infty b_k J_{2k+1}(\beta a) \qquad (4.1)$$

и вычислим следующие интегралы:

$$\int_0^\infty \beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)\sin\beta t d\beta=-F_2(a)\frac{tH_2(a-t)}{\sqrt{a^2-t^2}}-\int_a^\infty \frac{tF_2'(x)H_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx+$$

$$+H_0(a-t)\sum_{k=0}^\infty b_k\frac{\sin(2k+1)u_0}{\sqrt{a^2-t^2}},\quad (0\le t<\infty) \qquad (4.2)$$

$$\int_0^\infty Y(\beta)\sin\beta t d\beta=\int_a^\infty\left\{\frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2-x^2}}+\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_0(\beta x)\sin\beta t d\beta\right\}xF_2(x)dx+$$

$$+\sum_{k=0}^\infty\frac{b_k}{2k+1}\left[(2k+1)\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_{2k+1}(\beta a)\sin\beta t\frac{d\beta}{\beta}+\begin{Bmatrix}\sin(2k+1)u_{0,} & (t\le a)\\ (-1)^k q_0^{2k+1}, & (t\ge a)\end{Bmatrix}\right]$$

$$\int_0^\infty \beta Y(\beta)J_0(\beta t)d\beta=F_2(t)H_0(t-a)-aF_2(a)\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_1(\beta a)J_0(\beta t)d\beta-\int_a^\infty xF_2'(x)dx\times$$

$$\times\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_1(\beta x)J_0(\beta t)d\beta+\sum_{k=0}^\infty b_k\left\{\frac{H_0(a-t)}{a}P_k\left(1-\frac{2t^2}{a^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \gamma_1(\beta)J_{2k+1}(\beta a)J_0(\beta t)d\beta\right\}\qquad (0\le t<\infty)$$

где $P_k(x)$ - полином Лежандра, $\gamma_1(\beta)$ определяется формулой (3.5),

$$u_0 = \arcsin\frac{t}{a}, \quad q_0 = \frac{t - \sqrt{t^2 - a^2}}{a} \tag{4.3}$$

Приравнивая нулю коэффициент при особенности в первой формуле (4.2), получим уравнение для определения A.

$$aF_2(a) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k \tag{4.4}$$

Из (4.2) следует, что функция (4.1) удовлетворяет первым уравнениям (0.5) и (1.1). Удовлетворяя вторым уравнениям (1.1) и (1.4), для определения неизвестных постоянных b_k получим бесконечную систему

$$\frac{b_p}{2(2p+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\infty} \beta^{-1}\gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_{2p+1}(\beta a) d\beta =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{g_2(t)\sin(2p+1)u_0}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt - \tag{4.5}$$

$$-\int_a^{\infty} xF_2(x)dx \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2p+1}(\beta a) J_0(\beta x) dx \qquad (p = 0,1,2,\ldots)$$

Пользуясь асимптотическими формулами бесселевых функций, легко доказать, что система (4.5) в общем случае квазивполне регулярна, т.к. сумма модулей коэффициентов при неизвестных при $p \to \infty$ стремится к нулю. Отметим, что сходимость ряда (4.4) можно улучшить при помощи соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\frac{(-1)^k}{a} + \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_0(\beta a) d\beta\right] + G_2(a) +$$

$$+\int_a^{\infty} xF_2(x)dx \int_0^{\infty} \beta\gamma_1(\beta) J_0(\beta a) J_0(\beta x) d\beta = 0 \tag{4.6}$$

которое получается из (4.2) и второго уравнения (1.4).

После решения бесконечной системы (4.5) постоянную A будем определять из (4.4), а значения интегралов, входящих в (0.5), будем определять по формулам

$$\int_0^{\infty} \beta[1-\gamma(\beta)]Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta = \int_a^{\infty} \frac{\left[xF_2'(x)\right]' - \gamma t F_2'(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} H_0(x-t)dx +$$

$$
+\frac{H_0(a-t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\left\{aF_2'(a)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k b_k}{a}\times\right.
$$

$$
\left.\times\left[(2k+1)U_{2k}\left(\frac{t}{a}\right)-1+2\left(\gamma a-\frac{\gamma t^2}{a}-\frac{t}{a}\right)U_k\left(\frac{t}{a}\right)U_{k-1}\left(\frac{t}{a}\right)\right]\right\}
$$

$$
(0<t<\infty)
$$

$$
\int_0^\infty Y(\beta)\chi(\beta,t)d\beta=\int_a^\infty\frac{\gamma x F_2(x)-tF_2'(x)}{\sqrt{t^2-a^2}}H_0(t-x)dx-
$$

$$
-tF_2(a)\frac{H_0(t-a)}{\sqrt{t^2-a^2}}+\int_a^\infty xF_2(x)dx \tag{4.7}
$$

$$
\int_0^\infty\gamma_1(\beta)J_0(\beta x)\chi(\beta,t)d\beta+\sum_{k=0}^{\infty}b_k\int_0^\infty\gamma_1(\beta)J_{2k+1}(\beta a)\chi(\beta,t)\frac{d\beta}{\beta}+
$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k b_k}{a}\left[\frac{\gamma a}{2k+1}\begin{cases}T_{2k+1}\left(\frac{t}{a}\right) & (t\le a)\\ q_0^{2k+1} & (t\ge a)\end{cases}+\begin{cases}-U_{2k}\left(\frac{t}{a}\right) & (t<a)\\ \frac{aq_0^{2k+1}}{\sqrt{t^2-a^2}} & (t>a)\end{cases}\right]
$$

Нетрудно доказать, что в силу условия (4.4) второе выражение (4.7) при $t\to a\pm 0$ остается ограниченным.

В (4.7) $T_k(x)$ и $U_k(x)$ - полиномы Чебышева первого и второго родов соответственно.

$$
T_k(x)=\cos(k\arccos x),\qquad \sqrt{1-x^2}\,U_k(x)=\sin[(k+1)\arccos x]
$$

Таким образом, парные уравнения (0.5) при $l=1$ и $\gamma(\beta)\ne 0$ сводятся или к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода для различных интервалов, или же к бесконечной системе. Во всех случаях при $\gamma(\beta)\equiv 0$ получается замкнутое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Noble B.* The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method - Proc. Camber. Phil. Soc., 1963, v. 59, No 2, 351-362.
2. *Цейтлин А.И.* О методе парных интегралов и парных рядов и его приложениях к задачам механики - 1966, ПММ, т. 30, No2.
3. *Sneddon I.N.* Mixed Boundary value problems in Potential theory. - Amsterdam: North-Holl Publ. Com. 1966, 283.

4. Развитие теории контактных задач в СССР. - М. Наука, 1976.
5. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977.
6. *Бабловн А.А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. - ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
7. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. - Инженерно-физический журнал, 1963, том 6, No 10, 67-71.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды, М.: Наука, т.1-3, 1981.
9. *Макарян В.С.,Саргсян В.* Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т.42, No 2.
10. *Баблоян А.А., Мкртчян А.М.* Решение смешанной задачи для прямоугольника. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т.25, No 2.
11. *Баблоян А.А.,Тоноян В.С.* Плоская задача для ортотропного кольцевого сектора. - Изв. Ан Арм ССР физ-мат наук, 1964, т 17, No 5.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995