

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան

Շրջանային զլանային թաղանթի կայունության խնդիրը ծոռո
մոմենտի ազդեցության դեպքում

Դիտարկվում է կլաստակերջ շրջանաձև զլանային թաղանթ, որը ծովում է եզրում հավասարաչափ բաշխված ծոռո մոմենտի ազդեցության տակ: Այդպիսի թաղանթի կայունությունը ուսումնասիրված է նենկվելով սկզբնական մոմենտային վիճակի ճշգրիտ լուծման վրա: Որոշված է եզրային էքսկրի փարածման զոնայի երկարությունը: Թաղանթի կայունության հավասարումը լուծված է Բուբնով-Գալերկինի մեթոդով նշված զոնայի սահմաններում: Որոշված է ծոռո մոմենտի կրիտիկական արժեքը կախված թաղանթի եզրագծում փեղալորված ալիքների թվից:

Կախված հարաբերական հաստությունից, թաղանթի ելուքի առաձգական և ամրության բնութագրիչներից սրացված են պայմաններ, ըստ որի կայունության կորուստը փեղել է ունենում ամրության պահպանման դեպքում:

A. V. Babayan

Stability of a Circular Cylindrical Shell under the Influence of Bending Moment

Рассматривается полубесконечная круговая цилиндрическая оболочка, которая изгибается равномерно распределенными по торцу моментами. Устойчивость такой оболочки в отличие от [1,2], исследуется на основе точного решения начального моментного состояния. Определяется длина зоны распространения краевого эффекта. Уравнение устойчивости оболочки решается методом Бубнова-Галеркина в пределах указанной зоны. Находится минимальное критическое значение изгибающего момента в зависимости от числа волн по окружности оболочки.

В зависимости от относительной толщины, упругих и прочностных характеристик материала оболочки, устанавливаются условия, при которых потеря устойчивости происходит при обеспечении прочности.

Рассмотрим задачу устойчивости полубесконечной круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h , когда один край шарнирно закреплен и на краю действует равномерно распределенный изгибающий момент.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат $OXYZ$ так, что поверхность XOY совпадает со срединной поверхностью оболочки.

Лицевые поверхности оболочки свободны.

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad W = 0, \quad M_x = M_0, \quad N_x = 0, \quad \tau = 0 \\ x \rightarrow \infty: \quad W \rightarrow 0, \quad M_x \rightarrow 0, \quad N_x \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Так как задача осесимметрична, то уравнения равновесия [1] упрощаются.

Учитывая граничные условия и выражения для моментов, уравнение изгиба примет следующий вид:

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} W = 0 \quad (2)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - жёсткость оболочки.

Решение уравнения (2) представим в виде

$$W = Ae^{px} \quad (3)$$

где A, P - искомые постоянные.

Подставляя (3) в (2) и решая полученное уравнение, определим искомое решение уравнения (2). Удовлетворяя граничным условиям (1), окончательно получим [4]

$$W_0 = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \exp(-\beta x) \sin \beta x \quad (4)$$

$$\sigma_y^0 = -\frac{EM_0}{2\beta^2 DR} \exp(-\beta x) \sin(\beta x) \quad (5)$$

$$M_x^0 = M_0 \exp(-\beta x) \cos \beta x \quad (6)$$

$$Q_x^0 = -\beta M_0 \exp(-\beta x) (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (7)$$

$$\text{где } \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$$

Для $W_0, \sigma_y^0, M_x^0, Q_x^0$ определим длину зоны распространения краевого эффекта соответственно l_1, l_2, l_3, l_4 по формуле $l = \int_0^{\infty} f(x) dx$,

$$\text{тогда } l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{2\beta}, \quad l_4 = \frac{1}{\beta}$$

Приравнивая нулю производную от σ_y^0 по β , получим экстремальное значение σ_y^0

$$\sigma_{y \max}^0(x_0) = -\frac{\sqrt{6(1-\nu^2)}}{h^2} \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) M_0, \quad \text{где } x_0 = \frac{\pi}{4\beta}$$

при помощи которого получим условие прочности оболочки

$$|\sigma_y| < \sigma_s \Rightarrow M_0 < \frac{h^2}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \sigma_s \exp(\pi/4) \quad (8)$$

Теперь вернемся к задаче устойчивости оболочки. Уравнения устойчивости цилиндрической оболочки берем в виде [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 W = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \sigma_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (10)$$

Исключая из (9), (10) функцию усилий Φ , получим:

$$\frac{D}{h} \nabla^8 W + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \nabla^4 \left(\sigma_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (11)$$

Для того, чтобы использовать метод Бубнова-Галеркина, надо взять конечную цилиндрическую оболочку, длина которой равна длине зоны распространения краевого эффекта.

Граничные условия для шарнирного опирания будут

$$\begin{aligned} x=0: \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \\ x=l^*: \quad W=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (11) представим в следующем виде, чтобы на торцах оболочки удовлетворялись граничные условия:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cos \frac{ny}{R} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно $f_n(x)$

$$L_8 f_n(x) = 0 \quad (14)$$

решение которого с учетом условий (12) представим в виде

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \alpha_k x, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{l^*} \quad (15)$$

где A_k - искомые постоянные.

Применяя к уравнению (14) метод Бубнова-Галеркина, после нескольких преобразований, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно A_k

$$\begin{aligned} & A_m \frac{l^*}{2} \left[\frac{D}{h} \left(\alpha_m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \alpha_m^4 \right] - \frac{n^2}{R^2} \frac{E M_0 \alpha_m}{\beta D R} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_k \left[\exp(-\beta l^*) (-1)^{k+m} (\cos \beta l^* - \sin \beta l^*) - 1 \right] - \left(\alpha_m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \times \\ & \times \frac{n^2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^{l^*} \sigma_y^0 \sin \alpha_k x \sin \alpha_m x dx = 0 \quad m=1,2,\dots \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\int_0^l \sigma_y^0 \sin \alpha_k x \sin \alpha_m x dx = -\frac{EM_0 \alpha_m \alpha_k}{\beta D R \Omega} \left\{ 4\beta^2 (\alpha_m^2 + \alpha_k^2) \times \right. \\ \times [1 - (-1)^{k+m} \exp(-\beta l^*) (\cos \beta l^* + \sin \beta l^*)] + [4\beta^4 - (\alpha_k^2 - \alpha_m^2)^2] \times \\ \times [1 - (-1)^{k+m} \exp(-\beta l^*) (\cos \beta l^* - \sin \beta l^*)] \left. \right\} \\ \Omega = [4\beta^4 + (\alpha_m - \alpha_k)^4] [4\beta^4 + (\alpha_m + \alpha_k)^4]$$

Теперь попробуем определить критическое значение M_0 . Для этого приравняем нулю коэффициент A_1 в уравнении (16) при $m=1$ и получаем критическое значение M_0 в первом приближении. Чтобы определить следующее приближение, приравняем нулю детерминант коэффициентов A_1, A_2 в уравнениях (16) при $m=1, m=2$ и т. д.

В первом приближении получается

$$M_0^{(1)} = -\frac{\pi E h^2}{8\sqrt{3(1-\nu^2)} [1+e^{-\pi}]} f(n) \quad (17)$$

$$\text{где } f(n) = \frac{1 \left(1 + \frac{h}{R} \frac{n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right)^4 + 1}{n^2 \left[1 + \frac{3}{20} \left(1 + \frac{h}{R} \frac{n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right)^2 \right]}$$

Очевидно, что определение $\min M_0^{(1)}$ от n приводится к определению \min функции $f(n)$ от n . В табл. 1 приведены минимальные значения $f(n)$ при $\nu^2 = 0, 1$. Как видно, при уменьшении толщины оболочки уменьшаются минимальные значения функции $f(n)$, а значение n , при котором достигаются эти минимумы, возрастают.

Сравнивая (17) с условием прочности (8), получим

$$\frac{\sigma_s}{E} > \frac{\sqrt{2} \pi}{8e^{\pi/4} [1+e^{-\pi}]} f(n) \quad (18)$$

что является условием, при котором задача устойчивости имеет смысл. При невыполнении условия (18) оболочка теряет прочность до потери устойчивости.

В табл. 1 приведены значения правой части условия (18).

Таблица 1

| n | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| h/R | 0.067 | 0.05 | 0.035 | 0.02 | 0.015 | 0.01 | 0.008 | 0.0067 | 0.0057 | 0.005 |
| $f(n)$ | 0.12647 | 0.0929 | 0.065 | 0.0371 | 0.0279 | 0.0186 | 0.01485 | 0.01237 | 0.01061 | 0.00928 |
| $\frac{\sigma_s}{E} >$ | 0.0307 | 0.0225 | 0.0158 | 0.009 | 0.0068 | 0.0045 | 0.0036 | 0.003 | 0.00259 | 0.00226 |

К примеру, для оболочки, изготовленной из стали 30 (закаленной), $\frac{\sigma_s}{E} = 0,0055$ и, следовательно, согласно табл. 1, постановка вопроса устойчивости возможна при $\frac{h}{R} \leq 0.01$. В частности, при $\frac{h}{R} = 0.01$ минимальный критический момент достигается при $n = 11$. Аналогично, для оболочки из латуни $\frac{\sigma_s}{E} = 0,00375$ и вопрос устойчивости возможен при $\frac{h}{R} \leq 0,008$, соответственно, минимальный критический момент достигается при $n = 13$. А для оболочек из алюминия, бронзы и меди (прутковой) задача устойчивости имеет смысл для более тонких оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А. Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. - Прикл. механика. 1969, т. 5, вып. 6, с. 112-116.
2. Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А. К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. - Докл. АН. Арм. ССР, 1968, т. 56, No 1, с. 156-159.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. - М. Физматгиз, 1963. 879 с.
4. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. - М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 460 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
27. 09. 1994

ԳՆԱՆՆԵՐ ՏԵՂԵՆԱԿՆԵՐԻ ՆՄԱՐ

1. Տայասրանի ԳԱԱ րնդեկագրի «Մեխանիկա» սերիային ներկայացվող հոդվածներին կցվում է րպագրության թույլրվություն այն հիմնարկից, որրերը կտարարված է աշխարանը:

2. Տողվածները ներկայացվում են հայերեն, անգլերեն կամ ռուսերեն, երկու օրինակից, հնարավորին չափ սեղմ, րարզ շարարված:

3. Բանաձեներն ու նշանակումները գրվում են րարզ ու որոշակի, ընդ որում, մեծարտերը ցայրուն կերրվով պերք է րարերովին րորրարտերից:

Էթն մեծարտերը եւ րորրարտերը նման են իրենց գծագրությանը, մեծարտերն ընդգծվում են երկու գծիկով, իսկ րորրարտերը երկու գծիկով նշվում են վերեից:

Օրինակ՝ \underline{V} եւ \underline{v} , \underline{O} եւ \underline{o} , \underline{K} եւ \underline{k} , \underline{U} եւ \underline{u} , \underline{S} եւ \underline{s} եւ այլն:

Պերք է հարուկ րարերրակել \underline{O} -ւ, \underline{o} -ւ եւ $\underline{\theta}$ -ւ (գրո), որի համար $\underline{\theta}$ -ւ (գրո) պերք է ընդգծել ներեից քառակուսի րակագծով (մարիրվով):

Անրամեշր է խնամրով գրել իրար նման րտերը՝ g եւ q , l եւ e, l, J, Y, u եւ n եւ այլն:

Նունարեն րտերն ընդգծել կարմիր մարիրվով:

Ինդեքսն ու առիհանաացյոցը պերք է սեւ մարիրվով նշել աղեղով՝ համարարախանարար

\cap կամ \cup օրինակ՝ N_i^4 :

Մաթեմարիկական նշանակումները (\sin , \arcsin , \ln , lg , \lim , const եւ այլն) ընդգծել հորիզոնալուն ողիղ րակագծով:

4. Գրակաևությունը, ընդհանուր ցուցակով, կցվում է հոդվածի վերջում: Ընդ որում, րվայլները նշվում են հերերյալ հաջորդակաևությունրյամբ, եթե գիրք է հեղինակի ազգանունը, անվան, հայրանվան սկզբնարտերը, աշխարության վերնագիրը, ամազրի անունը, հրարարակվան րարեթիվը, հարորը, րրակը, էջերը:

Տեքսրում հղումները նշվում են քառակուսի րակագծերի մեջ առնված թվերով:

5. Գծագրերը կցվում են առանձին թերթերով: Նկարների րեղերը նշվում են ձախ լուսանցրում « $1/4$...» նշումով:

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении, Механика», должны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнена работа.

2. Статьи представляются на армянском, английском или русском языках в двух экземплярах в возможно сжатой и ясно изложенной форме.

3. Формулы и все обозначения вписываются четко и ясно, при этом должно быть отчетливое различие между заглавными и строчными буквами.

В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию необходимо заглавные буквы подчеркнуть снизу двумя черточками, а строчные отметить двумя черточками сверху, например: \underline{V} и \underline{v} , \underline{O} и \underline{o} , \underline{K} и \underline{k} , \underline{U} и \underline{u} , \underline{S} и \underline{s} и т. д.

Следует также делать различие между \underline{O} , \underline{o} и $\underline{\theta}$ (нулем), для чего $\underline{\theta}$ (нуль) следует подчеркнуть снизу квадратной скобкой (карандашом).

Необходимо тщательно вписывать похожие друг на друга буквы например g и q , l и e, l, J, Y , u и n и др. Греческие буквы подчеркивать красным карандашом.

Индексы и показатели следует отметить черным карандашом соответственно дугой \cap или \cup , например: N_i^4 .

Математические обозначения, например: \sin , \arcsin , \ln , lg , \lim , const и т. д., надо подчеркивать горизонтальной прямой скобкой.

4. Литература приводится общим списком в конце статьи, при этом в нижеследующей последовательности указываются: для книги - фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания, издательство, год издания, страницы; для журнала - фамилия и инициалы автора, наименование работы, название журнала, год издания, том (подчеркнуть) и выпуск. Ссылка на литературу в тексте дается цифрой в квадратных скобках.

5. Чертежи прилагаются на отдельных листах. Места иллюстраций указываются на левом поле страницы отметкой «*фиг. ...*»