ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 3, 1995 Механика

ИЗГИБНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Баблоян А. А., Баблоян К. Б.

Ա.Հ.Բաբլոյան, Կ.Բ.Բաբլոյան

Վերջավոր երկարության գլանի լայնակի եւ ծռման փափանումները

Դիտարկվում է վերջավոր չափերով առաձգական գլանի կայունացված փափանումները երբ գլանը դեֆորմացվում է հիմնափակի փափանումների պատճառով:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի եղանակով եւ բերվում է գծային հանրահաշվական անվերջ համակարգերի լուծմանը: Ոչ-ռեզոնանսային դեպքերի համար ցույց է տրվում, որ այդ համակարգերը քվազի-լիովին ռեգուլյար են: Անհայտ գործակիցների համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձեւեր, որոնց օգնությամբ անջատվել են լարումների եզակիությունները:

A.A.Babloyan, K.B.Babloyan

Bending and Transverse Vibrations of a Cylinder of Finite Lenght

Рассматривается динамическая задача упругости об установившихся вынужденных колебаниях сплошного цилиндра конечной длины. Цилиндр деформируется из-за изгибных и поперечных колебаний основания. Целью работы является получение точных формул для описания динамических полей напряжений и перемещений, а также разработка способа вычисления частотных характеристик сплошного упругого цилиндра конечной длины под действием сейсмических сил. Решения и подробный анализ аналогичных задач при других граничных условиях приведены в книге [1] .

1. Построение решения краевой задачи. Построению общих решений уравнений движения уделяется очень большое внимание. Однако, как справедливо отмечается в [1], роль таких общих представлений при фактическом решении граничных задач теории упругости для тел конечных размеров весьма мала. Поэтому при построении решения задачи будем пользоваться только результатами работ [2,5].

Ограничиваясь только первой гармоникой по окружному координату (нулевая гармоника соответствует осесимметричной задаче), решение рассматриваемой задачи представим в виде

$$\begin{aligned} u_r(r,z,\varphi,t) &= \bar{u}_r(r,z)\exp(i\omega t)\cos\varphi \\ u_\varphi(r,z,\varphi,t) &= \bar{u}_\varphi(r,z)\exp(i\omega t)\sin\varphi \qquad (1.1) \\ u_z(r,z,\varphi,t) &= \bar{u}_z(r,z)\exp(i\omega t)\cos\varphi \end{aligned}$$

где

$$\overline{u}_r(r,z)=u_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}R_{1k}(r)\sin\beta_k z+\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p u_p(z)J_1'(\alpha_p r)$$

$$\overline{u}_\varphi(r,z)=-u_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}R_{2k}(r)\sin\beta_k z+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{u_p(z)}{r}J_1(\alpha_p r) \qquad (1.2)$$

$$\overline{u}_z(r,z)=r\omega_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}R_{3k}(r)\cos\beta_k z+\sum_{p=1}^{\infty}w_p(z)J_1(\alpha_p r)$$

Функции, входящие в (1.2), определяются следующими формулами:

$$R_{1k}+R_{2k}=2\lambda_{2k}Q_k I_2(\lambda_{2k}r)+2\beta_k M_k I_2(\lambda_{1k}r)$$

$$R_{1k}-R_{2k}=2\lambda_{2k}Q_k I_0(\lambda_{2k}r)+2\beta_k N_k I_0(\lambda_{1k}r) \qquad (1.3)$$

$$R_{3k}(r)=2\beta_k Q_k I_1(\lambda_{2k}r)+\lambda_{1k}(M_k+N_k)I_1(\lambda_{1k}r)$$

$$u_0(z)=\delta_0\frac{\cos c_1(h-z)}{\cos c_1 h}+\frac{\chi}{c_2}\left(\sin c_2 z-\frac{2c_2\sin c_1 z\cdot\cos c_2 h}{c_1\cos c_1 h}\right)$$

$$w_0(z)=\chi\cos c_2 z,\qquad \Omega_p=\frac{\alpha_p^{\,2}R^2}{\alpha_p^{\,2}R^2-1} \qquad (1.4)$$

$$u_p(z)=\frac{2\Omega_p}{Rc_1^{\,2}J_1(\alpha_p R)}\left\{X_p\left[\frac{\operatorname{sh}\gamma_{2p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}-\frac{\gamma_{1p}\gamma_{2p}\operatorname{sh}\gamma_{1p}z}{\gamma_p^{\,2}\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}\right]+\right.$$

$$\left.+Y_p\left[\frac{\operatorname{ch}\gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}-\frac{\operatorname{ch}\gamma_{1p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}\right]\right\}$$

$$w_p(z)=\frac{2\gamma_{2p}\Omega_p}{Rc_1^{\,2}J_1(\alpha_p R)}\left\{X_p\left[\frac{\operatorname{ch}\gamma_{2p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}-\frac{\alpha_p^{\,2}\operatorname{ch}\gamma_{1p}z}{\gamma_p^{\,2}\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}\right]-\right. \qquad (1.5)$$

$$\left.-Y_p\left[\frac{\operatorname{sh}\gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}-\frac{\alpha_p^{\,2}\operatorname{sh}\gamma_{1p}(h-z)}{\gamma_{1p}\gamma_{2p}\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}\right]\right\}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\gamma_{1p}^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-c_1^2,\quad \gamma_{2p}^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-c_2^2,\quad \gamma_p^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-0{,}5c_1^{\,2}$$

$$\lambda_{1k}^{\,2}=\beta_k^{\,2}-c_1^2,\quad \lambda_{2k}^{\,2}=\beta_k^{\,2}-c_2^2,\quad \lambda_k^{\,2}=\beta_k^{\,2}-0{,}5c_1^{\,2},\quad m=\frac{\nu}{1-2\nu} \qquad (1.6)$$

$$c_1^{\,2}=\frac{\rho\omega^2}{G},\quad c_2^{\,2}=\frac{1-2\nu}{2-2\nu}c_1^{\,2},\quad \beta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2h},\quad J_1'(\alpha_p R)=0$$

где h - высота цилиндра, R - его радиус, ρ - плотность, а G - модуль сдвига материала. ω - вынужденная частота. Компоненты тензора напряжений вычисляются при помощи закона Гука с использованием (1.1)-(1.5).

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
&u_x = \delta_0 \exp(i\omega t), \quad u_y = 0, \quad u_z = \chi x \exp(i\omega t) \quad \text{при } z = 0 \\
&\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad \text{при } z = h \\
&\sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\varphi} = 0 \quad \text{при } r = R
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Первую строку условий (1.7) можно представить также в виде (1.7)

$$u_r = \delta_0, \quad u_\varphi = -\delta_0, \quad u_z = \chi r \quad \text{при } z = 0$$

Если вместо старых неизвестных (Q_k, M_k, N_k) ввести новые (V_k, Z_k)

$$\begin{aligned}
&Q_k \lambda_{2k} I_1'(x_2) = -\frac{2(1-\nu) Z_k \beta_k}{h c_1^2}, \quad x_1 = \lambda_{1k} R, \quad x_2 = \lambda_{2k} R \\
&(M_k + N_k)\lambda_{1k}^2 I_1'(x_1) = \frac{4(1-\nu) Z_k \beta_k^2}{h c_1^2} + \frac{2V_k}{h} \\
&(M_k - N_k)\frac{\lambda_{1k}^2 I_1(x_1)}{2x_1} = \frac{2(1-\nu) Z_k}{h} + \frac{2\lambda_k^2 V_k}{h\beta_k^2} - \frac{\lambda_{1k}^2 P_k}{h\beta_k^2} \\
&P_k = \frac{c_1^2 \delta_0}{\lambda_{1k}^2} - \frac{(-1)^{k-1} c_1^2 \chi \beta_k \cos c_2 h}{(1-\nu)\lambda_{1k}^2 \lambda_{2k}^2}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

то функции (1.2) будут удовлетворять как уравнениям движения Навье, так и всем условиям (1.7), кроме условий на функции $\overline{u}_z(r,0)$, $\overline{\sigma}_z(r,h)$, $\overline{\sigma}_r(R,z)$ и $\overline{\tau}_{r\varphi}(R,z)$.

Удовлетворяя этим последним условиям, для определения неизвестных постоянных X_p, Y_p, $\ _k$ и Z_k получим следующие бесконечные системы:

$$\begin{aligned}
&b_{1k} V_k + b_{2k} Z_k + \frac{(-1)^{k-1} \nu R c_1^2 \chi \cos c_2 h}{2(1-\nu)\lambda_{2k}^2} - \frac{x_1^2 P_k}{2\beta_k R} = \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_p \frac{\gamma_p^2 \beta_k Y_p \left[(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_{1k}^2\right] + (-1)^k \gamma_{2p} X_p \left[\alpha_p^2 \beta_k^2 - 0{,}5\nu c_1^2 \left(\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2\right)\right]}{(1-\nu) R \gamma_p^2 \left(\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2\right)\left(\alpha_p^2 + \lambda_{2k}^2\right)}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&b_{3k} V_k + b_{4k} Z_k \frac{x_1^2 P_k}{2\beta_k R} \frac{I_2'(x_1)}{I_1(x_1)} = \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_p \frac{(-1)^{k-1} \gamma_{2p} X_p \left[\nu \gamma_{1p}^2 - (1-\nu)\beta_k^2\right] + \beta_k \gamma_p^2 Y_p}{(1-\nu) R^3 \left(\alpha_p^2 + \lambda_{1k}^2\right)\left(\alpha_p^2 + \lambda_{2k}^2\right)}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$a_{1p}X_p + a_{2p}Y_p + \frac{\chi c_1^2 \sin c_2 h}{2\alpha_p^2 c_2} =$$

$$= \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \beta_k \left\{ \frac{V_k}{\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2} + \frac{Z_k\left[(1-\nu)\beta_k^2 - \nu\gamma_{1p}^2\right]}{\left(\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2\right)\left(\beta_k^2 + \gamma_{2p}^2\right)} \right\} \tag{1.11}$$

$$a_{3p}X_p - a_{4p}Y_p = \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \frac{V_k}{\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2} + \frac{\beta_k^2 Z_k}{\left(\beta_k^2 + \gamma_{1p}^2\right)\left(\beta_k^2 + \gamma_{2p}^2\right)} \right\} \tag{1.12}$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{1p} = \frac{\alpha_p^2 \gamma_{1p}\gamma_{2p}}{c_1^2 \gamma_p^2} \operatorname{th}\gamma_{1p}h - \frac{\gamma_p^2}{c_1^2}\operatorname{th}\gamma_{2p}h \to \frac{1}{4(1-\nu)}$$

$$a_{4p} = \frac{\alpha_p^2}{c_1^2\gamma_{1p}}\operatorname{th}\gamma_{1p}h - \frac{\gamma_{2p}}{c_1^2}\operatorname{th}\gamma_{2p}h \to \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)\alpha_p}$$

$$c_1^2 a_{2p} = \frac{\gamma_p^2 c_1^2}{\gamma_{2p}} a_{3p} = \frac{\alpha_p^2}{\operatorname{ch}\gamma_{1p}h} - \frac{\gamma_p^2}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}$$

$$b_{1k} = \frac{R\lambda_{1k}^2}{\beta_k} - \frac{\beta_k I_1(x_1)}{\lambda_{1k} I_1'(x_1)} \to x_1 - 1$$

$$b_{2k} = \frac{2(1-\nu)\beta_k}{c_1^2}\left[\frac{Rc_1^2}{2} + \frac{\lambda_k^2 I_1(x_2)}{\lambda_{2k} I_1'(x_2)} - \frac{\beta_k^2 I_1(x_1)}{\lambda_{1k} I_1'(x_1)}\right] \to (1-\nu)x_1 - \frac{3-2\nu}{2} \tag{1.13}$$

$$b_{3k} = \frac{R}{\beta_k}\left[\lambda_k^2 \frac{I_2'(x_1)}{I_1(x_1)} - \frac{\beta_k^2}{x_1^2}\frac{I_2(x_1)}{I_1'(x_1)}\right] \to x_1 - 2$$

$$b_{4k} = \frac{2(1-\nu)\beta_k}{Rc_1^2}\left[\frac{c_1^2 R^2}{2}\frac{I_2'(x_1)}{I_1(x_1)} + \frac{I_2(x_2)}{I_1'(x_2)} - \frac{\beta_k^2}{\lambda_{1k}^2}\frac{I_2(x_1)}{I_1'(x_1)}\right] \to (1-\nu)(x_1 - 2)$$

$$\Delta_k = b_{1k}b_{4k} - b_{2k}b_{3k} \to x_1 - (3-2\nu) - (1-\nu)R^2 c_1^2$$

В (1.13) приведены также первые члены асимптотики при больших значениях индексов.

Таким образом, задача свелась к решению совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье $_k$, Z_k и Фурье-Дини X_p, Y_p.

2. Исследование бесконечных систем. Исследование бесконечных систем (1.9)-(1.12) как на регулярность, так и на выяснения асимптотических поведений неизвестных коэффициентов, будем проводить по методу, разработанному в работах [1-3].

Ясно, что бесконечные системы динамических краевых задач для произвольного значения вынужденной частоты ω не могут быть регулярными. Кроме того, отдельно взятая система (1.11) не регулярна, так как в ней коэффициенты при неизвестных по переменной "k" имеют порядок убывания $O\left(k^{-1}\right)$. Воспользуемся тем фактом, что коэффициенты этой системы - знакочередующиеся. Разрешая (1.9) и (1.10) относительно неизвестных $_k$, Z_k и подставляя найденные значения в (1.11) и (1.12), получим две бесконечные системы относительно неизвестных X_p, Y_p. Из-за громоздкости формул эти системы здесь не приводятся. Основными неизвестными первой системы (получаемой из (1.11)) являются X_p, так как в ней коэффициенты при X_p убывают степенным законам, а коэффициенты при Y_p - экспоненциальным. Во второй системе (полученной из (1.12)) основными неизвестными являются Y_p.

Считая, что вынужденная частота ω отлична от собственных и имеет конечное значение, оценим суммы модулей коэффициентов при неизвестных для этих систем. С точностью до бесконечно малых величин при $p \gg 1$ будем иметь

$$\rho_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\Omega_m \gamma_p^{\,2}}{(1-\nu) Rha_{1p}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \beta_k Q_{mkp} \right|$$

$$\rho_y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\Omega_m}{(1-\nu) Rha_{4p}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-\nu)\gamma_p^{\,2} - \nu\beta_k^{\,2}\right] Q_{mkp} \right| \qquad (2.1)$$

$$Q_{mkp} = \frac{\beta_k \gamma_m^{\,2}\left[(1-\nu)\alpha_m^{\,2} - \nu\lambda_{1k}^{\,2}\right] + (-1)^k \gamma_{2m}\alpha_m^{\,2}\beta_k^{\,2}}{\gamma_m^{\,2}\left(\alpha_m^{\,2}+\lambda_{1k}^{\,2}\right)\left(\alpha_m^{\,2}+\lambda_{2k}^{\,2}\right)\left(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2}\right)\left(\beta_k^{\,2}+\lambda_{2p}^{\,2}\right)}$$

Считая, что порядок убывания суммы знакопеременных рядов в (2.1) хотя бы на единицу больше порядка суммы соответствующих положительных рядов и пользуясь формулами

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p}{\left(\alpha_p^{\,2}+\lambda_{1k}^{\,2}\right)\left(\alpha_p^{\,2}+\lambda_{2k}^{\,2}\right)} = \left[1+O\left(k^{-1}\right)\right]\frac{R^3}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\xi d\xi}{\left(\xi^2+x_1^{\,2}\right)\left(\xi^2+x_2^{\,2}\right)} =$$
$$= \frac{R^3}{2\pi x_1 x_2}\left[1+O\left(k^{-1}\right)\right], \qquad (k \gg 1) \qquad (2.2)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left|(1-\nu)\alpha_p^{\,2} - \nu\lambda_{1k}^{\,2}\right|}{\left(\alpha_p^{\,2}+\lambda_{1k}^{\,2}\right)\left(\alpha_p^{\,2}+\lambda_{2k}^{\,2}\right)} = \left[1+O\left(k^{-1}\right)\right]\frac{R^2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\left|(1-\nu)\xi^2 - \nu x_1^{\,2}\right|}{\left(\xi^2+x_1^{\,2}\right)\left(\xi^2+x_2^{\,2}\right)}d\xi =$$
$$= \frac{2R^2}{2\pi\left(x_1+x_2\right)}\left[(1-2\nu)\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} + \sqrt{\nu(1-\nu)}\right)\right]\left[1+O\left(k^{-1}\right)\right],$$

на основании (1.13) для норм ρ_x и ρ_y получим следующие асимптотические оценки:

$$\rho_x = \frac{4}{\pi^2} + O\left(p^{-1}\right), \quad (p >> 1)$$

$$\rho_y = \frac{16}{(3-4\nu)\pi^2}\left[(1-2\nu)\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right) + \sqrt{\nu(1-\nu)}\right]^2 + O\left(p^{-1}\right) \tag{2.3}$$

Отсюда следует

$$\lim_{p\to\infty} \rho_x = \frac{4}{\pi^2}, \quad \lim_{p\to\infty} \rho_y \le \frac{4}{\pi^2} \tag{2.4}$$

Свободные члены имеют порядок убывания $O\left(p^{-2}\ln p\right)$ для первой системы и $O\left(p^{-1}\ln p\right)$ - для второй. Из (2.4) следует, что начиная с некоторого номера p_0, бесконечные системы будут вполне регулярными.

Интересно отметить, что оценки (2.4) остаются в силе, если при решении рассматриваемой задачи приняли $J_2\left(\alpha_p R\right) = 0$. По-видимому, это связано с тем, что корни функций $J_1'(\xi)$ и $J_2(\xi)$ асимптотически совпадают, то есть

$$\xi_{1,p}' \approx \xi_{2,p} \approx \pi(p+0{,}75)\left[1 - O\left(p^{-2}\right)\right] \tag{2.5}$$

При дальнейшем исследовании, а также при численных расчетах удобно пользоваться уравнениями (1.9)-(1.12) с учетом (2.4).

В общем случае, когда граничные функции в (1.7) ненулевые (но ограниченные), в окрестности угловой точки $A(R,h)$ напряжения могут иметь логарифмическую особенность, а в окрестности точки $B(R,0)$ - степенную. Поэтому неизвестные коэффициенты X_p и Y_p при $p >> 1$ должны иметь вид

$$X_p \approx \frac{x_0}{\alpha_p R}, \quad Y_p \approx y_0\left(\alpha_p R\right)^{\delta-1} \quad (0<\delta<1) \tag{2.6}$$

На этой основе из бесконечных систем (1.9) и (1.10) получим следующие асимптотические формулы:

$$_k + (1-\nu)Z_k - \frac{1}{2}P_k = O\left(k^{-3}\right), \quad (k >> 1)$$

$$Z_k \approx \frac{(-1)^{k-1} z_0}{x_1} + v_0\, x_1^{\delta-1}, \quad x_1 = \lambda_{1k} R \tag{2.7}$$

где

$$z_0 = \frac{x_0}{2(1-\nu)}, \quad v_0 = \frac{y_0(2\nu-\delta)}{2(1-\nu)\sin\frac{\pi\delta}{2}} \tag{2.8}$$

а из (2.7) (без учета (2.8)) и бесконечных систем (1.11) и (1.12) при $p >> 1$ следует

$$X_p \approx \frac{2(1-\nu)z_0}{\alpha_p R}, \quad Y_p \approx y_1\left(\alpha_p R\right)^{\delta-1}$$

$$y_1 = \frac{2(1-\nu)(2-2\nu-\delta)\,v_0}{(3-4\nu)\sin\dfrac{\pi\delta}{2}} \tag{2.9}$$

Сравнение (2.9) и (2.6) приводит к выводу, что действительно имеет место асимптотические формулы (2.6) и (2.7) при условии (2.8). Из условия $y_0 = y_1$ получается уравнение для определения числа δ

$$(3-4\nu)\sin^2\frac{\pi\delta}{2} = (\delta-2\nu)(\delta+2\nu-2) \tag{2.10}$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты при особенностях напряжений около точки $B(R,0)$ пропорциональны y_0. Формулы (2.6) и (2.7) позволяют свести бесконечные системы к решению конечных систем с учетом всех неизвестных, а также контролировать точность приближенных решений и определить значения постоянных x_0, y_0.

Количество разрешаемых уравнений (M, N) в конечных системах будем определять из эмпирических соотношений [1,2]

$$\alpha_M{}^2 \approx \beta_N{}^2 \approx 10c_1{}^2 \tag{2.11}$$

3. Расчетные формулы. Из-за наличия двух особых точек $A(R,h)$ и $B(R,0)$ ряды, входящие в выражениях компонент напряжений и перемещений, в окрестностях особых точек, сходятся медленно. Асимптотические формулы (2.6) и (2.7) позволяют улучшить сходимость функциональных рядов на два порядка. При этом выделяются характерные особенности напряжений в особых точках. При улучшении сходимости рядов в окрестности точки $A\,(B)$ в формулах (2.6) и (2.7) надо положить $y_0 = 0\left(x_0 = 0\right)$, так как учет этих слагаемых привел бы к повышению погрешности при вычислениях. Это связано с тем, что суммы отброшенных рядов имеют больший порядок убывания, чем каждый их член.

Из (2.6) и (2.7) следует, что компоненты напряжений σ_φ и $\tau_{r\varphi}$ не имеют особенностей. После улучшения сходимости рядов для напряжения σ_z получим следующие расчетные формулы:

а) для окрестности точки $A(R,h)$

$$(2Ge^{i\omega t}\cos\varphi)^{-1}\sigma_z = -\frac{\chi c_1^2 r}{2c_2}\sin c_2 z - \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\beta_k R_{3k}(r) - mR_{ok}(r) +$$
$$+\left(\frac{r}{R} - \beta_k(R-r)\right)\frac{(-1)^{k-1} z_0 \exp(-\beta_k(R-r))}{\beta_k h\sqrt{Rr}}\Bigg]\sin\beta_k z + \tag{3.1}$$
$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[w_p'(z) + m w_{op}(z) + z_0\frac{1+\alpha_p(h-z)}{\alpha_p R^2 \exp(\alpha_p(h-z))}\right]J_0(\alpha_p r) +$$
$$+\frac{z_0}{\pi\sqrt{Rr}}\left[\ln\frac{h}{2R} - 1 - \frac{R-r}{r}\ln\frac{4h}{\pi\rho}\right]$$

б) для окрестности точки $B(R,0)$

$$(2G\exp(i\omega t)\cos\varphi)^{-1}\sigma_z = -\frac{\chi c_1^2 r}{2c_2}\sin c_2 z - \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\beta_k R_{3k}(r) - mR_{0k}(r) +$$
$$+\sqrt{\frac{R}{r}}\left[\frac{r}{R} - \beta_k(R-r)\right]\frac{\nu_0 x_1^{\delta-1}}{h\exp(\beta_k(R-r))}\Bigg\}\sin\beta_k z +$$
$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[w_p'(z) + m w_{0p}(z) + y_0\frac{2(1-\nu) + \alpha_p z}{2(1-\nu)R(\alpha_p R)^{1-\delta}\exp(\alpha_p z)}\right]J_1(\alpha_p r) + \tag{3.2}$$
$$+\frac{\nu_0\Gamma(\delta)R^\delta}{\pi\sqrt{Rr}\rho_0^\delta}\Bigg\{\left[\frac{2(1-\nu)}{\delta-2\nu}\sin\delta\theta_1 + \frac{\delta}{\delta-2\nu}\cos\theta_1\cos(\delta+1)\theta_1\right]\sin\frac{\pi\delta}{2} +$$
$$+\frac{r}{R}\sin\delta\theta_0 - \delta\cos\theta_0\sin(\delta+1)\theta_0\Bigg\}$$

где $\Gamma(\delta)$ - гамма - функция Эйлера,

$$w_{0p}(z) = -\frac{2c_2^2\Omega_p}{Rc_1^2 J_1(\alpha_p R)}\left[X_p\frac{\operatorname{sh}\gamma_{2p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h} + Y_p\frac{\operatorname{ch}\gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}\right]$$
$$R_{0k}(r) = \frac{4(1-\nu)Z_k\beta_k c_2^2 I_1(\lambda_{2k}r)}{h\lambda_{2k}c_1^2 I_1'(x_2)} \tag{3.3}$$
$$\rho = \sqrt{(R-r)^2 + (h-z)^2},\quad \rho_0 = \sqrt{(R-r)^2 + z^2},\quad \theta_1 + \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$
$$\rho_0\cos\theta_0 = R - r,\quad \rho_0\sin\theta_0 = z,\quad (\rho,\rho_0) << \min(R,h)$$

При получении (3.2) была использована формула [6]

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-\xi_p x}}{\xi_p^{\gamma}}=\frac{x^{\gamma-1}}{\pi}\Gamma(1-\gamma,\xi_1 x)+\theta\xi_1^{-\gamma}e^{-\gamma x} \tag{3.4}$$

где $\Gamma(\alpha,x)$ - неполная гамма-функция, γ - произвольное число, $\xi_p=\pi(p+c)$, $c>-$, $\operatorname{Re}x>0$, $0<\theta<1$.

Аналогичным образом можно улучшить сходимость рядов для других компонент напряжений и перемещений.

В конце работы приведем формулы для определения изгибающего момента и перерезывающей силы, действующие на высоте z от основания цилиндра

$$\begin{gathered}M_y(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sigma_z\cos\varphi\, dr\, d\varphi\\ P_x(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^R r\tau_{xz}\, dr\, d\varphi\end{gathered} \tag{3.5}$$

Для краткости приведем значения этих величин для сечения $z=0$

$$\begin{gathered}M_y(0)=-4G\exp(i\omega t)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Omega_p Y_p}{\alpha_p^2}\\ P_x(0)=\pi R^2 G\exp(i\omega t)\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2\Omega_p}{R^2}\left[\frac{\gamma_{2p}X_p}{\gamma_p^2\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}-\frac{Y_p}{\gamma_{1p}}\operatorname{th}\gamma_{1p}h\right]-\right.\\ \left.-\frac{4}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\nu)\beta_k^2 Z_k I_2(x_1)}{\lambda_{1k}^2 I_1'(x_1)}+V_k+\frac{V_k c_1^2 I_2(x_1)}{2\lambda_{1k}^2 I_1'(x_1)}\right]\right\}\end{gathered} \tag{3.6}$$

При помощи асимптотических формул (2.6) и (2.7) и обобщенной дзета-функции Римана

$$\zeta(s,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)^{-s} \tag{3.7}$$

легко можно улучшить сходимость всех рядов в формулах (3.6).

Собственно, частоты данной задачи будем определять, исходя из следующего факта: известно [1], что когда вынужденная частота находится в малой окрестности собственной, то точность удовлетворения граничных условий резко падает. Поэтому, после каждого конкретного расчета необходимо проверить точность удовлетворения граничных условий.

Такой проверкой определяется приближенное значение собственной частоты. Для уточнения этого приближения надо увеличить количество разрешаемых уравнений бесконечных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.- Киев: Наукова Думка, 1981. 283с.

2. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.- Киев: Наукова Думка, 1979. 261с.
3. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений.- Изв. физ-мат. ин-та В. А. Стеклова, 1930, № 3, с.41-167.
4. *Абрамян Б. Л.* Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве.- Докл. АН Арм. ССР, 1985, т.81, № 3, с.118-122.
5. *Баблоян А. А.* К изгибу толстых круглых плит произвольной нагрузкой.- ИЖ, 1964, т.4, вып. 4, с.750-758.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Физматгиз, 1962. 1100с.

Государственный инженерный университет Армении
Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 17.08.1993