ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

ВОЛНЫ ЛЯВА, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕРОВНОСТЯМИ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ռ. Մուխսիխաչոյան

Պարբերաբար անհարթ եզրի երկայնքով տարածվող Լյավի ալիքների մասին

Դիտարկվում է սահքի մակերևութային ալիքների տարածումը կիսատարածության հետ ընդհանուր պարբերաբար անհարթ եզր ունեցող առաձգական շերտում: Ներազգտվում են ստացված դիսպերսիոն հավասարումները, ուսումնասիրված են սահքի երկու տիպի ալիքների գոյության և փոխազդեցության հարցերը:

A.R. Mukhsikhachoyan

The wave of Love propagating along the periodical curly edge

Рассматривается распространение сдвиговых поверхностных волн вдоль периодически неровной границы упругого слоя с подложкой. Исследуются полученные дисперсионные уравнения с точки зрения существования и взаимодействия двух типов сдвиговых волн.

Большая практическая значимость привлекла к проблеме распространения поверхностной акустической волны в периодических структурах интерес многих исследователей [1-5]. Для строго синусоидальных неоднородностей с периодом, равным или близким длине поверхностной волны, задача распространения волны Лява была решена в работе [1]. Решение этой же задачи для любых периодических неоднородностей и исследование влияния формы этих неоднородностей на затухание поверхностной волны приведено в работе [2].

Метод решения задачи, используемый в [3], приводит к независимости скорости распространения поверхностной волны от неровности поверхности и результаты сводятся к исследованию амплитуды поверхностной волны в зависимости от степени неровности.

Применяемый подход в работе [4] показывает, что уже в первом приближении скорость сдвиговой поверхности волны существенно зависит от характеристики неровности поверхности.

Как известно, при ровной границе раздела в изотропном полупространстве (в случае антиплоского напряженно-деформированного состояния) поверхностная волна не распространяется. Однако, немалоизвестно, что с прибавлением слоя на полупространство, при определенных условиях появляется сдвиговая поверхностная волна (СПВ)- волна Лява. С другой стороны, известно также, что материалы с неоднородными поверхностями [5] допускают распространение СПВ. Представляется интересным задача, в которой имеется слой (μ_1, ρ_1) с неровной поверхностью раздела с подложкой (μ_2, ρ_2) с точки зрения влияния неровностей на существование волны Лява, и наоборот, влияние слоя на существование волны от неровностей.

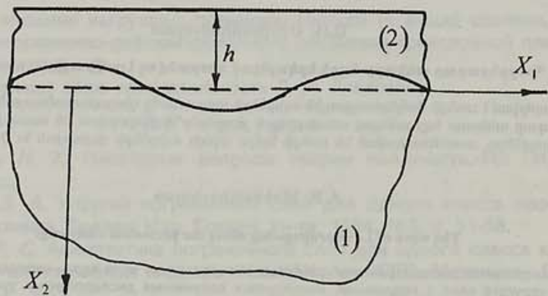
1. Пусть поверхность раздела слоя с подложкой в прямоугольной декартовой координатной системе (x_1, x_2, x_3) задана уравнением

$$x_2 = f(x_1) \tag{1.1}$$

Ось $0x_1$ выбираем параллельной, а ось $0x_2$ - перпендикулярной к верхней поверхности слоя. Слой занимает область $-h \le x_2 < f(x_1)$ (фиг. 1).

Поле упругих перемещений задается в виде

$$U_1^{(i)} \equiv 0, \quad U_2^{(i)} \equiv 0, \quad U_3^{(i)} = U_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1,2$$



фиг. 1

Уравнения движения в слое и в подложке, соответственно, записываются следующим образом:

$$\Delta U_i = c_i^{-2} \ddot{U}_i \tag{1.2}$$

где

$$c_i^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}, \quad i = 1,2, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

При такой постановке задачи граничное условие на свободной от механических нагрузок поверхности слоя $x_2 = h$ примет следующий вид:

$$\sigma_{32}^{(2)} = 0 \tag{1.3}$$

Непрерывность перемещений и напряжений на поверхности раздела слой-полупространство (1.1) выражается следующими соотношениями [1]:

$$[U] = 0, \quad [\sigma_{32}] - [\sigma_{31}] \frac{df}{dx_1} = 0 \tag{1.4}$$

где

$$[U]=U_1-U_2,\quad \left[\sigma_{ij}\right]=\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)}$$

Допустим, что нижняя поверхность слоя изменяется по гармоническому закону, т.е.

$$x_2=f(x_1)=a\cos\nu_2 x_1 \tag{1.5}$$

где $\nu_2=2\pi/\Lambda\cdot\Lambda$ - период неоднородностей, a - амплитуда $(a<h)$. В дальнейшем предполагается, что неровности являются слабыми

$$\varepsilon=\pi a/\Lambda<1 \tag{1.6}$$

Такое предположение позволяет граничное условие (1.4) удовлетворять на плоскости $x_2=0$

Решения уравнений движения в подложке и в слое ищем соответственно в виде

$$U_1=\exp(i\omega t)\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x_2)\sin\nu_n x_1$$

$$U_2=\exp(i\omega t)\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x_2)\sin\nu_n x_1 \tag{1.7}$$

где $\nu_n=\pi n/\Lambda$. Далее, следуя по методу, изложенной в работе [4], для СПВ первой формы $(n=1)$ перемещения и дисперсионное уравнение в первом приближении запишутся соответственно:

$$U_1=A\exp[i\omega t-k\alpha_1 x_2]\sin kx_1$$

$$U_2=\left[B\sin(k\alpha_2 x_2)+D\cos(k\alpha_2 x_2)\right]\exp(i\omega t)\sin kx_1 \tag{1.8}$$

где

$$\alpha_1=\left(1-\mathrm{v}^2/c_1^2\right)^{1/2}\quad \text{и}\quad \alpha_2=\left(\mathrm{v}^2/c_2^2-1\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

$$g\alpha_2\,\mathrm{tg}(kh\alpha_2)-\alpha_1+\varepsilon(1-g)=0 \tag{1.10}$$

где

$$g=\mu_2/\mu_1$$

Здесь и в дальнейшем под $\mathrm{v}=\mathrm{v}_1=\omega/k$ и $k=\nu_1$ будем понимать, соответственно, фазовую скорость и волновое число поверхностной волны первой формы. Необходимо также отметить, что при выводе решений (1.8) предполагалось, что α_2 является реальной тогда, когда α_1 может быть только реальной в силу затухания волны в подложке.

Легко заметить, что при $\varepsilon=0$, т.е. когда слой имеет плоские границы, то дисперсионное уравнение (1.10) приводится к классическому дисперсионному уравнению Лява.

2. Рассматривая длинноволновое приближение $(kh \to 0)$, заметим, что при $\varepsilon^2(1-g)^2 < 1$ вдоль периодически неровной границы раздела слой-подложка распространяется СПВ со скоростью

$$v_0 = c_1\left[1-\varepsilon^2(1-g)^2\right]^{1/2} \tag{2.1}$$

которая больше, чем фазовая скорость СПВ распространяющейся вдоль периодически неровной границы полупространства [4]. Исходя из последнего, можно утверждать, что при $\varepsilon^2(1-g)^2 \geq 1$ поверхностной волны нет.

В зависимости от взаимного расположения трех постоянных величин c_1, c_2 и v_0, возможны три разных варианта расположения дисперсионных кривых [6].

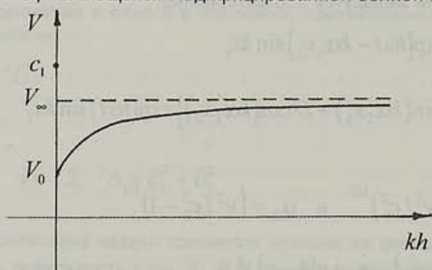
Рассмотрим первый вариант:

$$v_0 < c_1 \leq c_2$$

Как следует из (1.9), α_2 становится мнимой. Пусть $\alpha_2 = i\beta_2$, где β_2 является реальной. Тогда, дисперсионное уравнение (1.10) преобразуется к виду

$$g\beta_2 \,\mathrm{th}(kh\beta_2) + \alpha_1 - \varepsilon(1-g) = 0 \tag{2.2}$$

Сразу же отметим, что последнее уравнение при $g \geq 1$ решений не имеет. Этот вариант допускает единственную моду распространяющейся поверхностной волны, являющейся модифицированной волной Лява (фиг.2)



фиг.2

Однако, отметим, что такая мода не существует при отсутствии неровности границы, в чем легко убедимся, поставив в уравнение (2.2) $\varepsilon = 0$. При возрастании величины kh, коэффициент затухания волны α_1 монотонно убывает, а фазовая скорость монотонно возрастает, начиная со значения v_0 до конечной величины v_∞, которая меньше, чем скорость сдвиговой объемной волны подложки c_1. В коротковолновом приближении ($kh \to \infty$) определим асимптотическое значение v_∞, к которой стремится дисперсионная кривая. Тогда, уравнение (2.2) преобразуется к виду [5].

$$g\left[1-v^2/c_2^2\right]^{1/2}+\left[1-v^2/c_1^2\right]^{1/2}=\varepsilon(1-g) \tag{2.3}$$

Обозначим $v^2/c_1^2=\sin^2\varphi$, тогда

$$1-v^2/c_1^2=\cos^2\varphi,\quad 1-v^2/c_2^2=1-\theta^{-1}\sin^2\varphi,\quad \theta=\frac{c_2^2}{c_1^2}$$

а уравнение (2.3) приводится к виду

$$\cos^2\varphi-2\varepsilon(1-g)\cos\varphi+\varepsilon^2(1-g)^2-g^2\left(1-\theta^{-1}\sin^2\varphi\right)=0$$

отсюда определим

$$\cos\varphi=\left\{\varepsilon(1-g)\pm g\left[\varepsilon^2\theta^{-1}(1-g)^2+\left(1-\theta^{-1}\right)(1-g\rho)\right]^{1/2}\right\}(1-g\rho)^{-1}$$

где

$$\rho=\rho_2/\rho_1$$

Оказывается, что такая волна может существовать только при выполнении определенных условий. Выводим эти условия, исходя из того критерия, что фазовая скорость v существует при $kh\to\infty$. Последнее имеет место только в случае, если уравнение (2.2) будет иметь решение. Используя следующие оценки

$$\left(1-v^2/c_1^2\right)^{1/2}\geq\left(1-c_1^2/c_1^2\right)=0$$

$$\left(1-v^2/c_2^2\right)^{1/2}\geq(1-1/\theta)^{1/2}$$

и учитывая предположение (1.6), необходимое условие запишем

$$g(1-g)^{-1}(1-1/\theta)^{1/2}\leq\varepsilon<1 \tag{2.4}$$

Однако, потребовав, чтобы левая часть последнего неравенства была меньше единицы, получим

$$g<\left[1+(1-1/\theta)^{1/2}\right]^{-1} \tag{2.5}$$

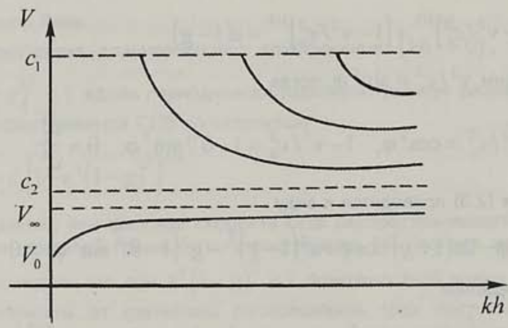
(2.3) и (2.4) составляют условия существования модифицированной поверхностной волны для первого варианта. При $c_1=c_2$ эти условия упрощаются:

$$0<\varepsilon<1,\ g<1.$$

Во втором варианте имеем следующее расположение скоростей:

$$c_2<v_0<c_1$$

Здесь α_2 становится реальной, и следовательно, рассматривается дисперсионное уравнение (1.10). Соответствующие этому случаю моды изображены на фиг.3. Как видно, они мало отличаются от классических мод волны Лява, а при ровной границе раздела с точностью совпадают с ними. Первая



фиг. 4

В последних двух вариантах с возрастанием фазовой скорости возрастает глубина проникания поверхностной волны.

В конце отметим, что характер изменения мод волны Лява в рассматриваемой задаче аналогично характеру изменения электроупругой волны в системе "пьезоэлектрическое полупространство- проводящий слой" [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуляев Ю.В., Курач Т.Н., Плесский В.П.* Отражение поверхностных акустических волн от конечной системы периодических возмущений.- Письма в ЖТФ, 1979, 6, с. 275-278.
2. *Лапин А.Д.* Распространение поверхностной волны Лява вдоль границы с периодическими неоднородностями.- Акуст.ж., 1980, т.26, вып. 5, с.741-748.
3. *Бреховских Л.М.* О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела. - Акуст. ж., 1959, т.5, вып.3, с. 282-289.
4. *Белубекян М.В.* О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности.- Докл. АН АрмССР, 1990, т.90, №2, с. 71-74.
5. *Белубекян М.В., Мухсихачоян А.Р.* О существовании "стоячей" поверхностной сдвиговой волны вдоль периодически неровной поверхности.- Докл. АН АрмССР, 1992, т.93, №2, с.63-67.
6. *R.G.Curtis and M.Redwood* Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness.- J.Appl. Phys., Vol.44, №5, May, 1973.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.03.1994

ԿԱՆՈՆՆԵՐ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

1. Հայաստանի ԳԱԱ տեղեկագրի «Մեխանիկա» սերիային ներկայացվող հոդվածներին կցվում է փպագրության թույլտվություն այն հիմնարկից, որտեղ կատարված է աշխատանքը:**Error! Bookmark not defined.**

2. Հոդվածները ներկայացվում են հայերեն, անգլերեն կամ ռուսերեն, երկու օրինակից, հնարավորին չափ սեղմ, պարզ շարադրված:

3. Բանաձեւերն ու նշանակումները գրվում են պարզ ու որոշակի, ընդ որում, մեծատառերը ցայտուն կերպով պետք է տարբերվեն փոքրատառերից:

Եթե մեծատառերը եւ փոքրատառերը նման են իրենց գծագրությամբ, մեծատառերն ընդգծվում են երկու գծիկով, իսկ փոքրատառերը երկու գծիկով նշվում են վերեւից:

Օրինակ՝ $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ եւ $\overline{\overline{\mathbf{v}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ եւ $\overline{\overline{\mathbf{o}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ եւ $\overline{\overline{\mathbf{k}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ եւ $\overline{\overline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ եւ $\overline{\overline{\mathbf{s}}}$ եւ այլն:

Պետք է հստուկ տարբերակել $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ -ն, $\overline{\overline{\mathbf{o}}}$ -ն եւ **0**-ն (զրո), որի համար **0**-ն (զրո) պետք է ընդգծել ներքեւից քառակուսի փակագծով (մատիտով):

Անհրաժեշտ է խնամքով գրել իրար նման տառերը՝ **g** եւ **q** , **l** եւ **e**, **l** , **J**, **Y** , **u** եւ **n** եւ այլն:

Հունարեն տառերն ընդգծել կարմիր մատիտով:

Ինդեքսն ու ասփիճանացույցը պետք է սեւ մատիտով նշել աղեղով՝ համապատասխանաբար $\frown$ կամ $\smile$ օրինակ՝ $\mathbf{N}^{\overset{4}{\smile}}_{\underset{i}{\frown}}$.

Մաթեմատիկական նշանակումները (**sin, arcsin, ln, lg, lim, const** եւ այլն) ընդգծել հորիզոնական ուղիղ փակագծով:

4. Գրականությունը, ընդհանուր ցուցակով, կցվում է հոդվածի վերջում: Ընդ որում, տվյալները նշվում են հետեւյալ հաջորդականությամբ, եթե գիրք է՝ հեղինակի ազգանունը, անվան, հայրանվան սկզբնատառերը, աշխատության վերնագիրը, ամսագրի անունը, հրատարակման տարեթիվը, հատորը, պրակը, էջերը:

Տեքստում հղումները նշվում են քառակուսի փակագծերի մեջ առնված թվերով:

5. Գծագրերը կցվում են առանձին թերթերով: Նկարների տեղերը նշվում են ձախ լուսանցքում **«նկ ...»** նշումով:

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи, представляемые в "Известия НАН Армении, Механика", должны сопровождаться разрешением на опубликование от учереждения, в котором выполнена работа.

2. Статьи представляются на армянском, английском или русском языках в двух экземплярах в возможно сжатой и ясно изложенной форме.

3. Формулы и все обозначения вписываются четко и ясно, при этом должно быть отчетливое различие между заглавными и строчными буквами.

В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию необходимо заглавные буквы подчеркнуть снизу двумя черточками, а строчные отметить двумя черточками сверху, например: $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{v}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{o}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{k}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{s}}}$ и т. д. Следует также делать различие между $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$, $\overline{\overline{\mathbf{o}}}$ и **0** (нулем), для чего **0** (нуль) следует подчеркнуть снизу квадратной скобкой (карандашом).

Необходимо тщательно вписывать похожие друг на друга буквы например **g** и **q** , **l** и **e**, **l**, **J**, **Y** , **u** и **n** и др. Греческие буквы подчеркивать красным карандашом.

Индексы и показатели следует отметить черным карандашом соответственно дугой $\frown$ или $\smile$, например: $\mathbf{N}^{\overset{4}{\smile}}_{\underset{i}{\frown}}$.

Математические обозначения, например: **sin**, **arcsin**, **ln**, **lg**, **lim**, **const** и т. д., надо подчеркивать горизонтальной прямой скобкой.

4. Литература приводится общим списком в конце статьи, при этом в нижеследующей последовательности указываются: для книги - фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания, издательство, год издания, страницы; для журнала - фамилия и инициалы автора, наименование работы, название журнала, год издания, том (подчеркнуть) и выпуск. Ссылка на литературу в тексте дается цифрой в квадратных скобках.

5. Чертежы прилагаются на отдельных листах. Места иллюстраций указываются на левом поле страницы отметкой "**фиг. ...**"