ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 3, 1995 Механика

# НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Багдасарян Г.Е.

Գ.Ե. Բաղդասարյան

**Իդեալական հաղորդիչ սալի ոչ գծային տատանումները թեք մագնիսական դաշտում**

Աշխատանքում արտածված են իդեալական հաղորդիչ սալ-շերտի ոչ գծային մագնիսաառաձգական տատանումների հավասարումները և եզրային պայմանները թեք մագնիսական դաշտում: Ստացված հավասարումների մեջ, բացի դասական՝ երրորդ կարգի ոչ գծային անդամից, մասնակցում է մագնիսաառաձգական ծագում ունեցող քառակուսային ոչգծայնությամբ անդամ: Ստացված է բանաձև ոչ գծային տատանումների առաջին հաճախության որոշման համար: Ցույց է տրված, որ կախված արտաքին մագնիսական դաշտի կողմնորոշումից, դիտարկվող մագնիսաառաձգական համակարգը կարող է ներկայացնել որպես փափուկ տատանողական համակարգ:

**G.E.Bagdasarian**

Nonlinear Vibrations of an Ideally Conductive Plate in Inclined Magnetic Field

Получено уравнение и граничные условия нелинейных колебаний магнитоупругих идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. Это уравнение кроме обычного нелинейного члена третьего порядка ( характерного для классических задач упругих колебаний гибких пластинок) участвует новый член квадратной нелинейности магнитоупругого происхождения. Появление указанного нелинейного члена обусловлено возникновением продольного усилия в срединной плоскости пластинки, как результат взаимодействия продольного составляющего индуцированного тока проводимости с поперечной составляющей внешного магнитного поля. А это значит, что характер магнитоупругих нелинейных колебаний пластинки качественно идентичен характеру нелинейных колебаний гибких оболочек. Получена формула для определения первой частоты нелинейных магнитоупругих колебаний в зависимости от амплитуды колебания и от величины напряженности внешнего магнитного поля. Показано, что в зависимости от ориентации внешнего магнитного поля, характер нелинейных магнитоупругих колебаний пластинок, в отличие от классического случая, может быть мягким.

1. Пусть упругая изотропная идеально проводящая пластинка-полоса постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат $x_1 x_2 x_3$ так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью $x_1 x_2$. Пластинка занимает область $\left(0 \le x_1 \le a, -\infty < x_2 < \infty, -h \le x_3 \le h\right)$, колеблется в вакууме при наличии внешнего постоянного магнитного поля с заданным вектором напряженности $H\left(H_{01}, 0, H_{03}\right)$. Граничные условия на краях пластинки $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ таковы, что пластинка колеблется по форме цилиндрической поверхности с образующими параллельными координатной линии $0x_2$ (все величины не зависят от координаты $x_2$). Магнитная проницаемость материала пластинки считается равной единице.

Будем пользоваться основными предположениями нелинейной теории магнитоупругости гибких пластин [1], считая справедливой гипотезу недеформируемых нормалей. Будем считать также, что влиянием тангенциальных составляющих сил инерции и токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний пластинки можно пренебречь.

На основе принятых предположений и гипотезы магнитоупругости тонких тел [2] в работе [1] получены основные уравнения и соотношения, описывающие нелинейные колебания проводящей пластинки в магнитном поле. Нелинейные члены, входящие в эти уравнения, по своему происхождению бывают двух типов: члены, характеризующие геометрическую нелинейность гибкой пластинки [3], и члены характеризующие электродинамическую нелинейность. В работе [4], на основе решения одномерной задачи нелинейных колебаний проводящей пластинки в продольном магнитном поле, показано, что в случае идеально проводящей пластинки, если имеет место условие $\left[\left(1-\nu^2\right)H_{01}^2 / 2\pi E(kh)\right] << 1$ (здесь $\nu$ - коэффициент Пуассона, $E$ - модуль упругости материала пластинки, $k$ - волновое число) и если источником возмущений являются большие прогибы пластинки, то преобладающей является геометрическая нелинейность. Иными словами, если пластинка не слишком тонкая $\left(kh \geq 10^{-3}\right)$, а интенсивность внешнего магнитного поля не слишком велика ($H_0 \leq 5\cdot 10^4$ эрстед ) , то члены, учитывающие электродинамическую нелинейность, пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими членами геометрической нелинейности.

Учитывая сказанное и используя результаты работ [1,4,5] , уравнения нелинейных колебаний идеально проводящей пластинки - полосы в наклонным магнитном поле представляется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\left(1-\nu^2\right)H_{03}}{4\pi E}\left[H_{03}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-H_{01}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}\right]=0$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2Eh}{\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial w}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\}- \qquad (1.1)$$

$$-\frac{h}{2\pi}\left[\left(H_{01}^2+H_{03}^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-H_{01}H_{03}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-H_{01}\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}+H_{03}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_1^+-h_1^-}{2}\right)\right]=0$$

где $u\left(x_1,t\right), w\left(x_1,t\right)$ - искомые перемещения точек срединной плоскости пластинки, $D=2Eh^3/3\left(1-\nu^2\right)$ - цилиндрическая жесткость, $\rho$ - плотность материала пластинки, $h_1^\pm$- неизвестные граничные значения тангенциальной компоненты $h_1\left(x_1,x_3,t\right)$ индуцированного в вакууме магнитного поля $h$ на поверхностях $x_3=\pm h$ пластинки соответственно.

Величины $h_1^\pm$, входящие в (1.1), определяются из решения уравнений Максвелла для окружающей среды

$$rot\mathrm{h}=0, \quad div\mathrm{h}=0 \qquad (1.2)$$

с условиями

$$h_3 = H_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1} - H_{03}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h, \quad |x_1| \le a \quad (1.3)$$

$$h_1 = -H_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1} \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = a, \quad |x_3| \le h$$

на поверхности пластинки и условиями затухания магнитных возмущений на бесконечности

$$h_i \to 0 \quad \text{при} \quad x_1^3 + x_3^2 \to \infty, \quad i = 1,3 \qquad (1.4)$$

Приближенное решение задачи (1.2) - (1.4) приведено в работе [6] и для определения $h_1^{\pm}$ получены следующие приближенные выражения:

$$h_1^{\pm} = h_1\big|_{x_3=\pm h} = \mp\frac{1}{R}\left(H_{01}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - H_{03}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \pm hH_{03}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}\right) \qquad (1.5)$$

В (1.5) $k$ - волновое число, значения которого, в зависимости от граничных условий на контуре пластинки и от напряженности внешнего магнитного поля, приведены в [6,7]. Указанные значения волнового числа $k$ найдены путем асимптотического решения [8] соответствующей линейной задачи магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки. Причем, как показано в рабо-тах [6,7], ошибка, вносимая применением асимптотического метода и использованием формул (1.5), находится в пределах точности тонких пластин.

Подставляя (1.5) в (1.1) и используя уже принятое допущение $+H_{0i}^2/2\pi Ekh \approx 1 \ (i = 1,3)$, получим следующую исходную систему дифференциальных уравнений, описывающую одномерные нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{(1-\nu^2)H_{01}H_{03}}{4\pi Ekh}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\frac{h}{2\pi}\left(H_{03}^2 + \frac{H_{01}^2}{kh}\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \qquad (1.6)$$

$$-\frac{2Eh}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial w}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\} - \frac{H_{01}H_{03}}{2k\pi}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$$

При решении конкретных задач к уравнениям (1.6) должны быть присоединены обычные условия закрепления краев пластинки.

**2.** На основе уравнений (1.6) исследуем нелинейные магнитоупругие колебания пластинки с одним заделанным $(x_1 = a)$ и другим шарнирно опертым$(x_1 = 0)$ краем. Что касается граничных условий для перемещения и усилия в срединной плоскости, то будем считать, что кромка пластинки $x_1 = 0$ неподвижна, а кромка $x_1 = a$ связана с упругой идеально проводящей диафрагмой, препятствующей сближению кромок пластинки. Тогда граничным условиями задачи будут:

$$w=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при} \quad x_1=0$$

$$w=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial x_1}=0 \quad \text{при} \quad x_1=a \tag{2.1}$$

$$u=0 \quad \text{при} \quad x_1=0$$

$$u_1=0 \quad \text{при} \quad x_1=a+l$$

$$u=u_1 \quad \text{при} \quad x_1=a \tag{2.2}$$

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2\right]+\int_{-h}^{h}T_{11}dx_3=\frac{2E_1h_1}{1-\nu^2}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\int_{-h}^{h}T_{11}^{(1)}dx_3 \quad \text{при} \quad x_1=a$$

Здесь $E_1, \nu_1, 2h_1$ и $l$ - модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и ширина диафрагмы, $T_{11}$ и $T_{11}^{(1)}$ - компоненты тензора напряжений Максвелла в пластинке и в диафрагме соответственно.

$$T_{11}=\frac{1}{4\pi}\left[H_{03}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)-2H_{01}H_{03}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right],\qquad T_{11}^{(1)}=\frac{1}{4\pi}H_{03}^2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$u_1$ - продольные перемещения точек упругой диафрагмы, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}=0 \tag{2.3}$$

Из (2.3) и первого уравнения системы (1.6) находим

$$u_1=c_1(t)x_1+c_2(t)$$

$$u=-\frac{1}{2}\int_0^{x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 d\xi+\frac{(1-\nu^2)H_{01}H_{03}}{4\pi Ekh}w+c_3(t)x_1+c_4(t) \tag{2.4}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.2) и учитывая (2.1), определяем неизвестные функции интегрирования $c_i(t)$:

$$c_1=\frac{E(1-\nu_1^2)h}{E_1(1-\nu^2)h_1}c_3,\qquad c_2=-(a+l)c_1,\qquad c_4=0$$

$$c_3=\frac{r}{2a}\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 dx_1,\qquad r=\left[1+\frac{l}{a}\frac{E(1-\nu_1^2)h}{E_1(1-\nu_1^2)h_1}\right]^{-1} \tag{2.5}$$

Используя (2.5) из (2.4) найдем выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2=\frac{\left(1-\nu^2\right)H_{01}H_{03}}{4\pi Ekh}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{r}{2a}\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2dx_1$$

которое позволяет исключить функцию $u(x_1,t)$, из системы (1.6). В результате, рассматриваемая задача нелинейных магнитоупругих колебаний сводится к решению уравнения

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{h}{2\pi}\left(H_{03}^2+\frac{H_{01}^2}{kh}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-$$

$$-\frac{3H_{01}H_{03}}{2\pi k}\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{Ehr}{a\left(1-\nu^2\right)}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2dx_1=0 \qquad (2.6)$$

при условии (2.1) на краях пластинки.

Характерной особенностью уравнения (2.6) является то, что в нем, кроме обычного нелинейного члена третьего порядка (последний член в (2.6)), появился новый член квадратичной нелинейности магнитоупругого происхождения (предпоследний член в (2.6)). Появление указанного нелинейного члена обусловлено возникновением продольного усилия в срединной плоскости пластинки (результат взаимодействия индуцированного в напрвлении оси $0x_2$ токи проводимости с поперечной составляющей $H_{03}$ внешнего магнитного поля). А это значит, что магнитоупругие нелинейные колебания рассматриваемой пластинки качественно могут иметь характер упругих нелинейных колебаний цилиндрической панели [3]. В частности, как будет показано ниже, зависимость между амплитудой и частотой колебания рассматриваемой магнитоупругой системы может иметь мягкий характер, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний может уменьшаться. Отметим [3], что в отсутствии магнитного поля характер нелинейных колебаний пластин, в отличие от случаев оболочек, исключительно жесткого характера, то есть с увеличением амплитуды частота колебаний возрастает.

Представляя решение уравнения (2.6) в виде

$$w=f(t)\left[\left(\frac{x_1}{a}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{a}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{a}\right)\right]$$

удовлетворим условиям (2.1), а для определения неизвестной функции $f(t)$ из (2.6) методом Галеркина, получим следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\Omega^2\left(\xi+\beta\xi^2+\gamma\xi^3\right)=0 \qquad (2.7)$$

где

$$\Omega^2=\Omega_0^2\alpha,\qquad \alpha=1+\frac{1-\nu^2}{28E\pi}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(H_{03}^2+\frac{1}{kh}H_{01}^2\right)$$

$$\Omega_0=\sqrt{\frac{D}{2\rho h}}\frac{15{,}45}{a^2},\qquad \beta=\frac{3(1-\nu^2}{14\pi kh}\left(\frac{a}{2h}\right)\frac{H_{01}H_{03}}{\alpha E}$$

$$\gamma = \frac{384}{245}\frac{r}{a}, \qquad \xi = \frac{1}{2h} w\left(\frac{a}{2}, t\right) \tag{2.8}$$

$\Omega_0$ - частота собственных малых колебаний пластинки при отсутсвии магнитного поля, $\Omega$ - собственная частота при малых магнитоупругих колебаниях.

Из (2.7) видно, что если $\beta < 2\sqrt{\gamma}$, то пластинка имеет единственное (основное) положение равновесия $(\xi = 0)$, около которого происходят колебания. При $\beta > 2\sqrt{\gamma}$ пластинка имеет три положения равновесия. А это значит, что если магнитное поле наклонное $(\beta = 0)$ , и его компоненты удовлетворяют условию, вытекающему из условия $\beta > 2\sqrt{\gamma}$ ,

$$\left[1 + \overline{H}_{03}^2 + \frac{1}{kh}\overline{H}_{01}^2\right]^{-1} \overline{H}_{01}^2 \overline{H}_{03}^2 > \frac{512r}{735} \tag{2.8}$$

где

$$\overline{H}_{0i}^2 = \frac{1-\nu^2}{7\pi E}\left(\frac{a}{2h}\right)^2 H_{0i}^2, \qquad (i = 1,3)$$

то пластинка может совершить нелинейные колебания как около основного положения равновесия, так и около изогнутых положений. Отметим, что при $\beta = 0$ (либо магнитное поле отсутствует, либо не является наклонным) колебания пластинки происходят исключительно около основного положения равновесия.

Для отыскания амплитудно - частотной зависимости нелинейных магнитоупругих колебаний найдем решение уравнеия (2.7), отвечающее начальным условиям

$$\xi = \frac{A_0}{2h}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = 0 \qquad \text{при } t = 0 \tag{2.9}$$

методом возмущений [3]. Введем безразмерные параметры прогиба, времени и малый параметр $\varepsilon$ следующим образом:

$$x(t) = \frac{1}{A_0} w\left(\frac{a}{2}, t\right), \qquad \tau = \omega t, \qquad \varepsilon = \frac{A_0}{a} \tag{2.10}$$

где $\omega$ - отыскаемая частота нелинейных магнитоупругих колебаний. Учитывая (2.10), уравнение (2.7) и начальные условия (2.9) представим в виде

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \Omega^2\left(x + \delta\varepsilon x^2 + \eta\varepsilon^2 x^3\right) = 0$$

$$x = 1, \qquad \frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{2.11}$$

где

$$\delta=\frac{3\left(1-\nu^2\right)}{14\pi kh}\left(\frac{a}{2h}\right)^2\frac{H_{01}H_{03}}{\alpha E},\qquad \eta=\frac{384}{245}\left(\frac{a}{2h}\right)^2\frac{r}{\alpha} \tag{2.12}$$

Решение задачи Коши (2.11) и величину $\omega$ представим в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon$ :

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.11) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим следующую цепь последовательных задач Коши относительно линейных уравнений:

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2x_0=0$$

$$x_0=1,\qquad \frac{dx_0}{d\tau}=0\qquad \text{при } \tau=0 \tag{2.14}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2x_1=\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{2\omega_1}{\omega_0}x_0-\delta x_0^2\right)$$

$$x_1=0,\qquad \frac{dx_1}{d\tau}=0\qquad \text{при}\qquad \tau=0 \tag{2.15}$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2x_2=\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\left[\left(\frac{2\omega_2}{\omega_0}-\frac{3\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)x_0+\right.$$

$$\left.+\frac{2\omega_1}{\omega_0}x_1+2\delta\frac{\omega_1}{\omega_0}x_0^2-2\delta x_0x_1-\eta x_0^3\right]$$

$$x_2=0,\qquad \frac{dx_2}{d\tau}=0\qquad \text{при } \tau=0 \tag{2.16}$$

Кроме того, должно быть выполнено условие периодичности

$$x_i(\tau+2\pi)=x_i(\tau),\qquad i=0,1,2,\ldots \tag{2.17}$$

Решая задачу (2.14) при условии (2.17) найдем

$$x_0(\tau)=\text{const},\qquad \omega_0=\Omega \tag{2.18}$$

Из (2.15) , в силу (2.17) и (2.18), получаем

$$x_1=\frac{\delta}{6}(\cos2\tau+2\cos\tau-3)$$

$$\omega_1=0 \tag{2.19}$$

Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.16), относительно $x_2(\tau)$ получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+x_2=-\frac{\delta^2}{3}(1+\cos 2\tau)-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2}+\frac{8^2}{3}\right)\cos 3\tau+$$
$$+\left(\frac{2\omega_2}{\omega_0}+\frac{5}{6}\delta^2-\frac{3}{4}\eta\right)\cos\tau \qquad (2.20)$$

Из (2.20) видно, что решение уравнения (2.20) удовлетворяет условию периодичности (2.17), если коэффициент при $\cos\tau$ равен нулю, то есть если

$$\frac{\omega_2}{\omega_0}=\frac{3}{8}\eta-\frac{5}{12}\delta^2 \qquad (2.21)$$

Учитывая (2.10), (2.18), (2.19), и (2.21) из (2.13) для определения первой частоты нелинейных магнитоупругих колебаний получается следующая приближенная формула:

$$\frac{\omega^2}{\Omega_0^2}=1+\overline{H}_{03}^2+\frac{1}{kh}\overline{H}_{01}^2+\left(\gamma_1-\gamma_2\frac{\overline{H}_{01}^2\overline{H}_{03}^2}{1+\overline{H}_{03}^2+\frac{1}{kh}\overline{H}_{01}^2}\right)A^2 \qquad (2.22)$$

где

$$A=\frac{A_0}{2h},\qquad \gamma=\frac{288}{245}r,\qquad \gamma_2=\frac{15}{2(\alpha k)^2} \qquad (2.23)$$

Рассматривая формулу (2.22), легко заметить, что:

а) частота $\overline{\omega}$ линейных магнитоупуругих колебаний $(A=0)$ определяется формулой

$$\frac{\overline{\omega}^2}{\Omega_0^2}=1+\overline{H}_{03}^2+\frac{1}{kh}\overline{H}_{01}^2 \qquad (2.24)$$

и существенно увеличивается с увеличением величины напряженности внешнего магнитного поля [2];

б) характер нелинейных колебаний зависит от знака коэффициента при $A^2$. Если напряженность магнитного поля достаточно мала, то коэффициент при $A^2$ положителен и с увеличением амплитуды частота колебаний возрастает (жесткая колебательная система). Если же указанный коэффициент отрицательный (такая возможность обеспечивается тем, что $0\le r\le 1$ и вторая величина в скобках в формуле (2.22) - монотонно возрастающая функция напряженности и магнитного поля), то учет нелинейности приводит к уменьшению частоты колебаний (мягкая колебательная система). Причем, как будет показано ниже, частота нелинейных магнитоупругих колебаний при достаточно большой амплитуде возмущений и высокой напряженности поля может быть меньшим частоты свободных линейных колебаний $\left(\omega^2<<\Omega_0^2\right)$.Отметим еще раз, что последние утверждения имеют место только в случае наклонного магнитного поля $\left(H_{01}H_{03}\ne 0\right)$.

Для выяснения зависимости частоты нелинейных колебаний от напряженности магнитного поля рассмотрим случай, когда кромки пластинки свободно смещаются $(r=0)$ и $H_{01}^2 = khH_{03}^2$. В этом случае формула (2.22) принимает вид

$$\frac{\overline{\omega}^2}{\Omega_0^2} = 1 + 2\overline{H}_{03}^2 - \gamma_2 kh \frac{\overline{H}_{03}^4}{1+2\overline{H}_{03}^2} A^2 \tag{2.25}$$

Из (2.25) следует, что если $A^2 \le \overline{A}^2 = 4/\gamma_2 kh$, то с увеличением $\overline{H}_{03}$ частота нелинейных колебаний возрастает (оставаясь меньшей от частоты линейных магнитоупругих колебаний). Если же $A^2 > \overline{A}^2$, то с увеличением напряженности магнитного поля частота нелинейных колебаний в начале увеличивается, достигая максимума для определенного значения $\overline{H}_{03}$, после чего уменьшается и при

$$\overline{H}_{03} > \overline{H}_{03}^{\bullet}, \text{ где } \left(\overline{H}_{03}^{\bullet}\right)^2 = \frac{A^2}{2\left(A^2 - \overline{A}^2\right)} \tag{2.26}$$

становится меньшей, чем $\Omega_0$ (выясним, что $\Omega_0$ - частота линейных упругих колебаний при отсутствии магнитного поля).

Для определенности отметим, что при $\overline{H}_{03} = \overline{H}_{03}^{\bullet}$ и $A = l\overline{A}$, где $l > 1$, имеем $\delta\varepsilon = \sqrt{1{,}2}\,l^{-1}$, следовательно, если $l > \sqrt{1{,}2}$, то выполняется необходимое условие $\delta\varepsilon <$ применения метода возмущений.

В заключении отметим, что уравнение (2.7) можно решить, применяя различные приближенные методы нелинейных колебаний (его можно решить и точно при помощи эллиптических функций), таких как метод Бубнова - Галеркина, метод гармонического баланса, метод малого параметра и т.д. В разложении амплитудно - частотной зависимости, полученной на основе любого из указанных методов (в том числе и на основе точного решения), амплитуда колебаний входит, начиная со второй степени (см. формулу (2.22)). В работе [9] методом Бубнова - Галеркина получена указанная зависимость, в которой входит линейный член от амплитуды колебания. Причиной этого сомнительного результата (использованного в [3] ) является то, что ортогонализация произведена не по полному периоду колебаний, а по четверти периода. О правильном качественном характере амплитудно - частотной зависимости и о неприменимости ортогонализации по четверти периода обратил мое внимание мой друг М.М.Минасян, которому за это и за полезные обсуждения приношу глубокую благодарность.

## Литература


1. *Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н.* Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985,т.38, № 2.
2. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. - М.:Наука, 1977.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек . - М.:Наука, 1972.
4. *Багдасарян Г.Е., Хачатрян Г.М.* Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле. - Изв. НАН РА, Механика, 1991.
5. *Багдасарян Г.Е.* Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин. - Прикл. мех., 1983, т.19, № 12.
6 *Багдасарян Г.Е.* Применение асимптотического метода В.В.Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин. - Проблемы машиностроения, 1986, вып.25.
7. *Акопян П.З., Багдасарян Г.Е.* Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т.40, № 3.
8. *Болотин В.В.* Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. - Инж. сб., 1960, 31.
9. *Григолюк Э.И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней. - Изв. АН СССР, отдел техн.наук, 1955, № 3.


Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.12.1993