

МАЛОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТАВНОГО КЛИНА

Сафарян Н.Б.

Մաֆարյան Ն.Բ.

Նարթ-լարվածային բաղադրյալ սեպի թերլարվածային վիճակը

Նարթ-լարվածային վիճակի դեպքում ուսումնասիրված է բաղադրյալ սեպի կոնտակտային մակերևութի անկյունային կերի շրջակայքում լարումների դաշտը, երբ բաղադրյալ սեպի արտաքին եզրերից մեկը ազատ է լարումներից, իսկ մյուս եզրի վրա շոշափող լարումը և նորմալ փնդակոխությունը հավասար են զրոյի (սահող կոնտակտ): Մեպիից յուրաքանչյուրի կյուրը ընդունվում է անսեղմելի և ասփեանային ամրապնդվող, նույն ամրապնդման ցուցիչով: Տարբեր են միայն դեֆորմացիայի գործակիցները: Ընդհանուր դեպքում յուրաքանչյուր փրոյություն խնդիր բերվում է 4-դր-կարգի ոչ գծային հավասարումների համակարգի ինքնգրման: Կերջավոր լարումների դեպքում թվային մեթոդով հավասարումների համակարգերը ինքնգրված են և α, β հարթության մեջ կառուցված են թերլարվածային և գերլարվածային փրոյությունները բաժանող կորերը:

SAFARIAN N.B.

Low-stress Level of Plane-stressed Compound Wedge

Рассматривается задача малонапряженности на крае контактной линии составного клиновидного тела из степенно-упрочняющихся материалов в условиях плоского напряженного состояния. Явление малонапряженности линейно-упругих составных тел впервые исследовано в работе [1]. В монографии [2] изучаются вопросы малонапряженности составных тел из степенно-упрочняющихся материалов при плоской деформации. Аналогичные исследования проведены в [3,4] для однородного или кусочно-однородного клина.

В теории линейной упругости, как известно, плоское напряженное состояние и плоская деформация описываются одинаковыми математическими уравнениями. При нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями исследования плоского напряженного состояния и плоской деформации существенно отличаются. Разрешающие уравнения, описывающие плоское напряженное состояние, относительно сложнее, чем уравнение при плоской деформации.

В настоящей работе, в случае плоского напряженного состояния, при помощи местного решения изучается поведение поля напряжений в окрестности клиновидного выступающего или входящего края контактной поверхности составного тела, когда одна грань свободна от нагрузок, а на другой грани касательное напряжение и нормальное перемещение равны нулю.

В полярной системе координат угловая точка выбрана за начало системы координат; ось $\theta = 0$ направлена по контактной поверхности, а ось Z - перпендикулярна к плоскости составного клина.

В каждой области составного клина имели уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Закон упрочнения

$$\sigma_0 = k \varepsilon_0^m \quad (2)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2}$$

$$\varepsilon_0 = 2 \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

- соответственно, интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига, m - показатель упрочнения. Принимается, что степени упрочнения m обоих материалов одинаковы, а модули деформации k различны.

Соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$\sigma_r - \sigma = 2k\varepsilon_0^{m-1} \varepsilon_r, \quad \sigma_\theta - \sigma = 2k\varepsilon_0^{m-1} \varepsilon_\theta$$

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 2k\varepsilon_0^{m-1} \gamma_{r\theta} \quad (3)$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta)$ - среднее напряжение, и, кроме того, принято условие несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta = 0$$

В каждой из клиновидных областей $-\beta \leq \theta \leq 0$ и $0 \leq \theta \leq \alpha$, поле перемещений ищем в виде

$$u_i(r, \theta) = r^{1-\lambda} f_i(\theta, \lambda), \quad v_i(r, \theta) = r^{1-\lambda} \psi_i(\theta, \lambda) \quad (4)$$

где $f_i(\theta, \lambda), \psi_i(\theta, \lambda)$ - произвольные функции, λ - физический параметр. Величины в этих областях обозначены, соответственно, индексами $i = 1, 2$.

Используя (3)-(4), компоненты напряжений через неизвестные функции $f_i(\theta, \lambda)$ и $\psi_i(\theta, \lambda)$ представляются в виде

$$\sigma_{ri} = 2k_i r^{-\lambda m} (\psi_i' + (3-2\lambda) f_i) \chi_i$$

$$\sigma_{\theta i} = 2k_i r^{-\lambda m} (2\psi_i + (3-\lambda) f_i) \chi_i \quad (5)$$

$$\tau_{r\theta i} = k_i r^{-\lambda m} (f_i' - \lambda \psi_i) \chi_i$$

$$\chi_i = \left(4(1-\lambda)^2 f_i^2 + 4(1-\lambda) f_i (f_i + \psi_i) + 4(f_i + \psi_i)^2 + (f_i' - \psi_i')^2 \right)^{\frac{m-1}{2}}$$

Функции $f_i(\theta, \lambda)$ и $\psi_i(\theta, \lambda)$ в каждой клиновидной области удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{aligned} & \left((f_i' - \lambda \psi_i) \chi_i \right)' - 2 \left((1 + \lambda m) \psi_i + \lambda (1 + m(3 - 2\lambda)) f_i \right) \chi_i = 0 \\ & \left((2\psi_i' + (3 - \lambda) f_i) \chi_i \right)' + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda m \right) (f_i' - \lambda \psi_i) \chi_i = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для функций $f_i(\theta, \lambda)$ и $\psi_i(\theta, \lambda)$ будут

$$\begin{aligned} \psi_i &= 0, \quad 2\psi_i' + (3 - \lambda) f_i = 0 \\ f_1' - \lambda \psi_1 &= 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad f_2' - \lambda \psi_2 = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta \end{aligned} \quad (7)$$

На контактной поверхности $\theta = 0$ должны удовлетворяться условия равенства напряжений $\sigma_{\theta i}$ и $\tau_{\theta i}$, а также непрерывности перемещений u_i и v_i . Тогда будем иметь еще следующие условия:

$$\begin{aligned} (2\psi_2' + (3 - \lambda) f_2) \chi_2 &= \gamma (2\psi_1' + (3 - \lambda) f_1) \chi_1 \\ (f_2' - \lambda \psi_2) \chi_2 &= \gamma (f_1' - \lambda \psi_1) \chi_1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$f_2 = f_1, \quad \psi_2 = \psi_1, \quad \gamma = k_1 / k_2 \quad \text{при } \theta = 0$$

Приведенная система дифференциальных уравнений (6) при краевых условиях (7), (8), в принципе определяет функции $f_i(\theta, \lambda)$, $\psi_i(\theta, \lambda)$ с точностью до постоянного неопределенного множителя, соответственно, в областях $0 \leq \theta \leq \alpha$ и $-\beta \leq \theta \leq 0$ и значение параметра λ в зависимости от параметров α, β, γ, m . Придавая различные числовые значения λ , из (6)-(8) численным способом определяем соотношения между параметрами α, β, γ, m . Условие $\lambda < 0$ в пространстве этих параметров определяет зону малонапряженности, а при $\lambda > 0$ - зону сильной концентрации напряжений. Полагая $\lambda = \lambda_*$, из (6)-(8) численными методами можно определить семейство кривых одинаковых степеней концентрации напряжений. Эти кривые $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m)$ - следы гиперповерхности $\lambda(\alpha, \beta, \gamma, m) = \lambda_*$ на координатной плоскости α, β в зависимости от γ и m .

При конечных напряжениях, то есть в случае $\lambda = 0$ требуется специальное исследование уравнений (1)-(3). В этом случае, компоненты перемещений, удовлетворяющие условию несжимаемости материалов, ищем в следующем виде:

$$u_i(r, \theta) = r f_i(\theta), \quad v_i(r, \theta) = r \psi_i(\theta) \quad (9)$$

Здесь $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$ - произвольные функции.

Исходя из закона степенного упрочнения (2),(3), компоненты напряжений представляются в следующей форме:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= 2k_i \left(\psi_i'(\theta) + 3f_i(\theta) \right) \chi_i(\theta) \\ \sigma_{\theta i} &= 2k_i \left(2\psi_i'(\theta) + 3f_i(\theta) \right) \chi_i(\theta) \\ \tau_{r\theta i} &= k_i f_i'(\theta) \chi_i(\theta)\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\chi_i(\theta) = \left(f_i'^2(\theta) + 4 \left(3f_i^2(\theta) + 3f_i(\theta)\psi_i'(\theta) + \psi_i'^2(\theta) \right) \right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Подставляя выражения напряжений (10) в уравнения равновесия (1), получим систему уравнений для определения неизвестных функций $f_i(\theta)$ и $\psi_i(\theta)$.

$$\begin{aligned}\left(f_i(\theta) \chi_i(\theta) \right)' - 2\psi_i'(\theta) \chi_i(\theta) &= 0 \\ \left(\left(2\psi_i'(\theta) + 3f_i(\theta) \right) \chi_i(\theta) \right)' + f_i'(\theta) \chi_i(\theta) &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

Граничные условия (7) для системы (11) принимают вид

$$\begin{aligned}\psi_1(\theta) = 0, \quad 2\psi_2'(\theta) + 3f_2(\theta) &= 0 \\ f_1'(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad f_2'(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta\end{aligned}\quad (12)$$

Условия на контактной поверхности будут

$$\left(2\psi_2'(\theta) + 3f_2(\theta) \right) \chi_2(\theta) = \gamma \left(2\psi_1'(\theta) + 3f_1(\theta) \right) \chi_1(\theta) \quad \text{при } \theta = 0 \quad (13)$$

$$f_2'(\theta) \chi_2(\theta) = \gamma f_1'(\theta) \chi_1(\theta), \quad f_2(\theta) = f_1(\theta), \quad \psi_2(\theta) = \psi_1(\theta) \quad \gamma = k_1 / k_2$$

Система дифференциальных уравнений (11) с граничными и контактными условиями (12), (13), в принципе определяет гиперповерхность $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, m) = 0$ конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации.

Для построения этой поверхности, удобно свести систему дифференциальных уравнений (11) к системе из восьми дифференциальных уравнений первого порядка, которая более удобна для численного интегрирования

$$\psi_i' = \frac{1}{2}(F_i - 3f_i), \quad f_i' = \tau_i, \quad F_i' = \Phi_i$$

$$\tau_i = \frac{I_i(F_i - 3f_i) + (1-m)\tau_i(F_i\Phi_i + 3f_i\tau_i)}{I_i + (m-1)\tau_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения :

$$I_i = \tau_i^2 + F_i^2 + 3f_i^2$$

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \left\{ (1-m)\tau_i F_i (3(m-1)f_i\tau_i^2 - I_i(F_i - 3f_i)) + \right. \\ & \left. + (I_i\tau_i + 3(m-1)f_i\tau_i F_i)(I_i + (m-1)\tau_i^2) \right\} / \left\{ (1-m)^2\tau_i^2 F_i^2 - \right. \\ & \left. - (I_i + (m-1)F_i^2)(I_i + (m-1)\tau_i^2) \right\}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Граничные условия для системы (14) будут

$$\psi_1(\theta) = 0, \quad \tau_1(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha$$

$$F_2(\theta) = 0, \quad \tau_2(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = -\beta \quad (15)$$

контактные условия (13) принимают вид

$$F_2(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma F_1(\theta)\chi_1(\theta), \quad \tau_2(\theta)\chi_2(\theta) = \gamma\tau_1(\theta)\chi_1(\theta)$$

$$f_2(\theta) = f_1(\theta), \quad \psi_2(\theta) = \psi_1(\theta), \quad \gamma = k_1 / k_2 \quad \text{при } \theta = 0 \quad (16)$$

Компоненты напряжений (10) представляются в следующей форме:

$$\sigma_n = k_i(F_i + 3f_i)\chi_i, \quad \sigma_{\theta i} = 2k_i F_i \chi_i$$

$$\tau_{\theta i} = k_i \tau_i \chi_i, \quad \chi_i = \left(\tau_i^2 + F_i^2 + 3f_i^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad (17)$$

Когда клин изготовлен из одного нелинейного однородного материала, то есть при $\gamma = 1$, систему уравнений (14) будем иметь только для области $0 \leq \theta \leq \alpha$, а граничные условия (15) запишутся в виде

$$\psi(\theta) = 0, \quad \tau(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha$$

$$F(\theta) = 0, \quad \tau(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \quad (18)$$

Система уравнений (14), записанная для одной области, вместе с условиями (18) устанавливает связь между параметрами α и m .

Если составной клин изготовлен из линейно-упругих материалов, принимая в (11) $m = 1$, будем иметь уравнение $f_i''' + 4f_i' = 0$, общее решение которого есть

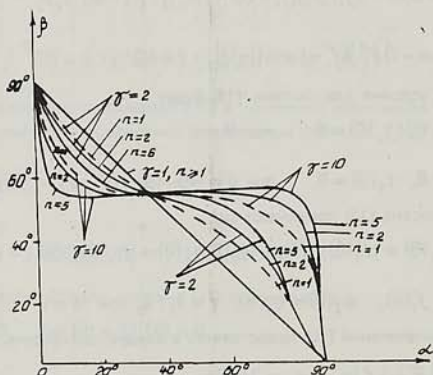
$$f_i(\theta) = C_{1i} + C_{2i} \sin 2\theta + C_{3i} \cos 2\theta \quad (19)$$

где C_{1i}, C_{2i} и C_{3i} — произвольные постоянные.

Используя граничные и контактные условия (15),(16) при $m =$ и выражение $f_i(\theta)$ (19), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \cos 2\beta \sin 2\alpha - \sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha \sin 2\beta + \\ & + \gamma \sin 2\alpha (1 + 3 \cos 2\beta) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение (20) на плоскости α, β определяет семейство предельных кривых, отделяющих зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений для линейных несжимаемых материалов при случае плоского напряженного состояния.



фиг. 1

На фиг.1 показано семейство предельных кривых $\beta = \beta(\alpha, \gamma, m)$, построенных при помощи численных решений системы уравнений (14) при граничных условиях (15), (16), отделяющих зону малонапряженности (ниже кривых) от зоны сильной концентрации напряжений (выше кривых). Штриховыми линиями указаны эти кривые для линейно-упругого несжимаемого материала. На графиках указан параметр $n = 1/m$.

Из характера изменения этих кривых следует, что при увеличении степени упрочнения n зона малонапряженности уменьшается, если угол у сильного материала меньше, чем у слабого, и, наоборот, эта зона увеличивается, если угол у сильного материала больше, чем у слабого.

Численное интегрирование системы (14) с условиями (15), (16) осуществляется следующим методом. Так как функции ψ , не участвуют в остальных уравнениях (участвуют производные), то, исключая их, мы получаем системы дифференциальных уравнений шестого порядка с шестью однородными граничными условиями. Для каждого фиксированного β , изменяя α дискретным шагом, начиная с $\alpha = 0$, находим первое α , для которого система (14) с условиями (15),(16) имеет ненулевое решение, которое определяется методом пристрелки [5], суть которого заключается в следующем. Полагая

$f_2(-\beta) = p$, систему можно решить при помощи метода решения задачи Коши (в нашей задаче используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка). Система (14) будет решена, если будет найдено значение p , при котором $\tau_1(\alpha) = 0$. Получается функциональная зависимость между случайно выбранным p и $\tau_1(\alpha)$, $G: p \rightarrow \tau_1(\alpha)$. Функция $G(p)$ в явном виде неизвестна, однако ее значение для любого значения p можно вычислить численным интегрированием системы (14) с условиями (15),(16). Фиксированному β соответствует такое α , при котором $G(p) = 0$ имеет ненулевое решение, то есть существует $p \neq 0$ такое, что, полагая $f_2(-\beta) = p$ и решая систему (14) с условиями (15)-(16), получим $\tau_1(\alpha) = 0$.

Л и т е р а т у р а

1. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987, 380 с.
2. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992, 712 с.
3. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Александров В.М., Гришин С.А.* Напряженно-деформированное состояние малой окрестности вершины клина при физической нелинейности и различных граничных условиях. ПММ, 1987, т. 51, вып.4, с.653-661.
5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж.Холла и Дж.Уатта.-М.: Мир, 1979.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.03.1994

ԿԱՆՈՆՆԵՐ ՆՇԻՆԱԿՆԵՐԻ ՆՄԱԿ

1. Նայաստանի ԳԱԱ տեղեկագրի «Մեխանիկա» սերիային ներկայացվող հոդվածներին կցվում է տպագրության թույլտվություն այն հիմնարկից, որտեղ կապարված է աշխատանքը:

2. Հոդվածները ներկայացվում են հայերեն, անգլերեն կամ ռուսերեն, երկու օրինակից, հնարավորին չափ սեղմ, պարզ շարաված:

3. Բանաձեւերն ու նշանակումները գրվում են պարզ ու որոշակի, ընդ որում, մեծատառերը ցայտուն կերպով պետք է տարբերվեն փոքրատառերից:

Եթե մեծատառերը եւ փոքրատառերը նման են իրենց գծագրությամբ, մեծատառերն ընդգծվում են երկու գծիկով, իսկ փոքրատառերը երկու գծիկով նշվում են վերեւից:

Օրինակ՝ \underline{V} եւ \underline{v} , \underline{O} եւ \underline{o} , \underline{K} եւ \underline{k} , \underline{U} եւ \underline{u} , \underline{S} եւ \underline{s} եւ այլն:

Պետք է հատուկ տարբերակել \underline{O} -ն, \underline{o} -ն եւ 0 -ն (զրո), որի համար 0 -ն (զրո) պետք է ընդգծել ներքեւից քառակուսի փակագծով (մափիփով):

Անհրաժեշտ է խնամքով գրել իրար նման տառերը՝ g եւ q , l եւ e , l , J , Y , u եւ n եւ այլն:

Նուստրեն տառերն ընդգծել կարմիր մափիփով:

Ինդեքսն ու աստիճանացույցը պետք է սեւ մափիփով նշել աղեղով՝ համապատասխանաբար \cap կամ \cup օրինակ՝ N_i^4 :

Մաթեմատիկական նշանակումները (\sin , \arcsin , \ln , \lg , \lim , const եւ այլն) ընդգծել հորիզոնական ուղիղ փակագծով:

4. Գրականությունը, ընդհանուր ցուցակով, կցվում է հոդվածի վերջում: Ընդ որում, տվյալները նշվում են հետևյալ հաջորդականությամբ, եթե զիրք է՝ հեղինակի ազգանունը, անվան, հայրանվան սկզբնատառերը, աշխատության վերնագիրը, ամսագրի անունը, հրատարակման տարեթիվը, հատորը, պրակը, էջերը:

Տեքստում հղումները նշվում են քառակուսի փակագծերի մեջ առնված թվերով:

5. Գծագրերը կցվում են առանձին թերթերով: Նկարների տեղերը նշվում են ձախ լուսանցքում «նկ ...» նշումով:

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи, представляемые в "Известия НАН Армении, Механика", должны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнена работа.

2. Статьи представляются на армянском, английском или русском языках в двух экземплярах в возможно сжатой и ясно изложенной форме.

3. Формулы и все обозначения вписываются четко и ясно, при этом должно быть отчетливое различие между заглавными и строчными буквами.

В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками, а строчные отметить двумя черточками сверху, например: \underline{V} и \underline{v} , \underline{O} и \underline{o} , \underline{K} и \underline{k} , \underline{U} и \underline{u} , \underline{S} и \underline{s} и т. д. Следует также делать различие между \underline{O} , \underline{o} и 0 (нулем), для чего 0 (нуль) следует подчеркнуть снизу квадратной скобкой (карандашом).

Необходимо тщательно вписывать похожие друг на друга буквы например g и q , l и e , l , J , Y , u и n и др. Греческие буквы подчеркивать красным карандашом.

Индексы и показатели следует отметить черным карандашом соответственно дугой \cap или \cup , например: N_i^4 .

Математические обозначения, например: \sin , \arcsin , \ln , \lg , \lim , const и т. д., надо подчеркивать горизонтальной прямой скобкой.

4. Литература приводится общим списком в конце статьи, при этом в нижеследующей последовательности указываются: для книги - фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания, издательство, год издания, страницы; для журнала - фамилия и инициалы автора, наименование работы, название журнала, год издания, том (подчеркнуть) и выпуск. Ссылка на литературу в тексте дается цифрой в квадратных скобках.

5. Чертежи прилагаются на отдельных листах. Места иллюстраций указываются на левом поле страницы отметкой "фиг. ..."