ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Багдоев А. Г. Мовсисян Л. А.

Ա. Գ. Բագդոեւ, Լ. Ա. Մովսիսյան

Ոչ գծային առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթի մոդուլացիոն կայունությունը

Դիտարկվում է ֆիզիկորեն ոչ գծային առաձգամածուցիկ գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ ծռման ալիքների մոդուլացիոն կայունությունը: Ընդունված է նյութի անսեղմելիությունը եւ մածուցիկությունը ընդհանուր տեսքով:
Ստացված են պայմաններ ալիքի տարածման կայունության համար:

A.G. Bagdoev, L.A. Movsisian

The Modulation Stability of Non-linear Viscoelastic Cylindrical Shell

Изучается устойчивость осесимметричных изгибных волн модуляций в физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке. Принимается несжимаемость материала оболочки.
Получены условия устойчивости распространения модуляционной волны. Наличие вязкости приводит к неустойчивости независимо от вида нелинейности.

Изучается устойчивость осесимметричных изгибных волн модуляций в физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке. Нелинейность берется по [1] в кубическом виде, а вязкие операторы различны для линейной и нелинейной частей [2]. Подобная задача для пластины частного вида вязкости рассматривалась в работе [3]. Принимается также несжимаемость материала оболочки. Тогда в пределах применимости теории Кирхгоффа для нормальных компонентов усилий и изгибающего момента имеем

$$T_1 = 4\widetilde{G}_1 h(\varepsilon_1 + 0{,}5\varepsilon_2) + \frac{32}{3}\widetilde{G}_2 h\gamma_2\Big[\varepsilon_1^3 + \frac{h^2}{4}\varepsilon_1\chi_1^2 +$$

$$+1{,}5\varepsilon_2\left(\varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12}\chi_1^2\right) + 1{,}5\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 0{,}5\varepsilon_2^3\Big]$$

$$T_2 = 4\widetilde{G}_1 h(\varepsilon_2 + 0{,}5\varepsilon_1) + \frac{32}{3}\widetilde{G}_2 h\gamma_2\Big[\varepsilon_2^3 +$$

$$+1{,}5\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 1{,}5\varepsilon_2\left(\varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12}\chi_1^2\right) + 0{,}5\varepsilon_1\left(\varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12}\chi_1^2\right)\Big] \qquad (1.1)$$

$$M = \frac{1}{3}\widetilde{G}_1 h^3\chi_1 + \frac{8}{3}\widetilde{G}_2 h^3\gamma_2\left[\varepsilon_1^2\chi_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\chi_1 + 0{,}5\varepsilon_2^2\chi_1 + \frac{h^2}{20}\chi_1^3\right]$$

Здесь h-толщина, а R -радиус оболочки,

$$\widetilde{G}_j u = G\left(u - \int_{\infty}^{t}\Gamma_j(t-\tau)u(\tau)d\tau\right), \quad G \text{ -модуль сдвига}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{w}{R} \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

Уравнения движения берем в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} = \rho h\frac{\partial^2 w}{dt^2} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.1) и (1.2) в (1.3), ищем ее решение в виде

$$u = be^{i\tau} + \overline{b}\,e^{-i\overline{\tau}}, \qquad w = ce^{i\tau} + \overline{c}\,e^{-i\overline{\tau}}$$
$$\tau = kx - \omega t, \qquad \omega = \omega_1 + i\omega_2 \tag{1.4}$$

Тогда получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\rho\omega^2 = G\left[\left(1 - \Gamma_c^{(1)} - i\Gamma_s^{(1)}\right)\left(\frac{h^2k^4}{3} + \frac{3}{R^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\gamma_2\left(1 - \Gamma_c^{(2)} - i\Gamma_s^{(2)}\right)\left(\frac{h^4k^8}{5} + \frac{2h^2k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4}e^{2\omega_2 t}c\overline{c}\right)\right]$$

$$\Gamma_c^{(j)} = \int_0^{\infty}\Gamma_j(y)\cos\omega y dy, \qquad \Gamma_s^{(j)} = \int_0^{\infty}\Gamma_j(y)\sin\omega y dy \tag{1.5}$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial A^2}\right)A^2, \qquad A = 2|c| \tag{1.6}$$

где линейная частота и коэффициент затухания определяется

$$\omega^{(0)} = \omega_1^{(0)} + i\omega_2^{(0)}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{h^2k^4}{3} + \frac{3}{R^2}\right)\left[1 - \Gamma_c^{(1)}\left(\omega_1^{(0)}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 2\left[1 - \Gamma_c^{(2)}\left(\omega_1^{(0)}\right)\right]\left(\frac{h^4k^8}{5} + \frac{2h^2k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4}\right)\gamma_2 e^{2\omega_2 t}c\overline{c}\right\}^{1/2} \tag{1.7}$$

$$\omega_1^{(0)} = \omega_1(\gamma_2 = 0)$$

$$\omega_2^{(0)} = \omega_2 = -\frac{1}{2}\Gamma_s^{(1)}\left(\omega_1^{(0)}\right)\omega_1^{(0)}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial A^2} = D_1 + iD_2$$

$$D_1 = \frac{1}{4}\frac{G}{\rho}\frac{\gamma_2}{\omega_1^{(0)}}\left(\frac{h^4k^8}{5} + \frac{2h^2k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4}\right)e^{2\omega_2^{(0)}t}$$

$$D_2 = -D_1\frac{\Gamma_s^{(2)}\left(\omega_1^{(0)}\right)\omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)}}{\omega_1^{(0)}}$$

2. На основании (1.6) уравнение модуляции запишется в виде [4]

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{d\omega^{(0)}}{dk}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{d^2\omega^{(0)}}{dk^2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + i\left(D_1 + iD_2\right)a|a|^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$w = ae^{i\tau_0} + \bar{a}e^{-i\tau_0}, \qquad \tau_0 = kx - \omega^{(0)}t, \qquad A = 2|a|$$

Для исследования на устойчивость модуляции представляется $a = a'\exp(i\varphi)$ и тогда из (2.1) получится

$$\frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk}\frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk}a'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2^{(0)}}{dk^2}\left[\frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - \right.$$

$$\left. -a'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}\left(2\frac{\partial a'}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) - D_2 a'|a'|^2 = 0$$

$$a'\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk}a'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk}\frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}\left[\frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - \right. \tag{2.2}$$

$$\left. -a'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2^{(0)}}{dk^2}\left(2\frac{\partial a'}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + D_1 a'|a'|^2 = 0$$

При исследовании на устойчивость следует полагать

$$a' = a_0' + \delta a', \qquad \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \tag{2.3}$$

Тогда, в нулевом приближении получится

$$\frac{\partial a_0'}{\partial t} - D_2\left(a_0'\right)^3 = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + D_1\left(a_0'\right)^2 = 0 \tag{2.4}$$

в решение уравнений возмущения

$$\delta a' = F\exp(iT), \quad \delta\varphi' = \Phi\exp(iT), \quad T = Kx - \Omega t \tag{2.5}$$

в предположении $\exp\left(2\omega_2^{(0)}(t)\right) \approx \mathrm{const}$ приводит к следующему соотношению:

$$z^2 - 3D_2\left(a_0'\right)^2 z + z_1\left(z_1 + 2D_1\left(a_0'\right)^2\right) = 0 \tag{2.6}$$

где

$$z = -i\Omega + iK\frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} - \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2^{(0)}}{dk^2}K^2$$

$$z_1 = iK\frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}K^2$$

Условие устойчивости волн модуляций, после отбрасывания малых более высокого порядка, на основании (2.6) с учетом (1.4) запишется в виде

$$\omega_2^{(0)} + \Omega'' \leq 0 \tag{2.7}$$

где

$$\Omega'' = \mathrm{Im}\,\Omega.$$

Для получения более обозримых результатов, довольствуясь адиабатическим приближением, получим

$$\Omega'' = \frac{3}{2}D_2\left(a_0'\right)^2 \quad \text{при} \quad D_1 > 0 \tag{2.8}$$

$$\Omega'' = \frac{3}{2}D_2\left(a_0'\right)^2 + \sqrt{\left|D_1\right|\frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}}a_0'K \quad \text{при} \quad D_1 < 0 \tag{2.9}$$

Из приведенных условий (2.7) -(2.9) видно, что если недиссипативная волна устойчива, то при наличии диссипации она также будет устойчивой, а в случае неустойчивой недиссипативной волны, диссипация может привести к устойчивости при выполнении условия

$$\omega_2^0 + \frac{3}{2}D_2\left(a_0'\right)^2 + \sqrt{\left|D_1\right|\frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2}}a_0'K \leq 0 \tag{2.10}$$

Для оценки полученных условий изучим пример оболочки со следующими данными. Пусть ядра операторов-экспоненциального типа и одинаковы для линейной и нелинейной частей-

$$\Gamma_j(t) = \frac{G - G_\infty}{Gn}\exp\left(-\frac{t}{n}\right), \quad G_\infty = 0{,}5G$$

При малой вязкости (время релаксации - n-большое) $\Gamma_c \approx 0,$

$\Gamma_s \approx 0{,}25/n\omega_1^{(0)}$ и линейная частота и коэффициент затухания определятся

$$\omega_1^{(0)} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}\left(\frac{h^2k^4}{3}+\frac{3}{R^2}\right)^{1/2}, \quad \omega_2^0 = -\frac{1}{2}\Gamma_s\omega_1^{(0)} = -0{,}25\frac{1}{n}$$

а

$$D_1 = \frac{1}{4}\frac{G}{\rho}\frac{\gamma_2}{\omega_1^{(0)}}\left(\frac{h^4k^8}{5}+\frac{2h^2k^4}{R^2}+\frac{17}{R^4}\right), \quad D_2 = -0{,}25D_1\frac{1}{n\omega_1^{(0)}}.$$

Для пластинки $(R \to \infty)$ условие (2.10) после отбрасывания малых порядка $\left(a_0'\right)^2$ перепишется в виде

$$0{,}25\frac{1}{n} \geq \sqrt{\frac{|\gamma_2|}{10}\frac{G}{\rho}}a_0'Kh^2k^3 \tag{2.11}$$

что выполнимо для весьма малых амплитуд и волновых чисел волны огибающей.

Для цилиндра же с данными $kh = 10^{-1}$, $Rk = 10$ аналогичное условие будет

$$0{,}25\frac{1}{n} \geq 23{,}18 \cdot 10^{-3}\sqrt{|\gamma_2|\frac{G}{\rho}}a_0'Kk \tag{2.12}$$

то есть для оболочки устойчивость будет для меньших значений $a_0'K$, чем для пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.-М.: ИЛ, 1961. 777с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердого тела.-М.: Наука, 1977. 384 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.- Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т.36, №2, с. 3-9.
4. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах- М.: Наука, 1973. 175 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир, 1977. 622 с.
6. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984, 432 с.
7. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках. - Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Т. I., с. 106-112.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
15. 10. 1993