

ОБ ОДНОЙ АНТИПЛОСКОЙ
ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
ДЛЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА

Саргсян А.М., Хачикян А.С.

Ա.Մ.Սարգսյան, Ա.Ս.Խաչիկյան

Բազադրյալ մարմնի համար էլեկտրատառադականության մի հակահարթ խնդրի մասին

Էլեկտրատառադականության գծային տեսության դրվածքով ուսումնասիրված է կտր առ կտր համասեռ սեպի տեսք ունեցող ընդլայնական կտրվածքով պրիզմայաձև մարմնի լարվածային դեֆորմացիոն վիճակը:

Ցույց է տրված, որ էլեկտրական եւ մեխանիկական դաշտերի կապակցվածությունը ունի որակական ազդեցություն բազադրյալ մարմնի միացման մակերեսային եզրի շրջակայքում առաձգական լարումների վարքի վրա:

A.M.Sargsian, A.S.Khachikian

On the One Antiplane Problem of Electroelasticity for Compound Body

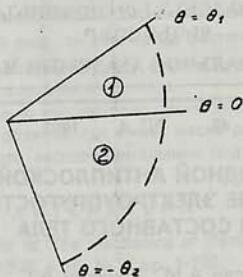
В постановке линейной теории электроупругости изучено напряженно-деформированное состояние призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина. На гранях призматического тела заданы перемещения и электростатические потенциалы.

Показано, что связанность механических и электрических полей оказывает качественное влияние на поведение упругих напряжений в окрестности края поверхности контакта составного тела.

Поведение несвязанных стационарных физических полей (тепловых, электрических и магнитных, полей упругих напряжений при кручении и продольном сдвиге и т.д.) в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела изучено в работах [1,3].

В работе [4] определена особенность упругих напряжений вблизи угловой точки контура поперечного сечения, находящегося в условиях продольного сдвига однородного призматического тела из пьезокристалла класса $6\ mmm$. Показано, что в этой электроупругой задаче напряжения вблизи угловой точки имеют тот же порядок особенности, что и в соответствующей упругой задаче.

С целью выяснения влияния эффекта связанности механических и электрических полей на поведение упругих напряжений в данной работе рассмотрена антиплоская задача электроупругости для составного призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина, изготовленного из пьезокристаллов класса $6\ mmm$ гексагональной системы с различными электроупругими свойствами (фиг.1). Главная ось симметрии пьезокристалла (ось Z) перпендикулярна к плоскости поперечного сечения призматического тела и проходит через вершину составного клина.



(Фиг.1)

В цилиндрической системе координат при отсутствии массовых сил решение антиплоской задачи электроупругости для составного призматического тела приводится к интегрированию дифференциальных уравнений [5,6]

$$\Delta u_j(r, \theta) = 0, \quad \Delta \phi_j(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

со следующими граничными:

$$u_1(r, \theta_1) = f_1(r), \quad u_2(r, -\theta_2) = f_2(r) \quad (2)$$

$$\phi_1(r, \theta_1) = \psi_1(r), \quad \phi_2(r, -\theta_2) = \psi_2(r) \quad (3)$$

и идеальными электроупругими контактными условиями

$$u_1(r, 0) = u_2(r, 0), \quad \phi_1(r, 0) = \phi_2(r, 0) \quad (4)$$

$$\frac{c_{44}^{(1)}}{r} \frac{\partial u_1(r, 0)}{\partial \theta} + \frac{e_{15}^{(1)}}{r} \frac{\partial \phi_1(r, 0)}{\partial \theta} = \frac{c_{44}^{(2)}}{r} \frac{\partial u_2(r, 0)}{\partial \theta} + \frac{e_{15}^{(2)}}{r} \frac{\partial \phi_2(r, 0)}{\partial \theta} \quad (5)$$

$$\frac{e_{15}^{(1)}}{r} \frac{\partial u_1(r, 0)}{\partial \theta} - \frac{\epsilon_1}{r} \frac{\partial \phi_1(r, 0)}{\partial \theta} = \frac{e_{15}^{(2)}}{r} \frac{\partial u_2(r, 0)}{\partial \theta} - \frac{\epsilon_2}{r} \frac{\partial \phi_2(r, 0)}{\partial \theta} \quad (6)$$

В уравнениях (1) и условиях (2)-(6) u_j - упругие перемещения, ϕ_j - электростатические потенциалы, Δ - двумерный оператор Лапласа, $c_{44}^{(j)}$, $e_{15}^{(j)}$, ϵ_j - модули упругости, пьезомодули и диэлектрические проницаемости, соответственно, $f_j(r)$ и $\psi_j(r)$ - заданные функции.

Контактные условия (5) и (6) получаются из уравнений состояния [5]

$$\tau_{\theta r}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \gamma_{\theta r}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_{\theta}, \quad \tau_{rz}^{(j)} = c_{44}^{(j)} \gamma_{rz}^{(j)} - e_{15}^{(j)} E_r$$

$$D_{\theta} = e_{15}^{(j)} \gamma_{\theta r}^{(j)} + \epsilon_j E_{\theta}, \quad D_r = e_{15}^{(j)} \gamma_{rz}^{(j)} + \epsilon_j E_r \quad (7)$$

$$\gamma_{\theta z}^{(j)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz}^{(j)} = \frac{\partial u_j}{\partial r} r \rightarrow \infty$$

$$E_{\theta j} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta}, \quad E_{rj} = -\frac{\partial \Phi_j}{\partial r}$$

с учетом непрерывности $\tau_{\theta z}$ и D_{θ} на линии $\theta = 0$. Здесь $\tau_{\theta z}$ и τ_{rz} - компоненты упругих напряжений, $\gamma_{\theta z}$ и γ_{rz} - компоненты деформаций, E_{θ} и E_r - компоненты вектора напряженности электрического поля, D_{θ} и D_r - компоненты вектора электрической индукции.

К краевой задаче (1)-(6) применяется интегральное преобразование Мелина [7]

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^{p-1} dr, \quad f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(p) r^{-p} dp \quad (8)$$

Если на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) функция $f(r)$ исчезает как $r^{-\delta}$ ($\delta > 0$), а при $r \rightarrow 0$ остается ограниченной, то первый интеграл в (8) сходится при $0 < \operatorname{Re} p < \delta$, что и заключает в себе путь интегрирования L во второй формуле (8).

В результате применения преобразования Мелина к уравнениям (1) приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, решения которых имеют вид

$$\bar{u}_j(p, \theta) = A_j \cos p\theta + B_j \sin p\theta \quad (9)$$

$$\Phi_j(p, \theta) = K_j \cos p\theta + D_j \sin p\theta \quad (10)$$

Удовлетворяя преобразованным гранично-контактным условиям, полученным из (2)-(6), после применения преобразования Мелина для неизвестных коэффициентов получим

$$A_1 = A_2, \quad K_1 = K_2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta(p) A_2 = & \bar{f}_1(p) [(1+b_1)C_1 S_2 + (\varepsilon + eb_1)S_1 C_2] S_2 + \\ & + \bar{f}_2(p) [(c+eb_1)C_1 S_2 + (c\varepsilon + e^2 b_1)S_1 C_2] S_1 - \\ & - b_1 \varepsilon (e_{15}^{(1)})^{-1} (e - \varepsilon) [\bar{\psi}_1(p) C_2 - \bar{\psi}_2(p) C_1] S_1 S_2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta(p) K_2 = [\bar{f}_2(p) C_1 - \bar{f}_1(p) C_2] (c - e) \varepsilon^{-1} S_1 S_2 +$$

$$+ \bar{\psi}_1(p) [(1+b_1)C_1 S_2 + (c+eb_1)S_1 C_2] S_2 +$$

$$+\bar{\psi}_2(p)[(\varepsilon+eb_1)C_1S_2+(c\varepsilon+e^2b_1)S_1C_2]S_1 \quad (13)$$

$$\Delta(p)B_j = [\bar{f}_1(p)C_2 - \bar{f}_2(p)C_1][\{c_j+e_jb_1\}C_1S_2 + \{c_j\varepsilon+ee_jb_1\}S_1C_2] + \\ + (-1)^j(e-\varepsilon)\varepsilon_1(e_{15}^{(1)})^{-1}[\bar{\psi}_2(p)C_1 - \bar{\psi}_1(p)C_2]S_{3-j}C_j \quad (14)$$

$$\Delta(p)D_j = (c-e)e_{15}^{(1)}\varepsilon_1^{-1}[\bar{f}_1(p)C_2 - \bar{f}_2(p)C_1]C_jS_{3-j} - \\ - [\bar{\psi}_2(p)C_1 - \bar{\psi}_1(p)C_2][\{d_j+b_1e_j\}C_1S_2 + \{cd_j+ee_jb_1\}S_1C_2] \quad (15)$$

где

$$S_j = \sin p\theta_j, \quad C_j = \cos p\theta_j, \quad \varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1, \quad c = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(1)}, \quad \theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_2$$

$$b_1 = \frac{e_{15}^{(1)}e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(j)}\varepsilon_1}, \quad e = \frac{e_{15}^{(2)}}{e_{15}^{(1)}}, \quad d_j = \begin{cases} \varepsilon, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}, \quad e_j = \begin{cases} e, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}, \quad c_j = \begin{cases} c, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}$$

$$4\Delta(p) = [(c+1)\sin p\theta_+ + (c-1)\sin p\theta_-][(\varepsilon+1)\sin p\theta_+ + (\varepsilon-1)\sin p\theta_-] + \\ + b_1[(e+1)\sin p\theta_+ + (e-1)\sin p\theta_-]^2 \quad (16)$$

С помощью уравнений состояния (7) и (8)-(16) для упругих напряжений $\tau_{\theta r}$ и τ_{rz} получим:

$$\tau_{\theta r}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_{1j}(p, \theta)}{\Delta(p)} pr^{-p-1} dp \\ \tau_{rz}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_{2j}(p, \theta)}{\Delta(p)} pr^{-p-1} dp \quad (17)$$

где

$$F_{1j}(p, \theta) = [c_{44}^{(j)}B'_j + e_{15}^{(j)}D'_j] \cos p\theta - [c_{44}^{(j)}A'_j + e_{15}^{(j)}K'_j] \sin p\theta$$

$$F_{2j}(p, \theta) = [c_{44}^{(j)}A'_j + e_{15}^{(j)}K'_j] \cos p\theta + [c_{44}^{(j)}B'_j + e_{15}^{(j)}D'_j] \sin p\theta$$

$$(A'_j, B'_j, K'_j, D'_j) = (A_j, B_j, K_j, D_j)\Delta(p)$$

Для исследования поведения напряжений $\tau_{\theta r}$ и τ_{rz} в окрестности угловой точки контура поперечного сечения составного призматического тела (при $r \rightarrow 0$) дополним прямую L влево некоторым полукругом и применим тео-

рему о вычетах. Принимая, что полюсами подынтегральных функций в (17) являются только корни уравнения

$$\Delta(p) = 0 \quad (18)$$

(то есть окрестность угловой точки свободна от внешних воздействий) и что все они просты (в рассмотренных ниже примерах они, действительно, просты), будем иметь

$$\tau_{\theta_2}^{(j)} = - \sum_{n=1}^{\infty} r^{p_n-1} \frac{F_{1j}(-p_n, \theta)}{\Delta_1(p_n)} p_n \quad (19)$$

$$\tau_{r_2}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{p_n-1} \frac{F_{2j}(-p_n, \theta)}{\Delta_1(p_n)} p_n \quad (20)$$

Здесь $\Delta_1(p) = d\Delta(p)/dp$, $p_n (\operatorname{Re} p_n > 0)$ - корни уравнения (18). Уравнение (18) при конкретных значениях параметров $c, \varepsilon, e, b_1, \theta_1$ и θ_2 имеет бесконечное множество корней, которые могут быть пронумерованы по порядку возрастания их действительных частей.

На основании формул (19) и (20) заключаем, что около угловой точки контура поперечного сечения характер напряженного состояния определяется величиной действительной части $p_1 = \xi_1 + i\eta_1$. Если $\xi_1 > 1$, в малой окрестности угловой точки имеет место нулевое напряженное состояние. Если $\xi_1 < 1$, то при приближении к угловой точке напряжения неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\xi_1 - 1|$. При $\xi_1 = 1$ напряжения около угловой точки конечны и вообще отличны от нуля (предельный случай).

Таким образом, в исследуемой электроупругой задаче определение характера напряженного состояния около угловой точки контура поперечного сечения составного призматического тела, находящегося в условиях продольного сдвига, приводится к нахождению имеющего наименьшую положительную действительную часть корня $p_1 = \xi_1 + i\eta_1$ трансцендентного уравнения (18).

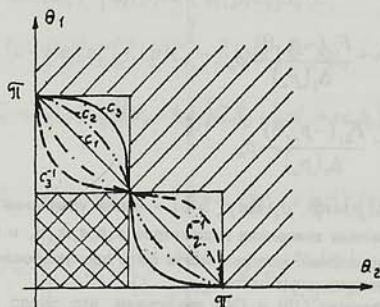
Не накладывая ограничения на электроупругие характеристики материалов, составляющих призматическое тело, рассмотрим один частный случай $\theta_1 = \theta_2$. Из уравнений (16) и (18) следует, что $p_1 = \pi/2\theta_1$. Следовательно, независимо от электроупругих свойств материалов составного тела напряжения при приближении к угловой точке контура поперечного сечения убывают до нуля, если $2\theta_1 < \pi$. При $2\theta_1 > \pi$ в окрестности угловой точки имеет место явление сильной концентрации напряжений. $2\theta_1 = \pi$ соответствует предельному случаю.

Рассмотрим некоторые другие частные случаи:

1. $c = \varepsilon = e$. Из (16)-(18) для определения p_n получим

$$\sin p(\theta_1 + \theta_2) + \frac{c-1}{c+1} \sin p(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (21)$$

В работах [1-3] показано, что корни этого уравнения действительны и просты и что соответствующие различным значениям c ($c_3 > c_2 > c_1 = 1$) предельные кривые ($p = 1$), разделяющие области в плоскости (θ_1, θ_2) , где напряжения в окрестности угловой точки стремятся к нулю или бесконечности, имеют вид, приведенный на фиг. 2.



Фиг. 2

Если точка, с координатами θ_1 и θ_2 и начало координат при данном значении c лежат на одной стороне предельной кривой, напряженное состояние в окрестности угловой точки будет нулевым. В противном случае имеет место сильная концентрация напряжений. Когда точка лежит на предельной кривой, в угловой точке напряжения будут конечными и отличными от нуля.

В области, заштрихованной на фиг. 2 двойной штриховкой, в окрестности угловой точки имеет место нулевое напряженное состояние независимо от электроупругих свойств материалов, а в области, заштрихованной простой штриховкой - сильная концентрация напряжений.

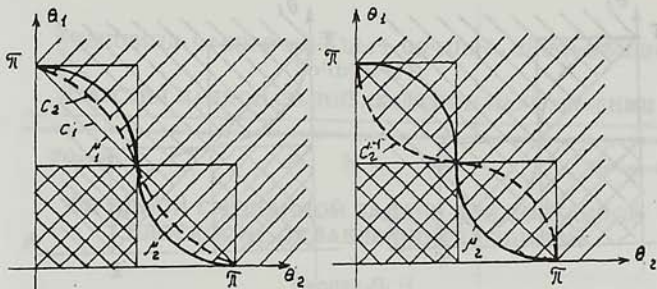
В случае $c = \dots$ приходим к результатам, полученным в работе [4].

2. $c = e \neq \varepsilon$. В этом случае из (18) получим

$$\left(\sin p\theta_+ + \frac{c-1}{c+1} \sin p\theta_- \right) \left(\sin p\theta_+ + \frac{\mu-1}{\mu+1} \sin p\theta_- \right) = 0 \quad (22)$$

где $\mu = (\varepsilon + cb_1) / (1 + b_1)$.

Равенство нулю первого множителя левой части (22) приводит к уравнению (21), предельные кривые которого имеются на фиг. 2. Аналогичные кривые получаются также из условия равенства нулю второго множителя. Соответствующая предельная кривая является границей области, заштрихованной простой штриховкой на фиг. 3а, 3б. Если углы θ_1 и θ_2 лежат в области, заштрихованной на фиг. 3а и 3б простой штриховкой, около угловой точки распределение напряжений имеет особенность. Аналогичная картина имеет место и в случае $\varepsilon = e \neq c$.



(Фиг. 3)

После несложных преобразований уравнение (18) можно привести к виду

$$Q_1 \sin^2 p\theta_+ + Q_2 \sin^2 p\theta_- + Q_3 \sin p\theta_+ \sin p\theta_- = 0$$

$$Q_1 = (c+1)(\varepsilon+1) + b_1(e+1)^2, \quad Q_2 = (c-1)(\varepsilon-1) + b_1(e-1)^2$$

$$Q_3 = (c+1)(\varepsilon-1) + (c-1)(\varepsilon+1) + 2b_1(e^2-1); \quad Q_1 > 0, \quad \begin{cases} (Q_2, Q_3) < 0 \\ (Q_2, Q_3) > 0 \end{cases} \quad (23)$$

Из представления (23) можно получить другие частные случаи.

3. $Q_3 = \pm 2\sqrt{Q_1 Q_2}$, $Q_2 > 0$. Из (17) и (23) следует

$$\sin p\theta_+ \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \sin p\theta_- = 0 \quad (24)$$

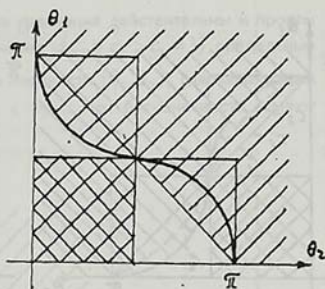
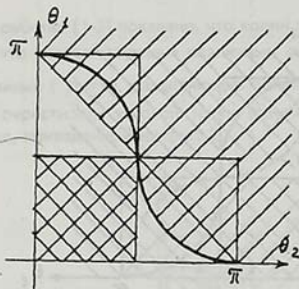
Легко показать, что корни уравнения (24) действительны и просты, если $Q_2 < Q_1$. Предельные кривые имеют вид, аналогичный кривым, представленным на фиг.2.

4. $Q_2 = 0$. Из уравнения (23) вытекает, что

$$\left(\sin p\theta_+ + \frac{Q_3}{Q_1} \sin p\theta_- \right) \sin p\theta_+ = 0 \quad (25)$$

Предельная кривая для $\sin p\theta_+ = 0$ представляет отрезок прямой $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Приравняв нулю второй множитель, получаем уравнение, аналогичное (21), корни которого действительны и просты, если $|Q_3| < Q_1$. Таким образом, предельная кривая в случае $Q_2 = 0$, $|Q_3| < Q_1$ представляет собой границу области, заштрихованной простой штриховкой на фиг. 4а, 4б.

5. $Q_3 = 0$. В случае $Q_2 < 0$ из (23) будем иметь



фиг. 4

$$(\sin p\theta_+ + \lambda \sin p\theta_-)(\sin p\theta_+ - \lambda \sin p\theta_-) = 0 \quad (26)$$

где $\lambda = \sqrt{|Q_2|/|Q_1|}$. Уравнение (26) аналогично уравнению (22). При условии $|Q_2| < Q_1$ предельные кривые и соответствующие области имеют приведенный на фиг. 3а и 3б вид. Для случая $|Q_2| < Q_1$ уравнения может иметь и комплексные корни.

Таким образом, эффект связанности электрических и механических полей оказывает качественное влияние на поведение характеристик обеих полей в окрестности угловой точки контура. В рассмотренных частных случаях имеет место увеличение зоны концентрации характеристик полей.

Л и т е р а т у р а

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах.- Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1987. с.338.
2. Саргсян А. М., Хачикян А. С. Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела.- Докл. АН Арм ССР, 1988, № 4, с.161- 165.
3. Аксентян О. К., Лущик О. Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. - Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №5, с.102-108.
4. Галпчян П.В. Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла.- Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1990, т.43, №5, с.21-25.
5. Партон В.З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.- М.: Наука, 1988. 472 с.
6. Аветисян А. С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде.- Изв. АН АрмССР, Механика, 1985, т. 38, №1, с. 12-19.
7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.