ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 1, 1996 Механика

К ВОПРОСУ ДОЖДЕВОЙ ЭРОЗИИ ПОЧВ

Сагомонян А. Я.

Ա.Հ.Սողոմոնյան

Բնահողերի անձրևային ողողման հարցի մասին

Փորձ է կատարվում մաթեմատիկորեն մոդելավորել անձրևաջրերով բնահողի ողողումը, որպես ծակոտկեն թեքով ջրահագեցած բնահողի և ջրի շերտերի շարժում

A.Ya.Sagomonian

On the problem of rain erosion of grounds

Предлагается математическая модель о дождевой эрозии почв, как движение слоев воды и суспензии по пористому склону. Приведены уравнения фильтрации и вязких жидкостей для двухфазной среды.

Исследование процессов эрозии является одной из задач борьбы с ней. Результаты полевых и лабораторных исследований позволяют ставить вопрос о создании математических моделей описания процесов эрозии почв. Ниже этот вопрос рассматривается в случае водной, а конкретнее, дождевой эрозии на склонах возвышенностей Земли. По достижении капель дождя поверхности склона, жидкость капель фильтруется в поры почвы, образуя водонасыщенную среду. Под действием силы тяжести и возникающих сдвиговых сил на поверхности склона образуется подвижный слой водонасыщенной почвы, стекающей к пониженной поверхности Земли. Различные виды почв после водонасыщения можно рассматривать как суспензию с различными физико-механическими свойствами. В настоящей работе исследование суспензий проводится на основе двух модельных сред. Водонасыщенная почва-супензия, состоящая из потока воды, содержащей твердые частицы определенной концентрации (например, водонасыщенная песчанная почва), рассматривается как ньютоновская жидкость, вязкость которой зависит от этой концентрации [1]. Из опытов известно, что суспензия типа глинистых растворов при своем движении, наряду с вязкостью проявляет также пластические свойства [2]. В таких средах существует предельное напряжение сдвига (предел текучести), при превышении которого начинается течение по закону вязкой жидкости. При сдвиге ниже предела текучести суспензия рассматривается как твердое тело. Коэффициент вязкости и предел текучести зависят от пористости почвы и скорости сдвига.

Основываясь на этих свойствах, здесь суспензия - глинистый раствор - моделируется линейной вязко-пластической средой [3,4]. Чаще не вся жидкость капель дождя, достигших поверхности склона, фильтрируется в почву. Тогда, над подвижным слоем водонасыщенной почвы возникает слой ньютоновской жидкости, так же стекающей к подножию возвышенности. На процесс водной эрозии почвы на склонах возвышенностей, характерный малыми скоростями частиц среды (сантиметры в секунду), может оказать влияние вращения Земли. Исследование этого вопроса удобно проводить в осях координат, жестко связанных с Землей. В этих осях уравнения движения содержат дополнительно силы инерции: центробежную силу, которая действует одинаково на подвижные и покоящиеся частицы и силу Кориолиса на единицу массы $-2\overline{\omega}_0 \times \overline{u}$ ($\overline{\omega}_0$- угловая скорость Земли, $\overline{u}$- относительная скорость частиц). По своему влиянию центробежная сила эквивалентна малому изменению ускорения силы тяжести и обычно отдельно не рассматривается. Наиболее важную роль в относительном движении играет кориолисова сила. Пусть U - характерная величина относительной скорости частиц, L- характерный линейный размер, на протяжении которого относительная скорость частиц изменяется на порядок. Тогда, отношение величин $(\overline{u}\nabla)\overline{u}$ к $2\overline{\omega}_0 \times \overline{u}$ в уравнении относительно движения среды имеет порядок $R_0 = \dfrac{U}{L\omega_0}$. Это отношение называется числом Россби [5]. При $R_0 >> 1$ можно пренебречь влиянием силы Кориолиса. При $R_0 << 1$, определяющим фактором будет действие силы Кориолиса. Если число Россби порядка единицы, то эффект от величин $\rho(\overline{u}\nabla)\overline{u}$ и $\rho 2\overline{\omega}_0 \times \overline{u}$ будут одного порядка. Наблюдения показывают, что движение водонасыщенной почвы на поверхности склона может иметь волновой характер типа волн "на мелкой воде" [5,6]. Решение системы уравнений, описывающих движение водонасыщенной почвы в слое на склонах возвышенностей Земли на моделях вязкой жидкости и вязко-пластической среды, с учетом силы тяжести, вращения Земли, образования волн, требует привлечения современных вычислительных машин. С другой стороны, необходима разработка методов решения задач проблемы при упрощающих условиях, когда можно пренебречь факторами, мало влияющими на процесс движения. Во многих случаях такой подход позволяет получить простые решения, вполне пригодные для практического использования. Например, при исследовании многих задач принято поверхность Земли считать горизонтальной плоскостью, а ускорение силы тяжести - направленной перпендикулярно к этой плоскости [5,7]. Основанием такого приближения является малая кривизна поверхности Земли и сравнительная ограниченность линейных размеров области движения. Сила Кориолиса влияет только на форму траектории в относительном движении частиц среды и в ряде случаев ею тоже можно пренебречь. В рассматриваемых здесь задачах приняты эти приближения. Кроме того, не учитывается образование волн и делаются другие допущения, упрощающие исследование.

2. В дальнейшем, поверхность склона возвышенности считается плоскостью, наклонную к горизонту под углом α (фиг. 1). Влиянием границ поверхности склона пренебрегается, так что эта поверхность является неограниченной плоскостью. Скорость капель дождя $\overline{V}_0$ и ускорение силы тяжести $\overline{g}$ направлены одинаково, перпендикулярно горизонту (фиг. 1). Объмная концентрация ω жидкости капель в дождевом пространстве над поверхностью склона распределена равномерно. Подвижная часть водонасыщенной почвы - слой суспензии, примыкающей к поверхности склона, является однородной несжимаемой средой. Скорость частиц суспензии вдоль плоскости склона считается однонаправленной. В силу сделанных предположений это движение будет плоским. Возьмем начало координат x, y на поверхности склона, ось x на этой поверхности направим по скорости суспензии вдоль склона, ось y - вдоль внешней нормали $\overline{n}$ плоскости склона (фиг. 1). Как указано выше, над пористой поверхностью склона образуется слой вязкой жидкости. Составляющие скорости частиц этой жидкости в направлении оси x считаются однонаправленными, по направлению, совпадающему с однонаправленным движением суспензии. Другая составляющая скорости этого плоского движения направлена в отрицательную сторону оси y. Эта скорость равна действительной скорости w_0 фильтрации жидкости на пористой поверхности склона. Фильтрация происходит в отрицательном направлении оси y. В условиях предполагаемого ламинарного движения жидкости в порах почвы , фильтрация определяется законом Дарси [8]

фиг. 1

$$\overline{w} = -\frac{\lambda\rho}{\eta}\nabla\left(\frac{p}{\rho} + yg\cos\alpha\right), \quad w = mw_0 \tag{1}$$

В равенствах (1) скорость фильтрации $\overline{w}$ определяется как расход жидкости на единицу площади поперечного сечения почвы. Величина λ, имеющая размерность площади, называется коэффициентом проницаемости, η - коэффициент вязкости, p, ρ - давление и плотность жидкости в порах. Второе равенство формулы (1) устанавливает связь между скоростью фильтрации w и действительной скоростью w_0 жидкости в порах. В этом равенстве m обозначает объемную концентрацию пор почвы - пористость. Толщина области водонасыщенной почвы возвышенности l , при сделанных выше ограничениях определяется интегралом

$$l = \int_0^t |\overline{w}|\,dt \tag{2}$$

При постоянных значениях m, η, λ , учитывая несжимаемость сред и одномерность фильтрации из формулы (1), получим

$$w = -\left(\frac{\lambda\rho g}{\eta}\cos\alpha + \frac{\lambda}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

Если пренебрегается изменением давления и фильтрация происходит только под действием силы тяжести, то согласно (1) и (3), получим

$$w = -\frac{\lambda\rho g}{\eta}\cos\alpha, \quad w = mw_0 \tag{4}$$

Таким образом, пористая поверхность склона является границей между слоем жидкости и слоем суспензии. Предполагается,что на этой границе заданы скорости w и w_0 по закону Дарси. Другой границей слоя жидкости является поверхность раздела его с областью дождя. В силу принятых условий, эту поверхность можно считать плоскостью, параллельной плоскости склона. Расстояние между границами слоя жидкости по оси y - толщину слоя жидкости, обозначим через $H(t)$ (фиг.1) .Над граничной поверхностью $y = H$ скорость жидких капель $\overline{V_0}$ и концентрация ω , заданные постоянные величины, равномерно распределенные в дождевом пространстве. Если ds - элемент этой поверхности, то в единицу времени через ds в слой втечет количество несжимаемой жидкости dM_1:

$$dM_1 = \rho\omega ds\left(\dot{H} + V_0\cos\alpha\right), \qquad \dot{H} = \frac{dH}{dt}$$

где $\dot{H}$ - скорость граничной поверхности. За это же время через элемент ds противоположной границы слоя (поверхности склона), из жидкого слоя в почву (суспензию), вытечет жидкость в количестве dM_2:

$$dM_2 = \rho m w_0 ds$$

По закону сохранения массы, при сделанных выше предположениях разность $dM_1 - dM_2$ равна секундному изменению массы жидкости в объеме слоя

$$ds \cdot H \cdot 1: \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho H ds) = \rho\dot{H}ds$$

Это равенство определяет скорость $\dot{H}$ границы

$$\dot{H} = \frac{\omega V_0\cos\alpha - m w_0}{1-\omega} = \frac{\omega V_0\cos\alpha - w}{1-\omega} \tag{5}$$

При прохождении жидкости капель через поверхность $y = H(t)$, концентрация и скорость жидкости терпят разрыв. В общей постановке давление также может терпеть разрыв. В рассматриваемой задаче плоской одномерной фильтрации несжимаемой жидкости, нормальная составляющая скорости жидкости за поверхностью разрыва равна w_0 и направлена вдоль отрицательной оси y. Пренебрегая изменением внутренней энергии несжимаемой жидкости, условия на поверхности разрыва $y = H$, выражающие основные законы механики, запишутся в виде равенств

$$\omega\rho\left(\dot{H} + V_{0n}\right) = \rho\left(\dot{H} + w_0\right), \quad \rho\omega\left(\dot{H} + V_{0n}\right)\left(V_{0n} - w_0\right) = p - p_a \tag{6}$$

$$\omega\rho\left(\dot{H} + V_{0n}\right)\left(\frac{w_0^2 - V_{0n}^2}{2}\right) = -p w_0 + \omega p_a V_{0n}, \quad v_\tau = V_0\sin\alpha, \quad V_{0n} = -V_0\cos\alpha$$

где p - давление, v_τ - касательная составляющая скорости частиц жидкости непосредственно за поверхностью разрыва. Скорость v_τ направлена параллельно оси x. В дальнейшем предполагается, что давление не терпит разрыва ($p = p_a$, p_a - давление в дождевом пространстве и в порах почвы до фильтрации жидкости). Массой воздуха пренебрегается. Итак, одно из границ слоя подвижной суспензии является поверхность склона (ось x). Вторая граница, проходящая внутри возвышенности, является поверхностью раздела между слоем подвижной суспензии и неподвижной почвой. В силу условий задачи эта граница будет плоскостью, параллельной поверхности склона. Пусть $h(t)$ - толщина слоя суспензии, тогда, положение второй границы определится уравнением $y = -h(t)$. Плотность однородной несжимаемой суспензии обозначим через ρ_0:

$$\rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \tag{7}$$

где ρ_1 - плотность материала почвы. Символом $v(y,z)$ обозначим скорость однонаправленного движения частиц в слое несжимаемой жидкости вдоль оси x. Скорость однонаправленного вдоль оси x частиц в слое суспензии обозначим через $u(y,t)$. По постановке задач составляющие скоростей по оси y считаются постояннными. Действующей силой в этих задачах является сила тяжести. Поэтому в уравнениях движения в обоих слоях силы инерции в направлении y не возникают:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho_0 g \cos\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

С учетом этих равенств и однонаправленности скоростей частиц сред, уравнения движения в слое жидкости и в слое суспензии, в напряжениях, соответственно, представляются в виде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho g \sin\alpha + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \tag{8}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 g \sin\alpha + \frac{\partial \tau_{yx}^0}{\partial y} \tag{9}$$

где τ_{yx}, τ_{yx}^0 - напряжения сдвига в слое жидкости и в слое суспензии.

3. Пусть суспензия представляет собой поток жидкости с твердыми, несвязанными частицами определенной концентрации. Будем рассматривать такую суспензию как ньютоновскую несжимаемую жидкость с коэффициентом вязкости μ. Тогда в уравнении (9) напряжение сдвига представляется равенством

$$\tau_{yx}^0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

Коэффициент μ определяется из опыта [9]. При малых объемных концентрациях вещества почвы z, для этого коэффициента, А. Эйнштейном получена формула [2]

$$\mu = \eta(1 + kz)$$

где η- коэффициент вязкости жидкости без примесей. Для сферических частиц почвы множитель $k=2{,}5$.

В настоящем исследовании коэффициенты η и μ считаются постоянными известными величинами, и уравнения (8) и (9) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-a+\frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t},\quad a=\frac{g\sin\alpha}{\nu},\ \nu=\frac{\eta}{\rho} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b+\frac{1}{\nu_0}\frac{\partial u}{\partial t},\quad b=\frac{g\sin\alpha}{\nu_0},\ \ \nu_0=\frac{\eta}{\rho_0} \tag{12}$$

Установим граничные условия этих уравнений. На границе между слоями жидкости и суспензии, то есть на поверхности склона должны выполняться условия

$$y=0,\ \ u=U,\ \ v=V,\ U=V,\ \ \mu\frac{\partial u}{\partial y}=\eta\frac{\partial v}{\partial y} \tag{13}$$

На границе между областью дождя и слоем жидкости давление равно p_a, а напряжение сдвига предполагается равным нулю, скорость частиц определяется последним равенством формулы (6):

$$y=H(t),\ \ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \ v=V_0\sin\alpha,\ \ p=p_a \tag{14}$$

На границе слоя суспензии $y=-h(t)$ должно выполняться условие

$$y=-h(t),\ \ w(-h,t)=0 \tag{15}$$

Уравнения (11) и (12) известны как уравнения теплопроводности. Математические методы решений этих уравнений хорошо разработаны [10]. Здесь эти уравнения решаются эффективным методом последовательных приближений, изложенным в работах [11, 12]. Для уравнения (11) за первое приближение возьмем решение v_1 следующего уравнения с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0;\ \ y=0,\ v=V=U;\ \ y=H,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0;\ \ v_1=U(t) \tag{16}$$

Решение v_1 подставим в правую часть уравнения (1) и дважды проинтегрируем по y, получим

$$v=\left(\frac{\dot U}{\nu}-a\right)\frac{y^2}{2}+c_1y+c_2,\ \ \dot U=\frac{dU}{dt} \tag{17}$$

Ограничимся вторым приближением v_2, которое равно сумме v_1 и решения (17). Постоянные c_1 и c_2 во втором приближении v_2 определяются из тех же граничных условий (16).

В результате придем к выражению

$$v = v_2 = U(t) - \left(\frac{\dot U}{\nu} - a\right)\frac{2Hy - y^2}{2} \quad (18)$$

Второе равенство в условиях (14) приводит к уравнению

$$y = H, \qquad U - \frac{H^2}{2\nu}\dot U = V_0 \sin\alpha - \frac{a}{2}H^2 \quad (19)$$

которое решается при условиях $t = 0, U = V_0 \sin\alpha; H(t)$ определяется из (5), причем $H(0) = 0$.Последнее равенство в условиях (13) теперь запишется так:

$$y = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\eta}{\mu}\left(\frac{\dot U}{\nu} - a\right)H = \varepsilon(t) \quad (20)$$

Задача свелась к решению уравнения (12) при условиях (20) и (15). За первое приближение решения w_1 берем решение следующего уравнения с условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \;\; y = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon; \;\; y = -h, \; u = 0; \; u_1 = \varepsilon(h + y) \quad (21)$$

где ε определено по формуле (20). Подставим u_1 в правую часть уравнения (12) и проинтегрируем дважды по y, в результате будем иметь:

$$u = \frac{\dot\varepsilon y^3}{6\nu_0} + \frac{\dot\varepsilon h + \varepsilon\dot h - \nu_0 b}{2\nu_0}y^2 + c_1 y + c_2 \quad (22)$$

точка над символом означает производную по времени. Ограничимся вторым приближением u_2, которое равно сумме первого приближения u_1 и решения (22). Постоянные c_1, c_2 во втором приближении также определяются условиями в формуле (21). В результате придем к следующему решению во втором приближении

$$u = u_2 = \varepsilon(h + y) + \frac{\dot\varepsilon}{6\nu_0}\left(h^3 + y^3\right) - \frac{\dot\varepsilon h + \varepsilon\dot h - \nu_0 b}{2\nu_0}\left(h^2 - y^2\right) \quad (23)$$

Напишем это решение для $y = 0$ и присоединим к полученному соотношению уравнение (19):

$$U = \varepsilon h + \frac{\dot\varepsilon}{6\nu_0}h^3 - \frac{\dot\varepsilon h + \varepsilon\dot h - \nu_0 b}{2\nu_0}h^2, \;\; \varepsilon = -\frac{\eta}{\mu}\left(\frac{\dot U}{\nu} - a\right)H \quad (24)$$

$$U = \frac{H^2}{2\nu}\dot U - \frac{a}{2}H^2 + V_0 \sin\alpha, \quad \dot H = \frac{\omega V_0 \cos\alpha - w}{1 - \omega}, \quad w = \frac{\rho\lambda g}{\mu}$$

В настоящей работе все коэффициенты предполагаются постоянными. Поэтому скорость изменения толщины жидкого слоя $\dot H = D$ постоянна:

$H = Dt$. Система уравнений (24) определяет скорость суспензии $V = U$ на границе склона $(y = 0)$ и толщину слоя суспензии $h(t)$ при условии $t = 0$, $h = 0$. Секундный расход через поперечное сечение слоя суспензии определяется интегралом

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0 \left(\frac{\varepsilon h^2}{2} + \frac{\dot{\varepsilon} h^4}{8\nu_0} - \frac{\dot{\varepsilon} h + \varepsilon \dot{h} - \nu_0 b}{3\nu_0} h^3 \right) \quad (25)$$

Практический интерес предсталяют решения уравнений (11) и (12) в квазистатическом приближении, когда в этих уравнениях пренебрегаются ускорениями частиц среды. Тогда уравнения, соответственно, запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b \quad (26)$$

Уравнения (26) решаются при прежних граничных условиях. Решение первого уравнения для слоя жидкости представляется в виде:

$$v = U + a\left(Hy - \frac{y^2}{2} \right), \quad U = \frac{2V_0 \sin\alpha - aH^2}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a(H - y) \quad (27)$$

Согласно граничному условию (13) скорость частиц суспензии и ее производная по y, на поверхности склона принимают значения

$$y = 0, \quad u = U = \frac{2V_0 \sin\alpha - aH^2}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{\mu} aH \quad (28)$$

Решение второго уравнения (26), определяющее скорость частиц суспензии, дается формулой

$$u = b\frac{h^2 - y^2}{2} + \varepsilon(h + y), \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\mu} aH, \quad H = Dt, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -by + \varepsilon \quad (29)$$

На поверхности склона скорость w равна скорости U, определенной по формуле (28):

$$y = 0, \quad bh^2 + 2\varepsilon h = 2U, \quad U = \frac{2V_0 \sin\alpha - aH^2}{2}$$

Эти соотношения определяют толщину слоя суспензии

$$h = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2Ub}}{b}, \quad U = \frac{2V_0 \sin\alpha - aH^2}{2} \quad (30)$$

В полученных соотношениях ε и H определены равенствами в (29). Расход суспензии через поперечное сечение слоя здесь определяется по формуле

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0 \left(\frac{b}{3} h^3 + \varepsilon \frac{h^2}{2} \right) \quad (31)$$

4. Пусть теперь моделью суспензии является несжимаемая линейн-вязкопластическая среда. Тогда в уравнении (9), описывающем однонаправленное движение суспензии в слое, напряжение сдвига определяется равенством

$$\tau_{yx}^0 = \pm k + \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \left|\tau_{yx}^0 \mp k\right| \geq \frac{\partial u}{\partial y}$$

В рассматриваемой задаче $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$. Поэтому перед величиной k- пределом текучести среды, берем положительный знак

$$\tau_{yx}^0 = k + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{32}$$

Эксперименты показывают существенную зависимость коэффициентов k и μ от пористости почвы [9]. Кроме того, предел текучести зависит от связности почвы, а коэффициент вязкости - от скорости сдвига [2]. В естественных условиях пористость и водонасыщенность почвы убывает с глубиной (вдоль отрицательной оси y), а значения k и μ увеличиваются [9]. Установление зависимостей коэффициентов k и μ от пористости водонасыщенной почвы-суспензии, а пористость от глубины (оси y) является неотложной задачей. При уменьшении концентрации вещества почвы в суспензии (росте пористости) коэффициент μ приближается к конечному пределу - коэффициенту η жидкости, а предел текучести k стремится к нулю. Минимальные значения k и μ достигаются на поверхности склона. Здесь, для определенности, без должного обоснования предполагается, что коэффициент вязкости постоянен, а предел текучести - известная функция y:

$$k = k(y), \quad \mu = \text{const}, \quad y \leq 0$$

При такой зависимости, согласно (32), уравнение (9) примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 g \sin\alpha + k'(y) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \mu = \text{const}$$

Принимая линейный закон зависимости k от y и на поверхности склона $(y = 0)$, предел текучести равен нулю, получим

$$k = -k_0 y, \quad \mu = \text{const}, \quad y \leq 0 \tag{33}$$

коэффициенты k_0 и μ считаются известными величинами. Теперь уравнению (9) и формуле (32) можно придать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -c_0 + \frac{1}{\nu_0} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad c_0 = \frac{g}{\nu_0} \sin\alpha - \frac{k_0}{\mu}$$

$$\tau_{yx}^0 = -k_0 y + \mu \frac{\partial u}{\partial y}; \quad y \leq 0; \quad y = 0, \quad k = 0 \tag{34}$$

При наличии, над слоем суспензии, ньютоновской жидкости сохраняются условия (13)

$$y=0,\quad \mu\frac{\partial u}{\partial y}=\eta\frac{\partial v}{\partial y},\quad v(0,t)=u(0,t)=U \tag{35}$$

На другой границе суспензии $y=-h$ выполняется условие (15). За первое приближение решения уравнения (34) возьмем решение u_1 следующего уравнения с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\quad y=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon;\quad y=-h,\quad u=0;\quad u_1=\varepsilon(h+y) \tag{36}$$

где ε определен формулой (20). Подставим u_1 в правую часть уравнения (34). После двойного интегрирования по y получим

$$u=\frac{\dot\varepsilon y^3}{6\nu_0}+\frac{\dot\varepsilon h+\dot h\varepsilon-\nu_0 c_0}{2\nu_0}y^2+c_1 y+c_2 \tag{37}$$

Ограничимся вторым приближением u_2, которое равно сумме u_1 и решения (37). Постоянные c_1, c_2 во втором приближении определим при граничных условиях (36). В результате, для второго приближения решения уравнения (34) будем иметь:

$$u=u_2=\varepsilon(h+y)+\frac{\dot\varepsilon}{6\nu_0}\left(h^3+y^3\right)-\frac{\dot\varepsilon h+\varepsilon\dot h-\nu_0 c_0}{2\nu_0}\left(h^2-y^2\right) \tag{38}$$

На границе раздела слоев жидкости и суспензии $(y=0)$ должны выполняться условия

$$U=\varepsilon h+\frac{\dot\varepsilon}{6\nu_0}h^3-\frac{\dot\varepsilon h+\varepsilon\dot h-\nu_0 c_0}{2\nu_0}h^2$$

$$U-\frac{H^2}{2\nu}\dot U=V_0\sin\alpha=\frac{aH^2}{2},\quad \varepsilon=-\frac{\eta}{\mu}\left(\frac{\dot U}{\nu}-a\right)H \tag{39}$$

Уравнения (39) определяют величины U и h при начальных условиях

$$t=0,\quad U=V_0\sin\alpha,\quad h=0$$

Расход суспензии через поперечное сечение слоя равен:

$$Q=\rho_0\left[\frac{\varepsilon}{2}h^2+\frac{2}{3\nu_0}\left(\dot\varepsilon h+\varepsilon\dot h-\nu_0 c_0\right)h^3+\frac{3}{24}\frac{\dot\varepsilon}{\nu_0}h^4\right] \tag{40}$$

Таким образом, расход зависит не только от толщины слоя h, но и от скорости изменения этой толщины. Если в уравнении (34) пренебречь ускорением, то получим уравнение в квазистатическом приближении. Решение аналогичного уравнения движения в слое жидкости приведено в формулах (27) и (28). В квазистатическом приближении, при установленных выше граничных условиях, скорость частиц в слое суспензии определяется формулой

$$u = c_0 \frac{h^2 - y^2}{2} + \varepsilon(h + y), \quad \varepsilon = \frac{\eta}{\mu} aH \tag{41}$$

На границе склона $(y = 0)$

$$u = U = c_0 \frac{h^2}{2} + \varepsilon h, \quad U = \frac{1}{2}\left(2V_0 \sin\alpha - aH^2\right)$$

Из этих соотношений определяется толщина слоя суспензии

$$h = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2Uc_0}}{c_0}; \qquad y = -h, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = c_0 h + \varepsilon \tag{42}$$

Расход среды через поперечное сечение слоя суспензии определяется интегралом

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0 \left(\frac{c_0 h^3}{3} + \varepsilon \frac{h^2}{2} \right) \tag{43}$$

В ряде работ [13,14] принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы линейно зависит от давления, с коэффициентом пропорциональности K. В рассматриваемой задаче это условие запишется так:

$$w_0 = -K\rho g \cos\alpha H(t) \tag{44}$$

Тогда уравнение (5) заменится следующим:

$$\dot{H} = \frac{\omega V_0 \cos\alpha - mK\rho g \cos\alpha H}{1 - \omega} \tag{45}$$

Интегрируя это уравнение при $t = 0$, $H = 0$, получим

$$B - H = Be^{-At}, \quad A = \frac{1}{1-\omega} \frac{\cos\alpha}{mK\rho g}, \quad B = \frac{\omega V_0}{mK\rho g} \tag{46}$$

Для сравнения порядка величин, в системе единиц килограмм-сила, метр, секунда, приведем значения предела текучести и коэффициента вязкости глинистой суспензии (концентрация глины по весу 62,2% [9]) и металла в вязко-пластическом состоянии (сталь 6 [3]); суспензия: $k = 5{,}74$, $\mu = 1{,}1$; металл: $k = 4 \cdot 10^7$, $\mu = 4 \cdot 10^3$.

Отметим, что в этих же единицах измерения, коэффициент вязкости воды определяется из равенства: $\eta \cdot 10^6 = 103$, при 20^0C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реология суспензий (сб.статей), "Мир", 1975.
2. *Ричардсон Э.* Динамика реальных жидкостей.- М., Мир, 1965.
3. *Ильюшин А.А.* Основные уравнения вязко-пластического течения.- Уч. за-

писки МГУ, вып.39, механика, изд. МГУ, 1940.
4. *Фрейзенталь Л., Гейрингер Х.* Математическая теория неупругой среды. - М.: Физматгиз, 1962.
5. *Бэтчелор Дж.* Динамика реальных жидкостей. - М.: Мир,1973.
6. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. - М.: Мир, 1981.
7. *Прандтль Л.* Гидроаэродинамика. - М.: ИЛ, 1951.
8. *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. - М.: Гостехиздат, 1947.
9. *Воларович М.П.* Применение методов исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии. - Труды ин-та прикладной минералогии. 1934,вып.66.
10. *Карлслоу Г., Егерь Д.* Теплопроводность твердых тел. - М.: Физматгиз, 1964.
11. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. - ПММ, 1939, т.XIII, вып. 3, с. 251-266.
12. *Кочетков А.М.* Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязко-пластической среды. - ПММ, 1950, т. XIV, вып.4, с. 433-436.
13. *Слезкин Н.А.* О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. - ВМУ, матем, механ.,1957, №5, с.3-5.
14. *Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е.* Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1963, т. XVI, № 5,с. 83-90.

МГУ

Поступила в редакцию
12.07.1994