ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 3, 1995 Механика

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ЗАГРУЖЕННОЙ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ, ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

Белубекян Э. В., Погосян А.Г.

Է. Վ. Բելուբեկյան, Ա. Գ. Պողոսյան

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն կողավոր սալի օպտիմալ նախածում տրված տատանումների փոքրագույն հաճախականության արժեքի դեպքում

Աշխատանքում դիտարկվում է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի տատանման խնդիրը, երբ սալը երկու կողմերով ուժեղացված է կոշտության կողերով, իսկ մյուս երկու ազատ հենված եզրերով բեռնավորված է սեղմող ուժերով: Տրված սեղմող ուժի եւ տատանումների փոքրագույն հաճախականության արժեքների դեպքում որոշվում են կառուցվածքի երկրաչափական եւ ֆիզիկական օպտիմալ պարամետրերը, որոնք ապահովում են նրա ամենափոքր կշիռը:

E. V. Belubekian, A. G. Pogosyan

Optimal Design of a Compressed Composite Restangular Plate with Ribs When Its First Natural Frequensy is Fixed.

Рассматривается прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по двум краям и усиленная ребрами жесткости по свободным кромкам, загруженная сжимающими силами вдоль направления ребер. Пластинка изготовлена из монослоев композиционного материала, уложенных поочередно симметрично одной из геометрических осей пластинки.

Ставится задача определения оптимальных геометрических и физических параметров конструкции, обеспечивающих ее минимальный вес при заданных значениях сжимающей силы и низшей частоты загруженных колебаний.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертая по краям $y=0$ и $y=b$, усиленная по свободным кромкам $x=\pm a/2$ ребрами жесткости размерами $\alpha h_1 \times h_1 \times b$ и загруженная вдоль оси y сжимающими силами F, равномерно распределеными по сечениям $y=0$ и $y=b$.

Предполагается, что пластинка изготовлена из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ), уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси x, а в ребрах монослои ВКМ ориентированы вдоль оси y.

Ставится задача определения оптимальных параметров $\alpha, h_1, h_2, \varphi$, обеспечивающих минимальный вес (объем) конструкции при заданных значениях силы F и низшей частоты загруженных колебаний Ω.

Аналогичные задачи устойчивости и прочности рассмотрены в работах [1,2].

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнение загруженных колебаний имеет вид:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+$$
$$+\frac{F}{A}h_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\rho h_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

Здесь $D_{ik}=B_{ik}h_2^3/12$ - жесткости пластинки, B_{ik} - упругие характеристики монослоев ВКМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через характеристики ВКМ в его главных физических направлениях по известным формулам поворота [3], $A=2\alpha h_1^2+ah_2$ - площадь поперечного $\left(y=\mathrm{const}\right)$ сечения конструкции.

Граничные условия имеют вид:

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\quad y=b \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \tag{3}$$

- в случае симметричной формы колебаний и

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \tag{4}$$

- в случае антисимметричной формы колебаний

$$E_1J\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{F}{A}A_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\rho A_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=$$
$$=D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(D_{12}+4D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2} \quad \text{при} \quad x=a/2 \tag{5}$$
$$C\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Условия (5) соответствуют упругому опиранию пластинки на ребро жесткости.

Здесь $A_1=\alpha h_1^2$ - площадь поперечного сечения ребра, C - жесткость ребра на кручение, определяемая формулой [4]

$$C=G_{23}\alpha h_1^4\beta \tag{6}$$

где

$$\beta=d^2\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}d\sum_n\frac{1}{n^5}\,\mathrm{th}\frac{\pi n}{2d}\right],\quad d=\alpha\sqrt{G_{23}/G_{13}}$$

G_{13}, G_{23} - модули сдвига материала ребра в плоскостях $x0z$, $y0z$.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), в случае симметричной формы колебаний получается в виде

$$w=\left(C_1\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x+C_2\cos\mu_2\lambda_m x\right)\sin\lambda_m y\sin\Omega t \tag{7}$$

а в случае антисимметричной формы, с удовлетворением условий (2) и (4)

$$w=\left(C_1\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x+C_2\sin\mu_2\lambda_m x\right)\sin\lambda_m y\sin\Omega t \tag{8}$$

где

$$\mu_{1,2}=\sqrt{\frac{\sqrt{D_3^{\,2}+D_{11}D_{22}\left(k_m^{\,2}-1\right)}\pm D_3}{D_{11}}} \tag{9}$$

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{b},\quad D_3=D_{12}+2D_{66},\quad k_m^{\,2}=\frac{Fh_2}{AD_{22}\lambda_m^2}+\Omega^2\frac{\rho h_2}{D_{22}\lambda_m^4} \tag{10}$$

Здесь принято $k_m>1$, так как в случае наличия ребер вес конструкции бедет меньше соответствующего веса гладкой пластинки со свободными кромками, где принимается $k_m=1$.

Удовлетворение граничных условий (5) приводит к следующему уравнению для симметричной формы колебаний:

$$\begin{gathered}H(\bar{x})=\frac{B_{11}}{B_{22}}f_1\left(\mu_1^{\,2}+\mu_2^{\,2}\right)\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x\cos\mu_2\lambda_m x+\mu_2\left(f_1f_2-f_3\right)\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x\sin\mu_2\lambda_m x+\\+\mu_1\left(f_1f_2-f_4\right)\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x\cos\mu_2\lambda_m x-\frac{B_{11}}{B_{22}}f_2\left(\mu_1^{\,2}+\mu_2^{\,2}\right)\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x\sin\mu_2\lambda_m x=0\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\bar{x}=\left\{\alpha,h_1,h_2,\varphi\right\}$$

$$f_1=\frac{\alpha h_1^{\,2}}{h_2}\frac{\pi m}{b}\left(\frac{E_1}{B_{22}}\frac{h_1^{\,2}}{h_2^{\,4}}-k_m^{\,2}\right),\quad f_2=12\frac{\pi m}{b}\frac{G_{23}}{B_{22}}\frac{\alpha h_1^{\,4}\beta}{h_2^{\,3}}$$

$$f_3=\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_1^{\,2}-\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2,\quad f_4=\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\mu_2^{\,2}+\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2$$

Для антисимметричной формы колебаний соответствующее уравнение получается из (11) заменой $\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x$ на $\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x$; $\sin\mu_2\lambda_m x$ на $-\cos\mu_2\lambda_m x$; $\operatorname{ch}\mu_1\lambda_m x$ на $\operatorname{sh}\mu_1\lambda_m x$; $\cos\mu_2\lambda_m x$ на $\sin\mu_2\lambda_m x$.

Определение оптимальных параметров α, h_1, h_2, φ, удовлетворяющих уравнению (11) и обеспечивающих минимальный вес (площадь сечения A) конструкции при заданных значениях сжимающей силы F, низшей частоты колебаний Ω и габаритных размеров пластинки $\xi=\left(a+2\alpha h_1\right)/b$ сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти

$$\min_{\bar{x}} \max_{m} A(\bar{x}) \tag{12}$$

при ограничениях

$$H(\bar{x}) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 90^0, \quad h_0 \le h_1 \le 0{,}2b$$
$$\delta \le h_2 \le h_0, \quad 0{,}2 \le \alpha \le 5{,}0 \tag{13}$$

Таблица 1

$\overline{\Omega}$	$\overline{F} \cdot 10^4$	α	$\overline{h}_1$	$\overline{h}_2$	φ	$\overline{A}$	$\overline{A}_0$
0,25	0	2,51	0,0260	0,0041	0^0	0,0070	0,0088
	0,25	2,03	0,0612	0,0154	30^0	0,0268	0,0321
	0,50	2,00	0,0708	0,0184	30^0	0,0333	0,0401
	0,75	2,01	0,0759	0,0215	30^0	0,0381	0,0457
	1,0	2,00	0,0809	0,0225	30^0	0,0414	0,0501
0,05	0	2,56	0,0402	0,0061	0^0	0,0131	0,0176
	0,25	1,99	0,0644	0,0154	30^0	0,0279	0,0345
	0,50	2,01	0,0725	0,0184	30^0	0,0342	0,0420
	0,75	2,03	0,0779	0,0205	30^0	0,0386	0,0474
	1,0	2,01	0,0835	0,0215	30^0	0,0423	0,0517
0,075	0	2,49	0,0493	0,0092	0^0	0,0191	0,0264
	0,25	2,06	0,0694	0,0143	30^0	0,0301	0,0386
	0,5	2,00	0,0761	0,0184	30^0	0,0359	0,0453
	0,75	2,01	0,0821	0,0204	30^0	0,0404	0,0502
	1,0	1,90	0,0871	0,0215	30^0	0,0433	0,0543
0,10	0	2,50	0,0607	0,0092	0^0	0,0248	0,0351
	0,25	2,03	0,0751	0,0154	30^0	0,0335	0,0439
	0,50	2,01	0,0812	0,0174	30^0	0,0382	0,0497
	0,75	1,99	0,0855	0,0195	30^0	0,0419	0,0542
	1,0	2,00	0,0890	0,0205	30^0	0,0450	0,0579

Последние три ограничения (13) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Для δ принимается: $\delta = 0{,}01b$ при $a \ge b$, $\delta = 0{,}01a$ при $a \le b$.

Задача (12), (13) решается методом деформируемого многогранника [5]. Численная реализация проведена при $\xi =$ для различных приведенных значений $\overline{F} = F / B_{11}^0 b^2$, $\overline{\Omega} = \Omega\sqrt{\rho b^2 / B_{11}^0}$. В качестве материала принят ВКМ со следующими приведенными характеристиками:

$$B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0{,}082, \quad B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0{,}02, \quad B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0{,}043,$$
$$G_{23} / G_{13} = 1, \quad E_1 / B_{11}^0 = 0{,}99, \quad G_{23} / B_{11}^0 = 0{,}059.$$

Полученные значения оптимальных параметров α, $\overline{h}_1 = h_1 / b$, $\overline{h}_2 = h_2 / b$, φ и соответствующих минимальных площадей сечения конструкции

$\overline{A} = A / b^2$ приведены в табл. 1. Там же приведены наименьшие значения площади сечения $\overline{A}_0$ гладкой пластинки, получаемые при $\varphi = 90^0$. Для всех рассмотренных случаев оптимальные параметры получаются при симметричной форме колебаний $(m = 1)$.

Как следует из табл. 1, оптимальное оребрирование пластинки при заданных $\overline{\Omega}$ и $\overline{F}$ приводит к уменьшению веса конструкции в среднем на 20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян Э. В., Погосян А. Г.* Оптимальное проектирование по устойчивости прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по двум краям ребрами жесткости.- Изв. АН Арм ССР, Механика, 1988, т.41, N 6, с.14-18.
2. *Белубекян Э. В., Дарбинян А. З.* Оптимальное проектирование ребристой прямоугольной пластинки из композиционного материала при ограничении на прочность. Механика (Межвуз. сб. научн. тр.), ЕГУ, 1989, вып.7, с.91-97.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.- М.: Наука, 1967. 534с.
4. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней.- М.: Наука, 1971. 241с.
5. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.- М.: Мир, 1975, 532с.

Институт Механики НАН РА
Государственный инженерный университет Армении

Поступила в редакцию 17.01.1994