ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 1, 1996 Механика

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Гулгазарян Г. Р.

Գ. Ռ. Ղուլղազարյան

Ոչ շրջանային գլանային թաղանթի սեփական տատանումների մոտավոր հաճախությունները

Դիտարկվում է, եզրերում Նավյեի պայմաններով, ոչ շրջանային փակ գլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Տեղափոխումների նկատմամբ գրված հավասարումների համակարգը բերվում է տեղափոխման վեկտորի նորմալ կոմպոնենտի նկատմամբ ութերորդ կարգի մեկ հավասարման: Մոմենտային և անմոմենտ խնդիրների համար, օգտվելով Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդից, ստացված են մոտավոր հաճախությունների որոշման համար հավասարումներ: Մասնավոր դեպքերում մոտավոր հաճախությունների համար ստացված են պարզ բանաձևեր:

G. R.Gulgazarian

The Approximate Free Frequencis of Noncircular Cylindrical Shells

Рассматриваются собственные колебания замкнутой некруговой цилиндрической оболочки с условием Навье на торцах. Система уравнений в перемещениях сведена к одному уравнению восьмого порядка относительно нормальной компоненты вектора перемещения. Для моментной и безмоментной задачи, используя метод Бубнова-Галёркина, получены уравнения для определения приближенных собственных частот. В частных случаях получены простые формулы для приближенных собственных частот.

ВВЕДЕНИЕ. В соответствии с технической теорией, определение частот тонкой упругой оболочки рассматриваемого типа приводит к задаче на собственные значения вида [1] .

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}=\lambda u_1 \\
-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right)=\lambda u_2 \qquad (0.1) \\
\mu^4\Delta\Delta u_3-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{u_3}{R^2}=\lambda u_3
\end{gathered}
$$

$$
u_2\big|_{0,l}=u_3\big|_{0,l}=\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\sigma\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\sigma\frac{u_3}{R}\bigg|_{0,l}=\sigma\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_2}{R}\right)+
$$

$$
+\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2}+\sigma\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2}\bigg|_{0,l}=0,\quad \frac{\partial^j u_i(\alpha,0)}{\partial\beta^j}=\frac{\partial^j u_i(\alpha,s)}{\partial\beta^j} \qquad (0.2)
$$

$$
\frac{\partial^r u_3(\alpha,0)}{\partial\beta^r}=\frac{\partial^r u_3(\alpha,s)}{\partial\beta^r},\quad i=1,2,\quad j=0,1,\quad r=0,1,2,3
$$

Здесь u_1, u_2, u_3 - проекции смещения точки срединной поверхности; l - длина образующей; s - полная длина направляющей кривой; α и β - ортогональные координаты точки срединной поверхности: $0 \le \alpha \le l$; $0 \le \beta \le s$; $\mu^4 = h^2/12$ (h - относительная толщина оболочки); $R = R(\beta)$ - радиус кривизны направляющей, который предполагается периодической с периодом s. Δ - оператор Лапласа. Спектральный параметр λ связан с собственной частотой ω формулой

$$\lambda = (1-\sigma^2)\omega^2\rho / E \tag{0.3}$$

где ρ - плотность, E - модуль Юнга, σ - коэффициент Пуассона. Задачи (0.1), (0.2) в предположении, что изменяемость напряженного и деформированного состояния велика, рассмотрены в [2].

Введя в рассмотрение вектор-функцию $f(\alpha,\beta) = (u_1, u_2, u_3)$, можно систему (0.1) записать сокращенно в виде

$$\left(\mu^4 N_0 + L_0\right) f = \lambda f \tag{0.4}$$

Если ввести скалярное произведение по формуле

$$\left(f^{(1)}, f^{(2)}\right) = \int_0^l \int_0^s \left(u_1^{(1)} u_1^{(2)} + u_2^{(1)} u_2^{(2)} + u_3^{(1)} u_3^{(2)}\right) d\alpha\, d\beta \tag{0.5}$$

то, как нетрудно проверить, задача (0.1), (0.2) в соответствующем гильбертовом пространстве порождает самосопряженный положительно определенный оператор. При $\mu \ne 0$ задача (0.1), (0.2) имеет дискретный спектр. Заметим, что оператор $\mu^4 N + L$ является эллиптическим в смысле Дуглиса-Ниренберга [3].

Исходя из вышеуказанных свойств задачи (0.1), (0.2), можно доказать, что приближенные собственные числа задачи (0.1), (0.2), построенные по методу Бубнова-Галёркина, сходятся к соответствующим точным значениям этих чисел [4], с. 273.

Положим в (0.4) $\mu = 0$. Так, возникающая вырожденная (безмоментная) система

$$L_0 f = \lambda f \tag{0.6}$$

с граничными условиями

$$u_2\Big|_{0,l} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \sigma\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma\frac{u_3}{R}\Bigg|_{0,l} = 0, \quad \frac{\partial^j u_i(\alpha,0)}{\partial \beta^j} = \frac{\partial^j u_i(\alpha,s)}{\partial \beta^j} \tag{0.7}$$
$$i = 1,2, \quad j = 0,1$$

порождает самосопряженную (неотрицательно определенную) задачу. Скалярное произведение то же, что и в (0.5). Заметим, что спектр задачи (0.6), (0.7) не является чисто дискретным [1].

Задача (0.1), (0.2) допускает разделение переменных. Подставив

$$u_1 = u(\beta)\cos\frac{k\pi}{l}\alpha, \quad u_2 = v(\beta)\sin\frac{k\pi}{l}\alpha, \quad u_3 = w(\beta)\sin\frac{k\pi}{l}\alpha \tag{0.8}$$

(где k - целое), придем к системе уравнений

$$-\frac{1-\sigma}{2}u''_{\beta\beta}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{k\pi}{l}v'_{\beta}+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 u+\frac{\sigma}{R}\frac{k\pi}{l}w=\lambda u$$

$$-v''_{\beta\beta}+\frac{1+\sigma}{2}\frac{k\pi}{l}u'_{\beta}+\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 v+\left(\frac{w}{R}\right)'_{\beta}=\lambda v \qquad (0.9)$$

$$\mu^4\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}w-\frac{1}{R}v'_{\beta}+\frac{\sigma}{R}\frac{k\pi}{l}u+\frac{w}{R^2}=\lambda w$$

где оператор $\overline{\Delta}=\frac{d^2}{d\beta^2}-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$

Граничные условия (0.2) принимают вид

$$u^{(j)}(0)=u^{(j)}(s),\ v^{(j)}(0)=v^{(j)}(s),\ w^{(r)}(0)=w^{(r)}(s),\ \ j=0{,}1,\ \ r=0{,}1{,}2{,}3 \qquad (0.10)$$

Введя в рассмотрение вектор-функцию $f(\beta)=(u,v,w)$, можно систему (0.9) записать сокращенно в виде

$$\left(\mu^4 n_0+l_0\right)f=\lambda f \qquad (0.11)$$

Если ввести скалярное произведение по формуле

$$\left(f_1,f_2\right)=\int_0^s\left(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2\right)d\beta \qquad (0.12)$$

то, как нетрудно проверить, задача (0.9), (0.10) в соответствующем гильбертовом пространстве порождает самосопряженный положительно определенный оператор. Подставим в (0.9) $\mu=0$. Так, возникающая вырожденная (безмоментная) система

$$l_0 f=\lambda f \qquad (0.13)$$

с граничными условиями

$$u^{(j)}(0)=u^{(j)}(s),\ \ v^{(j)}(0)=v^{(j)}(s),\quad j=0{,}1 \qquad (0.14)$$

порождает самосопряженную (неотрицательно определенную) задачу. Скалярное произведение то же, что и в (0.12). Заметим, что спектр краевой задачи (0.13), (0.14) (k фиксировано) вещественен, неотрицателен и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности с двумя точками сгущения: $\lambda=0$ и $\lambda=+\infty$ [1], с. 78. Ясно, что вне любого $(0,\varepsilon)$ интервала, приближенные собственные числа задачи (0.13), (0.14), построенные по методу Бубнова-Галёркина, сходятся к соответствующим точным значениям этих чисел.

1. Приведение системы к одному уравнению. Систему (0.1) сведем к одному уравнению для u_3 аналогично [5], предполагая, что $R(\beta)$ и $R^{-1}(\beta)$ достаточное число раз дифференцируемые.

Продифференцируем первое уравнение системы (0.1) по α два раза, а затем независимо два раза по β, второе уравнение дифференцируем один раз по α и один раз по β. Используя еще первое уравнение системы (0.1), исключим u_2;

$$\left(\Delta\Delta+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right)u_1=$$

$$=-\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}\left(\frac{u_3}{R}\right)+\sigma\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\left(\frac{u_3}{R}\right)+\frac{2\lambda\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right) \tag{1.1}$$

Аналогичным образом получим уравнение, в котором будет исключено u_1. Для этой цели продифференцируем второе уравнение сначала два раза по α, а затем независимо два раза по β, первое же уравнение продифференцируем один раз по α и один раз по β. Используя еще второе уравнение системы (0.1), исключим u_1:

$$\left(\Delta\Delta+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right)u_2=$$

$$=(2+\sigma)\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\left(\frac{u_3}{R}\right)+\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left(\frac{u_3}{R}\right)+\frac{2\lambda}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right) \tag{1.2}$$

Перепишем третье уравнение системы (0.1) в виде

$$\mu^4 R\Delta\Delta u_3-\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\sigma\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\left(R^{-1}-\lambda R\right)u_3=0 \tag{1.3}$$

Произведем над (1.3) операцию $\Delta\Delta+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}$ и затем подставим туда выражения (1.1) и (1.2).

В результате всех преобразований придем к следующему уравнению восьмого порядка с одним неизвестным u_3:

$$\mu^4\left(\Delta\Delta R\Delta\Delta u_3+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta R\Delta\Delta u_3+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}R\Delta\Delta u_3\right)-$$

$$-\lambda\Delta\Delta R u_3-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2\Delta R u_3+\left(1-\sigma^2\right)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}\left(\frac{u_3}{R}\right)+ \tag{1.4}$$

$$+\lambda\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{u_3}{R}\right)+(3+2\sigma)\lambda\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{u_3}{R}\right)+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\left(R^{-1}-\lambda R\right)u_3=0$$

Подставляя u_3 из (0.8) в (1.4), придем к обыкновенному дифференциальному уравнению восьмого порядка для w

$$\mu^4\left(\bar\Delta\bar\Delta R\bar\Delta\bar\Delta w+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\bar\Delta R\bar\Delta\bar\Delta w+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}R\bar\Delta\bar\Delta w\right)-$$

$$-\lambda\bar\Delta\bar\Delta R w-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2\bar\Delta R w+\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{w}{R}+ \tag{1.5}$$

$$+\lambda\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{w}{R}\right)-(3+2\sigma)\lambda\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{w}{R}+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\left(R^{-1}-\lambda R\right)w=0$$

Таким образом, исследование задачи (0.9), (0.10) привели к исследованию уравнения (1.5) с периодическим граничным условием

$$w^{(r)}(0) = w^{(r)}(s), \quad r = 0,1,2,3,4,5,6,7 \tag{1.6}$$

2. Определение приближенных собственных чисел моментной задачи

1. Общий случай. Исходя из метода Бубнова-Галеркина, приближенное решение задачи (1.5), (1.6) ищем в виде

$$w_n(\beta) = \sum_{m=1}^{n} A_m \sin\frac{2m\pi}{s}\beta \tag{2.1}$$

Коэффициенты A_m определяем из условия, чтобы левая часть уравнения (1.5) после подстановки в нее $w_n(\beta)$ вместо w оказалось ортогональной к функциям $\sin\frac{2\nu\pi}{s}\beta$, $\nu = 1,2,\ldots n$ на отрезке $[0,s]$. Это приводит к системе уравнений:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{\nu m} A_m = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots,n \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered} a_{\nu m} = \left[\mu^4\left(t_{k\nu}^2 - \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda t_{k\nu} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right)t_{km}^2 + \right. \\ \left. +\left(-\frac{2\lambda^3}{1-\sigma} - \lambda t_{k\nu}^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2 t_{k\nu}\right)\right]R_{\nu m} + \left[\frac{2\lambda^2}{1-\sigma} + \right. \\ \left. +(1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \lambda t_{k\nu} - 2(1+\sigma)\lambda\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]K_{\nu m} \\ t_{k\nu} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\nu\pi}{s}\right)^2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} R_{\nu m} = \frac{2}{s}\int_0^s R(\beta)\sin\frac{2\nu\pi}{s}\beta\sin\frac{2m\pi}{s}\beta\, d\beta \\ K_{\nu m} = \frac{2}{s}\int_0^s \frac{1}{R(\beta)}\sin\frac{2\nu\pi}{s}\beta\sin\frac{2m\pi}{s}\beta\, d\beta \end{gathered} \tag{2.4}$$

Чтобы система (2.2) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель обратился в нуль. Отсюда приходим к уравнению для определения приближенных собственных чисел задачи (1.5), (1.6)

$$\left|a_{\nu m}\right|_{\substack{\nu=1\\ m=1}}^{n} = 0 \tag{2.5}$$

В частности, если оболочка такая, что $R_{\nu m}$ и $K_{\nu m}$ при $\nu \neq m$ достаточно малы, т. е.

$$R_{\nu m} \approx 0, \quad K_{\nu m} \approx 0 \quad \text{при} \quad \nu \neq m \tag{2.6}$$

то уравнение (2.5) можно заменить совокупностью уравнений

$$a_{\nu\nu}=0, \quad \nu=1,2,\ldots,n \tag{2.7}$$

Следовательно, для таких оболочек все приближенные собственные числа задачи (1.5), (1.6) определяются из совокупности уравнений

$$\begin{gathered}\frac{2}{1-\sigma}\lambda^3-\left(\frac{2}{1-\sigma}\mu^4 t_{k\nu}^2+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}t_{k\nu}+\frac{2}{1-\sigma}\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\right)\lambda^2+\\+\left(\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\mu^4 t_{k\nu}^3+t_{k\nu}\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}+2(1+\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}+t_{k\nu}^2\right)\lambda-\\-\left(\mu^4 t_{k\nu}^4+\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\right)=0, \quad \nu=1,2,\ldots\end{gathered} \tag{2.8}$$

Заметим, что для замкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными краями в [6] получено частотное уравнение, сходственное с (2.8).

2. Преимущественно изгибные колебания. Подставим в первые два уравнения системы (0.9) $\lambda=0$, которое соответствует случаю пренебрежения тангенциальными силами инерции. Из полученной системы исключим u и v

$$\mu^4\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}R\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}w-\lambda\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}Rw+\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{w}{R}=0 \tag{2.9}$$

Использование метода Бубнова-Галёркина приводит к уравнению вида (2.5), для определения приближенных собственных чисел задачи (2.9), (1.6), где

$$a_{\nu m}=\left(\mu^4 t_{k\nu}^2 t_{km}^2-\lambda t_{k\nu}^2\right)R_{\nu m}+\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 K_{\nu m} \tag{2.10}$$

В частности, если выполняются условия (2.6), то все приближенные собственные числа задачи (2.9), (1.6) определяются формулами

$$\lambda_{k\nu}=\mu^4 t_{k\nu}^2+\frac{1-\sigma^2}{t_{k\nu}^2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}, \quad \nu=1,2,\ldots \tag{2.11}$$

Для цилиндрической оболочки с изломами по образующей частоты изгибных колебаний рассмотрены в работе [7].

Замечание 1. Интересно заметить, что формула (2.11) и аналогичная полуэмпирическая формула для замкнутой круговой цилиндрической оболочки с защемленными торцами по структуре сходственны [8] с. 433.

Замечание 2. Обозначим через $n(k,\lambda)$ число собственных значений меньших λ задачи (2.9), (1.6)

$$n(k,\lambda)=\sum_{\lambda_{k\nu}<\lambda}1 \tag{2.12}$$

Функция (2.12) называется функцией распределения собственных значений краевой задачи (2.9), (1.6).

Так как по формуле (2.11) каждому целому ν соответствует только одно собственное число, то число собственных значений,удовлетворяющие неравенству $\lambda_{k\nu} < \lambda$, равно числу всех целых ν, которые удовлетворяют неравенству

$$\mu^4 t_{k\nu}^2 + \frac{1-\sigma^2}{t_{k\nu}^2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}} < \lambda \tag{2.13}$$

или неравенству

$$\mu^4 t_{k\nu}^4 - \lambda t_{k\nu}^2 + \left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}} < 0 \tag{2.14}$$

Неравенство (2.14) при положительных $t_{k\nu}$ возможно лишь при условии, когда корни $t_{k\nu}^{(1)}$, $t_{k\nu}^{(2)}$ трехчлена левой части неравенства (2.14) вещественны и $t_{k\nu}^{(1)} < t_{k\nu} < t_{k\nu}^{(2)}$. Поскольку $t_{k\nu} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\nu\pi}{s}\right)^2$, то для $n(k,\lambda)$ справедлива оценка

$$n(k,\lambda) = \frac{s}{\pi}\left[\left(t_{k\nu}^{(2)} - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)^{1/2} - \left(t_{k\nu}^{(1)} - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right)^{1/2}\right] \pm 1 \tag{2.15}$$

где

$$\begin{gathered} t_{k\nu}^{(1)} = \frac{1}{\mu^2}\sqrt{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \mu^4 \frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}}} \\ t_{k\nu}^{(2)} = \frac{1}{\mu^2}\sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \mu^4 \frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}}} \end{gathered} \tag{2.16}$$

Интересно сопоставить формулы (2.15) и (25.3) из [1]. Формальное отличие этих формул исходит из разных методов их получения.

3. Преимущественно тангенциальные колебания. Подставим в третье уравнение системы (0.9) $\lambda = 0$, которое соответствует случаю пренебрежения нормальной силой инерции. Из полученной системы исключим u и v.

$$\begin{gathered} \mu^4\left(\overline{\Delta}\,\overline{\Delta} R \overline{\Delta}\,\Delta w + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda \overline{\Delta} R \overline{\Delta}\,\overline{\Delta} w + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} R\,\overline{\Delta}\,\overline{\Delta} w\right) + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma} \times \\ \times \frac{w}{R} + \left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{w}{R} + \lambda \frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{w}{R}\right) - (3+2\sigma)\lambda\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{w}{R} = 0 \end{gathered} \tag{2.17}$$

Использование метода Бубнова-Галёркина приводит к уравнению вида (2.5), для определения приближенных собственных чисел задачи (2.17), (1.6), где

$$a_{\nu m}=\mu^4\left(t_{k\nu}^2-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda t_{k\nu}+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right)t_{km}^2R_{\nu m}+\left[\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}+\right.$$
$$\left.+(1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4-\lambda t_{k\nu}-2(1+\sigma)\lambda\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]K_{\nu m} \tag{2.18}$$

В частности, если выполняются условия (2.6), то все приближенные собственные числа задачи (2.17), (1.6) определяются из совокупности уравнений

$$R_{\nu\nu}^{-1}a_{\nu\nu}=\frac{2}{1-\sigma}\left(\mu^4t_{k\nu}^2+\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\right)\lambda^2-\left[\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\mu^4t_{k\nu}^3+\right.$$
$$\left.+t_{k\nu}\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}+2(1+\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\right]\lambda+\mu^4t_{k\nu}^4+ \tag{2.19}$$
$$+(1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}=0,\quad \nu=1,2,\ldots$$

3. Определение приближенных собственных чисел безмоментной задачи

1. Общий случай. Исключаем из системы (0.6) u и v

$$\lambda\overline{\Delta}\,\overline{\Delta}Rw-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2\overline{\Delta}Rw+(3+2\sigma)\lambda\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{w}{R}-$$
$$-(1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{w}{R}-\lambda\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{w}{R}\right)-\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}(R^{-1}-\lambda R)w=0 \tag{3.1}$$

а граничные условия (0.14) заменим условиями вида

$$w^{(r)}(0)=w^{(r)}(s),\quad r=0,1,2,3 \tag{3.2}$$

Определение приближенных собственных чисел задачи (3.1), (3.2) при $\lambda>\varepsilon>0$ приводит к уравнению вида (2.5), где

$$a_{\nu m}=\left(\frac{2\lambda^3}{1-\sigma}-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}t_{k\nu}\lambda^2+t_{k\nu}^2\lambda\right)R_{\nu m}+\left[-\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}+\right.$$
$$\left.+t_{k\nu}\lambda+2(1+\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\lambda-(1-\sigma^2)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\right]K_{\nu m} \tag{3.3}$$

В частности, если оболочка удовлетворяет условию (2.6), то все приближенные собственные числа задачи (3.1), (3.2) определяются из совокупности уравнений

$$\frac{2}{1-\sigma}\lambda^3-\left(\frac{3-\sigma}{1-\sigma}t_{k\nu}+\frac{2}{1-\sigma}\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\right)\lambda^2+\left(t_{k\nu}^2+t_{k\nu}\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}+\right.$$
$$\left.+2(1+\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\right)\lambda-\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}=0,\quad \nu=1,2,\ldots \tag{3.4}$$

2. Преимущественно изгибные колебания. Подставим в первые два уравнения системы (0.13) значение $\lambda=0$, которое соответствует случаю пренебрежения тангенциальными силами инерции. Из полученной системы исключим u и v

$$\lambda\bar{\Delta}\bar{\Delta}Rw-\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{w}{R}=0 \tag{3.5}$$

Определение приближенных собственных чисел задачи (3.5), (3.2) при $\lambda>\varepsilon>0$ приводит к уравнению вида (2.5), где

$$a_{\nu m}=\lambda t_{k\nu}^2R_{\nu m}-\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4K_{\nu m} \tag{3.6}$$

При условии (2.6) все приближенные собственные числа задачи (3.5), (3.2) определяются формулами

$$\lambda_{k\nu}=\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}\Big/t_{k\nu}^2,\quad \nu=1,2,\ldots \tag{3.7}$$

3. Преимущественно тангенциальные колебания. Подставим в третье уравнение (0.13) $\lambda=0$, которое соответствует случаю пренебрежения нормальной силой инерции. Из полученной системы исключим u и v

$$\lambda\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{w}{R}\right)+\left[\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4-(3+2\sigma)\lambda\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right]\frac{w}{R}=0 \tag{3.8}$$

Легко проверить, что собственные числа задачи (3.8), (3.2) (здесь в (3.2) достаточно сохранить $r=0,1$) определяются из совокупности уравнений

$$\frac{2\lambda^2}{1-\sigma}-\left[\left(\frac{2\nu\pi}{s}\right)^2+(3+2\sigma)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right]\lambda+\left(1-\sigma^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4=0,\quad \nu=1,2,\ldots \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что при преимущественно тангенциальных колебаниях, собственные частоты безмоментной задачи не зависят от геометрии оболочек.

Пример. Пусть направляющей кривой цилиндрической оболочки служит улитка

$$\rho=R_0\left(1+\varepsilon\cos\frac{2\pi}{s}\beta\right),\quad 0\le\beta\le s \tag{3.10}$$

где $\varepsilon>0$ и достаточно мало. С точностью до $0\left(\varepsilon^3\right)$ имеем

$$R = AR_0\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\cos^2\frac{2\pi}{s}\beta\right); \quad \frac{1}{R}=\frac{1}{AR_0}\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon^2\cos^2\frac{2\pi}{s}\beta\right)$$

$$R_{\nu m} = K_{\nu m} = 0\left(\varepsilon^2\right) \text{ при } \nu\neq m; \quad \frac{K_{11}}{R_{11}}=\frac{1}{R_0^{\;2}}\left(1+\frac{5}{8}\varepsilon^2\right)$$

$$\frac{K_{\nu\nu}}{R_{\nu\nu}}=\frac{1}{R_0^{\;2}}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right), \quad \nu=2,3,\ldots; \quad A=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

Значит, для таких оболочек применимы все выведенные частотные уравнения и аналитические выражения для приближенных собственных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек.-М.: Наука, 1974, 156 с.
2. *Бергман Р. М.* Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек.-ПММ, 1973, т. 37, вып. 6, с.1125-1134.
3. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек.- М.: Наука, 1979, 383 с.
4. *Красносельский М. А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений.- М.: Наука, 1969.455 с.
5. *Слепов Б. Н.* Устойчивость оболочек, имеющих форму эллиптического цилиндра.-Л.: Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А.И. Крылова, 1948. 39 с.
6. *Слабкий Л. И.* Собственные колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными краями.-МТТ, 1994, №2, с. 82-86.
7. *Мовсисян Л. А.* Колебание цилиндрической оболочки произвольного сечения.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, №5-6. с. 51-56.
8. Справочник. "Прочность. Устойчивость. Колебания", т. 3. Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Паненко. - М.: Изд-во "Машиностроение", 1968. 568 с.

Армпединститут им. Х.Абовяна
Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
28. 09. 1994