

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ  
ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ**

Мовсисян Л. А., Габриелян М. С.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Մ.Ս. Գաբրիելյան

**Ջերմաառաձգական սալի շարժման դեկավարման մի խնդրի մացիկ**

Դիտարկվում է ջերմաառաձգական (կապակցված խնդիր) սալի ծոման շարժման օպիրմալ դեկավարման խնդիրը: Տրված նախնական պայմանների դեպքում պահանջվում է բնոի եւ ջերմության միջոցով սալը ժամանակի որոշակի երկու պահերի համար բերել տրված վիճակների: Որպես օպիրմալություն սկզբունք մինիմիզացվում է ջերմությունից եւ բնոից բառակուսային ֆունկցիոնալը:

L. A. Movsisian, M. S. Gabrielian

On one problem of controlling the thermoelastic plate-layer's motion

Изучается задача оптимального управления одномерного изгибного колебания термоупругой пластинки (связанная задача). При заданных начальных условиях относительно прогиба, его скорости и температуры требуется при помощи нагрузки и температуры объект привести в фиксированные моменты времени к заданным положениям (для простоты изложения таких положения берутся два).

В качестве критерия оптимальности минимизируется квадратичный функционал от действующей нагрузки и температуры.

1. Уравнения поперечного движения пластинки и связанной задачи теплопроводности в классической постановке на основании [1-3] берутся в виде

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha(1+\nu) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left( \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k^*}{\rho h^2 c_p} \right) T - \chi \eta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = \\ = \frac{12Qz_0}{\rho h^3 c_p} + \frac{6k^*(T_+ - T_-)}{\rho h^2 c_p} = \Phi(x, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначения общепринятые или сохранены [1-3], поэтому здесь не разъясняются.

Пусть имеются следующие граничные:

$$w = M = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha(1+\nu)T \right] = 0, \quad T = \Phi_1(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (1.3)$$

$$w = M = 0, \quad T = \Phi_2(t) \quad \text{при } x = l$$

и начальные условия

$$w = F_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F_2(x), \quad T = T_0(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (1.4)$$

Представляя решения (1.1) и (1.2)

$$w_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l w(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad T_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l T(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \quad (1.5)$$

с учетом граничных условий (1.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_k}{dt^2} + \omega_k^2 w_k - a_k T_k &= f_k(t) \\ \frac{dT_k}{dt} + \chi_k T_k + b_k \frac{dw_k}{dt} &= \psi_k(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\omega_k^2 = \frac{D}{\rho h} \lambda_k^4, \quad a_k = \frac{\alpha(1+\nu)}{\rho h} \lambda_k^2, \quad b_k = \chi \eta \lambda_k^2$$

$$\chi_k = \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k^*}{\rho h c_p} + \chi \lambda_k^2, \quad f_k = \frac{2}{\rho h l} \int_0^l F \sin \lambda_k x dx$$

$$\psi_k = \chi \lambda_k [\Phi_1(t) - (-1)^k \Phi_2(t)] + \varphi_k, \quad \varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi \sin \lambda_k x dx$$

Начальные условия для системы (1.6) будут

$$w_k(0) = c_k, \quad \frac{dw_k(0)}{dt} = d_k, \quad T_k(0) = e_k \quad (1.7)$$

где постоянные  $c_k$ ,  $d_k$  и  $e_k$  - соответствующие коэффициенты Фурье разложения функций (1.4).

2. Задача ставится следующим образом: в момент  $t = 0$  пластинке сообщается начальное отклонение, скорость и температура по (1.4). Требуется в моменты  $t = t_1$  и  $t = t_2$  пластинку привести в определенные положения  $w_1(x, t_1)$  и  $w_2(x, t_2)$  при этом минимизируя следующий функционал:

$$I = \int_0^{t_2} \int_0^l (\beta F^2 + 2\gamma F\Psi + \varepsilon \Psi^2) dx dt \quad (2.1)$$

Выбор постоянных  $\beta, \gamma, \varepsilon$  ( $\beta > 0, \beta\varepsilon > \gamma^2$ ) в некотором смысле произволен и для конкретной конструкции их следует связать с тем, какое воздействие (силовое или температурное) легче осуществить. Интеграл (2.1) не есть полная внутренняя энергия пластинки, но характеризует ее, в частных случаях может быть и внутренняя энергия.

Учитывая разложения  $F$  и  $\Psi$ , из (2.1) получим

$$I = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_2} (\beta f_k^2 + 2\gamma f_k \psi_k + \varepsilon \psi_k^2) dt \quad (2.2)$$

Имея в виду, что в последнем функционале слагаемые независимые, минимизация (2.2) для каждого  $k$  осуществляется в отдельности.

Таким образом, для каждого  $k$  с учетом (1.6) получим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \alpha x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = -\chi x_3 - \xi x_2 + v \quad (2.3)$$

при минимизации функционал

$$I_k = \frac{l}{2} \int_0^t (\beta u^2 + 2\gamma u v + \varepsilon v^2) dt; \quad \beta > 0; \quad \beta \varepsilon > \gamma^2 \quad (2.4)$$

Чтобы не загромождать формулы, индекс  $k$  опущен и использованы обозначения

$$\begin{aligned} x_{1k} &= \omega_k w_k, & x_{2k} &= \dot{w}_k, & x_{3k} &= T_k \\ \xi_k &= b_k \omega_k \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, & u_k &= f_k, & v_k &= \psi_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение системы (2.3) запишется

$$\bar{x}(t) = X(t, 0) \bar{X}(0) + \int_0^t X(t, \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix} d\tau \quad (2.6)$$

где  $X(t, \tau)$  - нормированная фундаментальная матрица, соответствующая однородной системе (2.3), выражение которой из-за громоздкости не приводится. Приведем выражение только двух элементов, которые нам и в дальнейшем понадобятся.

$$x_{12}(t, \tau) = -\frac{\omega(\mu_3 + \mu_2)e^{\mu_1(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1)} + \frac{\omega(\mu_3 + \mu_1)e^{\mu_2(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} - \frac{\omega(\mu_1 + \mu_2)e^{\mu_3(t-\tau)}}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)}$$

$$\begin{aligned} x_{13}(t, \tau) &= \frac{\alpha \omega e^{\mu_1(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1)} - \frac{\alpha \omega e^{\mu_2(t-\tau)}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} + \\ &+ \frac{\alpha \omega e^{\mu_3(t-\tau)}}{(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)} \end{aligned}$$



где  $\mu$  - корни характеристического уравнения

$$\mu^3 + \chi\mu^2 + (\omega^2 + a\zeta)\mu + \omega^2\chi = 0 \quad (2.7)$$

Рассматривается случай, когда корни уравнения (2.7) различные (физически, наверное, только этот случай возможен). Случай кратных корней не приводится, так как класс таких задач узкий, к тому же исследование можно провести совершенно аналогичным образом.

Через  $\bar{X}(0)$  обозначен вектор

$$\bar{X}(0) = \begin{pmatrix} c = \omega_k c_k \\ d = d_k \\ e = e_k \end{pmatrix}$$

Пусть требуется, чтобы пластинка в момент  $t = t_1 > 0$  принимала форму  $w_1(x, t_1)$ , а в  $t = t_2 > t_1 - w_2(x, t_2)$ .

Представляя  $w_1$  и  $w_2$  в виде рядов

$$w_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \sin \lambda_k x, \quad w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \sin \lambda_k x \quad (2.8)$$

из (2.6) получим следующие интегральные условия:

$$\int_0^{t_i} x_{12}(t, \tau) u d\tau + \int_0^{t_i} x_{13}(t, \tau) v d\tau = L_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$L_i = A^{(i)} - x_{11}(t_i)c - x_{12}(t_i)d - x_{13}(t_i)e$$

Обозначим [4]

$$h_{11}(\tau) = \begin{cases} x_{12}(t, \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < \tau \leq t_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$h_{12}(\tau) = \begin{cases} x_{13}(t, \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < \tau \leq t_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$h_{21}(\tau) = x_{12}(t_2, \tau), \quad h_{22}(\tau) = x_{13}(t_2, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t_2$$

тогда интегральные условия (2.9) примут следующий вид:

$$\int_0^{t_1} h_{11}(\tau) u d\tau + \int_0^{t_1} h_{12}(\tau) v d\tau = L_1$$

$$\int_0^{t_2} h_{21}(\tau) u d\tau + \int_0^{t_2} h_{22}(\tau) v d\tau = L_2 \quad (2.12)$$

Таким образом, проблема сводится к минимизации функционала (2.5) при наличии интегральных условий (2.12).

Так как функции  $h_j(\tau)$  имеют разрывы первого рода, то целесообразно полученную вариационную задачу решить с помощью проблемы моментов [5]. Исходя из вида функционала (2.5), норма основного пространства будет

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \min_{L_1 h_1 + L_2 h_2 = 1} \rho^2(h_{1l}(\cdot), h_{2l}(\cdot)) = \\ &= \frac{1}{\beta \varepsilon - \gamma^2} \int_0^t \min_{L_1 h_1 + L_2 h_2 = 1} [\varepsilon h_{1l}^2 - 2\gamma h_{1l} h_{2l} + \beta h_{2l}^2] dt > 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Норма сопряженного пространства выбирается в виде (2.4).

Так как система (2.3) вполне управляема [6], то  $\rho_0^2 > 0$ . После несложных вычислений получим

$$\rho_0^2 = \frac{1}{G} \frac{PR - Q^2}{\beta \varepsilon - \gamma^2}, \quad l_1^0 = \frac{L_1 R - L_2 Q}{G}, \quad l_2^0 = \frac{PL_2 - QL_1}{G} \quad (2.14)$$

где

$$G_1 = PL_2^2 = 2QL_1 L_2 + RL_1^2$$

$$P = \int_0^{t_2} (\varepsilon h_{11}^2 + \beta h_{12}^2 - 2\gamma h_{11} h_{12}) dt$$

$$Q = \int_0^{t_2} (\varepsilon h_{11} h_{21} + \beta h_{12} h_{22} - 2\gamma (h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21})) dt$$

$$R = \int_0^{t_2} (\varepsilon h_{21}^2 + \beta h_{22}^2 - 2\gamma h_{21} h_{22}) dt$$

Вектор  $h^0(t)$  будет

$$\begin{pmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} (L_1 R - L_2 Q) h_{11}(t) + (L_2 P - L_1 Q) h_{21}(t) \\ (L_1 R - L_2 Q) h_{12}(t) + (L_2 P - L_1 Q) h_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Если искать оптимальные значения управляющих воздействий  $u_0(t)$  и  $v_0(t)$  следующим образом:

$$u_0(t) = \sigma(\varepsilon h_1^0 - \gamma h_2^0); \quad v_0(t) = \sigma(\beta h_2^0 - \gamma h_1^0) \quad (2.16)$$

в постоянное определить из условия

$$\int_0^{t_2} (h_1^0 u^0 + h_2^0 v_0) dt = 1 \quad (2.17)$$

то получим

$$u^0 = \frac{Q}{PR - Q^2} (\varepsilon h_1^0 - \gamma h_2^0), \quad v^0 = \frac{Q}{PR - Q^2} (\beta h_2^0 - \gamma h_1^0) \quad (2.18)$$

Нетрудно проверить, что

$$\rho_2^2(u^0(\cdot), v^0(\cdot)) = \rho_0^{-2} \quad (2.19)$$

Таким образом, управляющие оптимальные функции будут

$$F^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \sin \lambda_k x, \quad \Phi^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^0(t) \sin \lambda_k x \quad (2.20)$$

Так как  $w_k \sim O(k^{-4})$ ,  $x_i, c, d, e, \sim (k^{-2})$ , элементы фундаментальной матрицы имеют нулевой порядок,  $A_k^{(i)} \sim (k^{-2})$ , а  $F$  и  $\Phi$  по (1.1), (1.2) принадлежат классу  $L_2$  по  $x_i$ , то  $f_k$  и  $\varphi_k$  имеют порядок не больше, чем  $k^{-1}$ , а из условия ограниченности "энергии" (2.2) коэффициенты  $\beta, \gamma, \varepsilon$  имеют порядок не больше, чем  $k^{-1}$ .

Величины  $P, Q$  и  $R$  из (2.15) имеют порядок не больше, чем  $k^{-2}$ , следовательно,  $u_k^0$  и  $v_k^0$  имеют порядок не больше, чем  $k^{-\delta}$ , где  $\delta > 1$ , т.е. функции  $F^0$  и  $\Phi^0$  принадлежат к классу  $L_2[0, t_2]$ .

3. Для иллюстрации вышеприведенных результатов рассмотрим конкретный пример для пластинки из меди. Она теплоизолирована ( $k^* = 0$ ), отсутствуют тепловые источники и не подается тепло через края ( $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ). Температура возникает только из-за деформации, а управление движением осуществляется только через нагрузку.

Предполагается, что пластинке сообщено начальное отклонение по одной полуволне, по такой же форме прилагается нагрузка. Тогда, вместо системы (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \varphi - 1.33 \cdot 10^5 \theta &= 10^8 f(\tau) \\ \frac{d\theta}{d\tau} + 1.196 \cdot 10^{-3} \theta + 0.85 \cdot 10^{-7} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = 1, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь введены обозначения и принято

$$\tau = \omega_1 t, \quad \omega_1^2 = \frac{Eh^2 \pi^4}{12(1-\nu^2)\rho l^4}, \quad \varphi = \frac{w_1(t)}{w_1(0)}$$

$$\theta = \alpha h T_1, \quad \frac{\pi h}{l} = 10^{-1}, \quad \frac{w_1(0)}{h} = 10^{-3}$$

Корнями характеристического уравнения (2.7) является

$$\mu_1 = -1.17 \cdot 10^{-3}; \quad \mu_{2,3} = \eta \pm i\delta; \quad \delta = 1.0113; \quad \eta = -1.35 \cdot 10^{-5} \quad (3.3)$$

Вопрос ставится следующим образом: нагрузку  $f(\tau)$  подобрать таким образом, чтобы в моменты  $\tau_1 = \frac{\pi}{2\delta}$  и  $\tau_2 = \frac{\pi}{\delta}$  амплитуда прогиба достигла

$$\varphi(\tau_1) = 3 \text{ и } \varphi(\tau_2) = 2.$$

Вычисление дает

$$\rho_0^2 = 0.02747 \quad (3.4)$$

Управляющая функция определяется как

$$f^0(\tau) = 10^{-8} h^0(\tau) \rho_0^{-2} \quad (3.5)$$

где

$$h_0(\tau) = l_1^0 h_1(\tau) + l_2^0 h_2(\tau)$$

$$h_1(\tau) = \begin{cases} (A \sin \delta \tau + B \cos \delta \tau) \exp(\eta(\tau_1 - \tau)) - A \exp(\mu_1(\tau_1 - \tau)), & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ 0, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases}$$

$$h_2(\tau) = (B \sin \delta \tau - A \cos \delta \tau) \exp(\eta(\tau_2 - \tau)) - A \exp(\mu_1(\tau_2 - \tau)), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_2$$

$$l_1^0 = 0.1679; \quad l_2^0 = 0.1692; \quad A = -2.64 \cdot 10^{-5}; \quad B = 0.9889$$

В частности, если температурный эффект отсутствует, то управляющая функция есть

$$0^8 f(\tau) = \begin{cases} 1.13 \cos \tau + 0.31 \sin \tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \\ 0.31 \sin \tau, & \frac{\pi}{2} < \tau \leq \pi \end{cases} \quad (3.6)$$

Аналогичным же образом можно осуществить управление движением и при совместном воздействии нагрузки и температуры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К устойчивости модуляционных волн в термоупругой пластине. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1993, т. 46, № 3-4, с.31-35.

2. Новоцкий В. Динамические задачи термоупругости.- М.: Мир, 1970, 256с.
3. Болотин В. В. Уравнение нестационарных температурах полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.- ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 361-363.
4. Габриелян М. С. Об управлении линейной системы, описываемой одним уравнением высокого порядка.- Сб. трудов ЦНИЛСУ, 1970, вып. 1, Ереван, с.188-193.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968, 475 с.
6. Калман Р. Об общей теории систем управления.- Тр. 1 конгресса ИФАК, т.2, М., Изд-во АН СССР, 1961, с.521-547.

Институт механики НАН Армении  
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию  
1.12.1994