ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 1, 1996 Механика

К ВОПРОСУ ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.

Ա.Գ.Բագդոև, Լ.Ա.Մովսիսյան

Ջերմաառաձգական միջավայրում հարվածային ալիքների հարցի մասին

Ոչ գծային առաձգական ձողի և գլանային խոռոչով միջավայրի համար դիտարկվում են միաչափ հարվածային ալիքների տարածման խնդիրները ջերմության առկայությամբ, երբ դեֆորմացիաներն առաջացնում են ջերմություն:

Գծային դրվածքի դեպքում ցույց է տրվում, որ առաձգական ալիքի ճակատում եզրային ջերմության ազդեցությունը կարելի է արհամարհել:

Բերված են ոչ գծային խնդիրների լուծումները հարվածային ալիքների վրա:

A.G.Bagdoev, L.A.Movsisian

About Problem of Shock Waves in the Thermoelastic Media

Рассматриваются две одномерные задачи распространения ударных волн термосвязанной нелинейно-упругой среде - плоское деформированное состояние. В [1] подобные задачи изучались для вязкоупругой среды, а в [2] - те же задачи при наличии магнитного поля. Роль диссипации в настоящем исследовании играет связанная теплопроводность.

1. Пусть имеется полубесконечное пространство, на границе которого заданы скорость перемещения и температура

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(t)$$
$$T(x,t) = T_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{1.1}$$

Определяющий закон возьмем в виде [3] с добавлением температурных членов. В случае плоского деформированного состояния $(\zeta_3 = 0)$ в квадратичном приближении он имеет вид [3]

$$\sigma_1 = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 - A_3 T + A_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$$
$$\sigma_2 = A_2\varepsilon_1 + A_1\varepsilon_1 - A_3 T + A_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \tag{1.2}$$

где

$$A_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$A_3 = \frac{E\alpha}{1-2\nu}, \quad A_4 = \frac{E\chi_1}{9(1-2\nu)}.$$

В настоящем пункте $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Уравнения движения среды и теплопроводности примут вид

$$\begin{aligned} &A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial T}{\partial x} + 2A_4 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \end{aligned} \tag{1.3}$$

в отсутствии теплоисточников.

Начальные условия берем нулевыми. Прежде чем приступать к решению нелинейной задачи, сначала рассмотрим ту же задачу в линейной постановке для получения выводов, которые будут использованы для основной задачи.

Произведя преобразование Лапласа по t (с учетом условий на бесконечности), для изображений получаем

$$\bar{u} = c_1 \exp(-k_1 x) + c_2 \exp(-k_2 x), \quad T = d_1 \exp(-k_1 x) + d_2 \exp(-k_2 x) \tag{1.4}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &k_1^{\,2} = \frac{p^2}{a^2}\left(1 - \frac{A_3}{A_1}\chi\eta\right), \quad k_2^{\,2} = \frac{p}{\chi}\left(1 + \frac{A_3}{A_1}\chi\eta\right) \\ &a^2 = \frac{A_1}{\rho}, \quad A_1 c_j \left(k_j^{\,2} - \frac{p^2}{a^2}\right) = A_3 k_j d_j \end{aligned} \tag{1.5}$$

Выражения k_j приведены для больших моментов времени (p - мало), так как и нелинейную задачу будем рассматривать для больших x и t (окрестность фронта).

В таком приближении коэффициенты c_j определяются на основании (1.4)

$$\begin{aligned} &c_1 = \frac{\bar{f}(p)}{p} - \frac{A_3}{A_1}\sqrt{\frac{\chi}{p}}\,\bar{T}_0(p) \\ &c_2 = \frac{A_3}{A_1}\sqrt{\frac{\chi}{p}}\left[\bar{T}_0 + \frac{\chi\eta}{a}\bar{f}(p)\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

Откуда видно, что на фронте упругой волны влиянием граничной температуры можно пренебречь и при этом вклад c_2 в общее решение мал по сравнению с c_1.

Такой качественный вывод позволяет при рассмотрении нелинейной задачи на фронте упругой волны учитывать только влияние члена от $f(t)$.

Теперь перейдем к нелинейной задаче. Введя в (1.3) новую переменную

$$\tau = t - \frac{x}{a_1}, \quad a_1^{\,2} = a^2\left(1 + \frac{A_3}{A_1}\chi\eta\right) \tag{1.7}$$

из второго уравнения можно получить

$$T = \frac{\chi\eta}{a_1}\frac{\partial u}{\partial \tau} - \chi\eta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\chi^2\eta}{a_1^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \tag{1.8}$$

с учетом которого первое уравнение дает

$$\frac{\partial F}{\partial x} + KF\frac{\partial F}{\partial \tau} = \delta\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}, \qquad F = \frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{1.9}$$

Здесь

$$K = \frac{A_4}{A_1 + A_3\chi\eta}\frac{1}{a_1^2}, \quad \delta = \frac{1}{2a_1^3}\frac{A_3\chi^2\eta}{A_1 + A_3\chi\eta}$$

Уравнение (1.9) исследовано многими авторами [2,5]. Согласно [2], задавая граничное условие в виде фиг. 1 работы [2] и рассматривая сначала задачу без диссипации $(\delta = 0)$, можно получить позади волны

$$F = f(Y_1), \quad \tau = KFx + Y_1 \tag{1.10}$$

а впереди

$$F = f(Y_2), \quad \tau = KFx + Y_2 \tag{1.11}$$

Для передней волны $F(Y_2) = 0$ и закон равенства площадей под кривой $F(Y)$ и секущей дает [5]

$$F^2(Y_1) = -\frac{2}{Kx}\int_0^{Y_1} f(Y)\,dY \tag{1.12}$$

Так как $\alpha\eta < E$, то знак K определяется $A_4 - \chi_1$. Для типично упругой среды $\chi_1 < 0$ и ударная волна получится при $f(Y_0) < 0$.

При $x \to \infty$ получаем $Y_1 \to Y_0$ и $f(Y_0) = 0$, что дает

$$F(Y_1) = -\sqrt{-\frac{2}{Kx}\int_0^{Y_0} f(Y)\,dY} \tag{1.13}$$

Аналогичное рассуждение применим и для задней волны, для которой $F(Y_1) = 0$. Тогда получится, что

$$F(Y_2) = -\sqrt{\frac{2}{Kx}\int_{Y_0}^{\infty} f(Y)\,dY} \tag{1.14}$$

Между ударными волнами решение имеет вид

$$F\left(Y_{1,2}\right) = F'\left(Y_0\right)\frac{\tau - Y_0}{1 + KxF'\left(Y_0\right)} \tag{1.15}$$

а для больших x

$$F\left(Y_{1,2}\right) = \frac{\tau - Y_0}{Kx} \tag{1.16}$$

которое удовлетворяет уравнению (1.9).

При $\delta \neq 0$ точное решение (1.9), переходящее в (1.16), дается в виде [2].

$$F = \frac{1}{Kx}\left(\tau - Y_0 \operatorname{th}\frac{Y_0\tau}{2\delta x}\right) \tag{1.17}$$

2. В случае задачи о циллиндрическом взрыве исходные уравнения следующие:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_2}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} - \eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta\right) = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r}$

Вблизи фронта волны уравнение (2.1) упрощается по вышеприведенным соображениям и оставляются только члены основного порядка малости.

Тогда окончательное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{F}{r} + KF\frac{\partial F}{\partial \tau} = \delta\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \tag{2.2}$$

Как и выше, сначала рассмотрим случай $\delta = 0$. Тогда решение примет вид

$$\sqrt{r}F = C\left(Y_{1,2}\right), \quad \tau = 2CK\sqrt{r} + Y_{1,2} \tag{2.3}$$

При $r = r_0$ $F\left(t, r_0\right) = f(t)$, что дает

$$\tau = 2K\sqrt{rr_0}\,f\left(Y_{1,2}\right) + Y_{1,2} \tag{2.4}$$

Используя закон площадей [2,5], для переднего фронта получим

$$F\left(Y_1\right) = \sqrt{-\frac{1}{Kr^{3/2}r_0^{-1/2}}\int_0^{Y_0} f(Y)\,dY} \tag{2.5}$$

а для заднего фронта -

$$F\left(Y_2\right) = \sqrt{-\frac{1}{Kr^{3/2}r_0^{-1/2}}\int_{Y_0}^{\infty} f(Y)\,dY} \tag{2.6}$$

Между фронтами ударных волн из (2.4) можно получить

$$F(Y_{1,2})=\frac{f'(Y_0)(\tau-Y_0)}{1+2Kr^{1/2}r_0^{\,1/2}f'(Y_0)} \tag{2.7}$$

Для $r\to\infty$

$$F(Y_{1,2})=\frac{\tau-Y_0}{2Kr^{1/2}r_0^{\,1/2}},\quad F=\frac{\tau-Y_0}{2Kr} \tag{2.8}$$

что представляется точным решением (2.2) при $\delta=0$.

Как и в первом случае, решение диссипативной задачи $\delta\neq0$, которое переходит в (2.7), есть

$$F=\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}f,\quad F=\frac{1}{2Kr}\left(\tau-\operatorname{th}\frac{Y_0\tau}{4\delta r}\right) \tag{2.9}$$

Однако в отличие от (1.17), (2.9) есть приближенное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т.21, №3.
2. *Ахинян Ж.О., Багдоев А.Г.* Решение задачи о движении упругой среды в магнитном поле под действием ударной нагрузки. - Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т.26, №1, с.36-50.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. - М.: ИЛ, 1961. 777 с.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости.- М.: Мир, 1970. 256 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.- М.: Мир, 1977. 622 с.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
9.08.1994