ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 1, 1996 Механика

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Ананян А.К.

Ա.Կ. Անանյան

Եզրային պայմանների ազդեցությունը ուղղանկյուն սալի ծռման խնդրում ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Աշխատանքում դիտարկվում է ուղղանկյուն կտրվածքով իզոտրոպ սալի ծռման խնդիրը, որը լուծված է Ս.Ա.Համբարձումյանի սալերի ճշգրտված տեսությամբ: Տրված է խնդրի ընդհանուր լուծումը սալի սինուսոիդային բեռնավորման ժամանակ, երկու տարբեր եզրային պայմանների դեպքում:

Ստացված են առավելագույն ճկվածքների արտահայտությունները այդ դեպքերի համար: Կատարված է թվային վերլուծություն, որի արդյունքները ցույց են տալիս, որ եզրային պայմանների ճշգրտման հետեւանքով ստացված առավելագույն ճկվածքի արժեքը էապես տարբերվում է այն արժեքից, որը ստացվել էր մինչեւ ճշգրտումը: Իսկ սալերի դասական տեսությամբ առավելագույն ճկվածքների արժեքները այդ երկու դեպքերի համար համընկնում են:

A.K. Ananian

On the Influence of Boundary Conditions in the Problem of Rectangular Plate Bending with the Account of Shear Strains

Уточненная теория С.А.Амбарцумяна широко применяется в задачах по изгибу анизотропных пластин при различных граничных условиях [1]. Эта теория использована А.П.Мелконяном и А.А.Хачатряном при решении задачи изгиба прямоугольной, трансверсально-изотропной пластинки, равномерно распределенной нагрузкой $q = \mathrm{const}$ при следующих граничных условиях: 1) пластинка свободно оперта по всем краям; 2) пластинка свободно оперта по двум противоположным краям, а по двум другим - защемлена [2].

В настоящей работе рассматривается задача по изгибу изотропной пластинки прямоугольного сечения с применением уточненной теории [1]. Приводится общее решение задачи при синусоидальной нагрузке с двумя вариантами граничных условий. Целью настоящей работы является вычисление значений максимальных прогибов в задачах изгиба пластинки с уточненными граничными условиями при помощи уточненной теории пластин С.А.Амбарцумяна [1].

1. Рассмотрим шарнирно опертую по всему контуру изотропную прямоугольную пластинку $(a \times b)$, которая изгибается нормально приложенной нагрузкой $Z = Z(x, y)$. Не нарушая общности задачи, можно представить Z в виде $Z = q_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}$.

Для изотропной пластинки задача изгиба по уточненной теории приводится к решению следующих уравнений:

$$D\Delta\Delta W + \frac{2I_1}{(1-\nu)I_0}\Delta Z = Z \tag{1.1}$$

где $I_1 = \int\limits_{-h}^{h} zI(z)\,dz;\ I_0 = \int\limits_{-h}^{h} f(z)\,dz;\ I(z) = \int\limits_{0}^{z} f(z)\,dz$

$f(z)$- функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластинки, причем $f(-h) = f(h) = 0$ [1,3]

$$\Delta F = -\frac{1+\nu}{EI_0} Z \tag{1.2}$$

где $\varphi(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ и $\psi(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$.

- искомые функции, входящие в выражения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz}:

$$\tau_{xz} = f(z)\varphi(x,y),\ \tau_{yz} = f(z)\psi(x,y)$$

Граничные условия рассматриваемой задачи представляют условия Навье и запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &x = \text{const}:\ \sigma_{11} = 0;\ u_2 = 0;\ u_3 = 0 \\ &y = \text{const}:\ \sigma_{22} = 0;\ u_1 = 0;\ u_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

После интегрирования условий Навье по z, в пределах $-h$ до h, получаются следующие осредненные граничные условия:

$$x = 0;\ a:\ W = 0;\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0;\ F = 0$$

$$y = 0;\ b:\ W = 0;\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{3I_1}{h^3}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0;\ F = 0$$

Полагая функцию прогиба $W(x,y) = J(y)\sin\dfrac{\pi x}{a}$ (1.4)

и функцию $F(x,y) = \Phi(y)\sin\dfrac{\pi x}{a}$ (1.5)

удовлетворяются поставленные условия шарнирной опоры.

Подставляя значение прогиба $W(x,y)$ из (1.4) в уравнение (1.1), получим

$$J(y) = A_1\,\mathrm{sh}\,\alpha y + A_2\,\mathrm{ch}\,\alpha y + A_3 y\,\mathrm{sh}\,\alpha y + A_4 y\,\mathrm{ch}\,\alpha y + \frac{q_0 R_0}{D\alpha^4} \tag{1.6}$$

где $R_0 = 1 + \dfrac{2I_1\alpha^2}{(1-\nu)I_0};\ \alpha = \dfrac{\pi}{a}$

Принимая во внимание выражение (1.6), для функции прогиба $W(x,y)$ нетрудно получить:

$$W(x,y)=\left\{A_1\operatorname{sh}\alpha y+A_2\operatorname{ch}\alpha y+A_3 y\operatorname{sh}\alpha y+A_4 y\operatorname{ch}\alpha y+\frac{q_0 R_0}{D\alpha^4}\right\}\sin\alpha x \quad (1.7)$$

На основании выражения (1.5), из уравнения (1.2) получим:

$$\Phi(y)=C_1\operatorname{sh}\alpha y+C_2\operatorname{ch}\alpha y+\frac{1+\nu}{\alpha^2 EI_0}q_0 \quad (1.8)$$

$$F(x,y)=\left\{C_1\operatorname{sh}\alpha y+C_2\operatorname{ch}\alpha y+\frac{1+\nu}{\alpha^2 EI_0}q_0\right\}\sin\alpha x \quad (1.9)$$

С помощью функций $J(y)$ и $\Phi(y)$ граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &y=0:\ J(0)=0;\ J''(0)-\frac{3I_1}{h^3}\Phi''(0)=0;\ \Phi(0)=0\\ &y=b:\ J(b)=0;\ J''(b)-\frac{3I_1}{h^3}\Phi''(b)=0;\ \Phi(b)=0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему из шести алгебраических уравнений с шестью неизвестными. Определяя эти неизвестные, получаются выражения для функций прогиба $W(x,y)$ и $F(x,y)$. Имея функцию $F(x,y)$, можно получить значения неизвестных функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, которые входят в выражения касательных напряжений, и следовательно, можно получить значения этих касательных напряжений.

Для функций прогиба $W(x,y)$ и функций $F(x,y)$ получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} W(x,y)=\frac{q_0}{D\alpha^4}\Bigg\{&-2\left(1+\frac{2I_1\alpha^2}{(1-\nu)I_0}\right)\frac{\operatorname{sh}\alpha(y-b)/2\operatorname{sh}\alpha y/2}{\operatorname{ch}\alpha b/2}+\\ &+\frac{\alpha}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha(y-b/2)}{\operatorname{ch}\alpha b/2}y-\frac{\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha b}b\operatorname{th}\alpha b/2\right]\Bigg\}\sin\alpha x \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$F(x,y)=-\frac{2(1+\nu)}{\alpha^2 EI_0}q_0\frac{\operatorname{sh}\alpha(y-b)/2\operatorname{sh}\alpha y/2}{\operatorname{ch}\alpha b/2}\sin\alpha x \quad (1.12)$$

Теперь подсчитаем максимальный прогиб, который находится в точке $(a/2;b/2)$

$$W_{\max}=W^{(1)}=\frac{q_0 a^4}{D\pi^4}\left\{1-\frac{2+\beta\operatorname{th}\beta}{2\operatorname{ch}\beta}+\frac{4I_1\pi^2}{(1-\nu)I_0 a^2}\frac{\operatorname{sh}^2\beta/2}{\operatorname{ch}\beta}\right\} \quad (1.13)$$

где $\beta=\dfrac{\pi b}{2a}=\dfrac{\alpha b}{2}$ - безразмерная величина.

2. Решим предыдущую задачу при других граничных условиях на краях $y = \text{const}$.

Пусть на краях $x = \text{const}$ даны граничные условия Навье, а на краях $y = \text{const}$ следующие условия:

$$\begin{aligned} &x = \text{const}: \quad \sigma_{11} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \\ &y = \text{const}: \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad u_3 = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Интегрируя (2.1) по z в пределах от $-h$ до h, получаются следующие осредненные граничные условия:

$$x = 0; \qquad a\colon W = 0; \ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{3I_1}{h^3}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \ F = 0$$

$$y = -\frac{b}{2}; \ \frac{b}{2}\colon W = 0; \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{3I_1}{h^3}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{3I_1}{h^3}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Граничные условия, написанные с помощью функций $J(y)$ и $\Phi(y)$, будут

$$y = -\frac{b}{2}\colon \ J(-b/2) = 0; \ J''(-b/2) - \frac{3I_1}{h^3}\left(\Phi''(-b/2) - \alpha^2\nu\Phi(-b/2)\right) = 0$$

$$J'(-b/2) - \frac{3I_1}{h^3}\Phi'(-b/2) = 0$$

$$y = \frac{b}{2}\colon \ J(b/2) = 0; \quad J''(b/2) - \frac{3I_1}{h^3}\left(\Phi''(b/2) - \alpha^2\nu\Phi(b/2)\right) = 0$$

$$J'(b/2) - \frac{3I_1}{h^3}\Phi'(b/2) = 0$$

Удовлетворяя граничным условиям, получается система из шести алгебраических уравнений с шестью неизвестными. Определяя эти неизвестные, получаются выражения для функции прогиба $W(x, y)$ и $F(x, y)$

$$\begin{aligned} W(x, y) = \frac{q_0}{D\alpha^4}\Bigg\{ &\frac{\alpha b\nu \,\mathrm{sh}^2 \alpha b/2 \,\mathrm{ch}\,\alpha y}{\alpha b - \mathrm{sh}\,\alpha b - \nu(\alpha b + \mathrm{sh}\,\alpha b)\,\mathrm{ch}\,\alpha b/2} - \\ &-\left(1 + \frac{2I_1\alpha^2}{(1-\nu)I_0}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha y}{\mathrm{ch}\,\alpha b/2} - 1\right) - \frac{2\alpha\nu\,\mathrm{sh}\,\alpha b/2}{\alpha b - \mathrm{sh}\,\alpha b - \nu(\alpha b + \mathrm{sh}\,\alpha b)} \times \\ &\times y\,\mathrm{sh}\,\alpha y\Bigg\}\sin\alpha x \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$F(x,y)=\left\{\frac{q_0h^3}{3D\alpha^4I_1}\left(1+\frac{2I_1\alpha^2}{(1-\nu)I_0}-\frac{\nu(\alpha b+\operatorname{sh}\alpha b)}{\alpha b-\operatorname{sh}\alpha b-\nu(\alpha b+\operatorname{sh}\alpha b)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\operatorname{ch}\alpha y}{\operatorname{ch}\alpha b/2}-\frac{1+\nu}{\alpha^2EI_0}q_0\right\}\sin\alpha x \tag{2.3}$$

Имея (2.3), можно легко найти функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Теперь подсчитаем максимальный прогиб, который находится в точке $(a/2;0)$.

$$W_{\max}=W^{(2)}=\frac{q_0a^4}{D\pi^4}\left\{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\beta}+\frac{2\nu\beta\operatorname{sh}^2\beta}{2\beta-\operatorname{sh}2\beta-\nu(2\beta+\operatorname{sh}2\beta)\operatorname{ch}\beta}+\right.$$
$$\left.+\frac{4I_1\pi^2}{(1-\nu)I_0a^2}\frac{\operatorname{sh}^2\beta/2}{\operatorname{ch}\beta}\right\} \tag{2.4}$$

где $\beta=\dfrac{\pi b}{2a}=\dfrac{\alpha b}{2}$ - безразмерная величина.

Для сравнения значений максимальных прогибов, при $\beta=1$ и $\beta=1/2$ приведена следующая таблица, где $\nu=1/3$ и при $f(z)=1-z^2/h^2$ имеем $I_1/I_0=\dfrac{2}{5}h^2$.

Таблица

	$\beta=1$		$\beta=1/2$	
	$2h/a=1/10$	$2h/a=1/3$	$2h/a=1/10$	$2h/a=1/3$
Ψ	0,1053	-	0,0108	-
$\Psi^{(1)}$	0,1158	0,2225	0,0142	0,0485
$\Psi^{(2)}$	0,1589	0,2656	0,0254	0,0597

где $\Psi=W\dfrac{D\pi^4}{q_0a^4}$ - максимальный прогиб вычислений по классической теории,

$$\Psi^{(1)}=W^{(1)}\frac{D\pi^4}{q_0a^4},\quad \Psi^{(2)}=W^{(2)}\frac{D\pi^4}{q_0a^4}$$

Из таблицы видно, что при уточнении граничных условий максимальный прогиб в задаче с граничными условиями Навье существенно отличается от максимального прогиба в задаче с граничными условиями (2.1).

По классической теории же Кирхгофа эти результаты одинаковы, так как при осреднении граничных условий (1.3) и (2.1), получаются уравнения шарнирно-опертого края.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин.-М.: Физматгиз, 1987.
2. *Мелконян А.П., Хачатрян А.А.* Об изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. - Изв. АН Арм.ССР, сер. физ-мат. наук, 1965, т.18, №1.
3. *Белубекян В.М.* Канд.дисс. "Определение коэффициентов особенностей в некоторых задачах теории упругости для секториальных тел". ЕГУ, 1991.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
22.06.1994