

**РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРА  
ИМЕЮЩЕГО СОБСТВЕННЫЙ ВЕС**

Макарян В. С.

Մակարյան Վ. Ս.

**Սեփական կշիռ ունեցող գլանի հավասարակշռությունը**

Աշխարհանում լուծված է եզրերում ամրակցված կլոր գլանի ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիրը սեփական կշռի հաշվառմամբ:

Անհայր ֆունկցիաները ներկայացնելով Բեսելի առաջին սեռի ֆունկցիաների շարքի փոխում, համապարասխան ձևով ընտրելով սեփական արժեքները, հնարավոր է լինում խնդիրը բերել լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անկերք համակարգերի:

MAKARIAN V.S.

**Equilibrium of Cylinder Having Dead Weight**

В работе решена задача для круглого цилиндра защемленного по торцам, с учетом собственного веса. Осирываясь на разложении искомых функций по функциям Бесселя первого рода, надлежащим выбором собственных чисел удается свести задачу к вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Задачи для цилиндра рассматривались в работах [1-7].

Цилиндр имеющий собственный вес, действующий вертикально, расположен так, что ось цилиндра направлена горизонтально, защемлен по торцам. Задача является неосесимметричной, поэтому необходимо построить решение основываясь на общих уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах.

**1. Построение общего решения.** В цилиндрических координатах перемещения представляются в виде

$$u_r(r, z, \varphi) = u(r, z) \cos \varphi, u_z(r, z, \varphi) = w(r, z) \cos \varphi, u_\varphi(r, z, \varphi) = v(r, z) \sin \varphi$$

то есть из общего решения пространственной задачи берем только первую гармонику.

Функции  $u, v, w$  удовлетворяют неоднородным уравнениям с учетом массовых сил

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{u+2v}{r^2} + \frac{\rho g}{G} = 0$$

$$\Delta v - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\theta}{r} - \frac{2v+v}{r} - \frac{\rho g}{G} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u+v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \quad (2)$$

Учитывая, что напряжения содержат координату  $\varphi$  только в виде множителя через тригонометрические функции, введем новые неизвестные безразмерные функции не зависящие от координаты  $\varphi$

$$\frac{\sigma_r(r, z, \varphi)}{2G \cos \varphi} \equiv \sigma_r(r, z) = \frac{\partial u}{\partial r} + m\theta; \quad \frac{\tau_{rz}(r, z, \varphi)}{2G \cos \varphi} \equiv \tau_{rz}(r, z) = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{\sigma_z(r, z, \varphi)}{2G \cos \varphi} \equiv \sigma_z(r, z) = \frac{\partial w}{\partial z} + m\theta; \quad \frac{\tau_{\varphi z}(r, z, \varphi)}{2G \sin \varphi} \equiv \tau_{\varphi z}(r, z) = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w}{r};$$

$$\frac{\sigma_\varphi(r, z, \varphi)}{2G \cos \varphi} \equiv \sigma_\varphi(r, z) = \frac{u+v}{r} + m\theta; \quad \frac{\tau_{r\varphi}(r, z, \varphi)}{2G \sin \varphi} \equiv \tau_{r\varphi}(r, z) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u+v}{r}. \quad (3)$$

В (1)-(3)  $\nu$ -коэффициент Пуассона,  $G$ - модуль сдвига, а параметр  $m$  зависит от  $\nu$

$$m = \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (4)$$

Общее решение неоднородных уравнений (1) представим в виде:

$$u(r, z) = u_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{1k}(r) \sin \lambda_k z + \sum_{p=1}^{\infty} \left[ f_{1p}(z) J_1'(\alpha_p r) + f_{3p}(z) \frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r} \right]$$

$$v(r, z) = v_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{2k}(r) \sin \lambda_k z - \sum_{p=1}^{\infty} \left[ f_{3p}(z) J_1'(\alpha_p r) + f_{3p}(z) \frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r} \right] \quad (5)$$

$$w(r, z) = w_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{3k}(r) \cos \lambda_k z + \sum_{p=1}^{\infty} f_{2p}(z) J_1(\alpha_p r)$$

Для краткости записи обозначим  $\xi = \lambda_k r$ ;  $\eta = \alpha_p z$

Тогда

$$R_{1k}(r) = Q_k [(5-4\nu)I_2(\xi) - \xi J_1(\xi)] + M_k I_0(\xi) + N_k I_2(\xi)$$

$$R_{2k}(r) = Q_k (5-4\nu)I_2(\xi) - M_k I_0(\xi) + N_k I_2(\xi)$$

$$R_{3k}(r) = -Q_k \xi I_2(\xi) + (M_k + N_k) I_1(\xi), \quad f_{3p}(z) = E_p \operatorname{sh} \eta + F_p \operatorname{ch} \eta$$

$$f_{1p}(z) = (A_p + \eta B_p) \operatorname{ch} \eta + (C_p + \eta D_p) \operatorname{sh} \eta \quad (6)$$

$$f_{2p}(z) = [A_p + \eta B_p - (3-4\nu)D_p] \operatorname{sh} \eta + [C_p + \eta D_p - (3-4\nu)B_p] \operatorname{ch} \eta$$

Частное решение  $u_0, v_0, w_0$  представляется в виде

$$u_0(r, z) = A_{10}r^2 + B_0z^2 + D_0(1-4\nu)r^2z + E_0z + G_0$$

$$v_0(r, z) = A_{20}r^2 - B_0z^2 + D_0(5-4\nu)r^2z - E_0z - G_0 \quad (7)$$

$$w_0(r, z) = C_0rz - D_0r^3 + F_0r$$

$$3A_{10} + A_{20} + 2(1-2\nu)\left(A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G}\right) = 0$$

Напряжения представляются формулами

$$\tau_{r\varphi}(r, z) = r(A_{20} - A_{10}) + 4D_0rz + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ R_{2k}'(r) - \frac{R_{1k}(r) + R_{2k}(r)}{r} \right] \sin \lambda_k z +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ 2[f_{1p}(z) - f_{3p}(z)] \frac{J_2(\alpha_p r)}{r} + \alpha_p f_{3p}(z) J_1(\alpha_p r) \right\}$$

$$\tau_{\varphi z}(r, z) = 2(3-2\nu)D_0r^2 - (2B_0 + C_0)z - E_0 - F_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \lambda_k R_{2k}(r) - \frac{R_{3k}(r)}{r} \right] \cos \lambda_k z -$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ [f_{1p}'(z) + \alpha_p f_{2p}(z) + f_{3p}'(z)] \frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r} - f_{3p}'(z) J_2(\alpha_p r) \right\}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = z(2B_0 + C_0) - 2(1+2\nu)D_0r^2 + E_0 + F_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [R_{3k}'(r) - \lambda_k R_{1k}(r)] \cos \lambda_k z +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ [f_{1p}'(z) + \alpha_p f_{2p}(z) + f_{3p}'(z)] J_1'(\alpha_p r) + f_{3p}'(z) J_2(\alpha_p r) \right\} \\
\sigma_r(r, z) &= 2rA_{10} + 2D_0 r z - 2r \left[ A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G} \right] + \quad (8) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [R_{1k}'(r) + 2\nu \lambda_k Q_k I_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ [f_{1p}(z) - f_{3p}(z)] \frac{J_2(\alpha_p r)}{r} - [f_{1p}(z) + 2\nu \alpha_p (B_p \operatorname{sh} \alpha_p z + D_p \operatorname{ch} \alpha_p z)] J_1(\alpha_p r) \right\} \\
\sigma_z(r, z) &= rC_0 + 8\nu D_0 r z - 2r \left[ A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G} \right] - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} [R_{3k}(r) - 2\nu Q_k I_1(\lambda_k r)] \lambda_k \sin \lambda_k z + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} [f_{2p}'(z) - 2\nu \alpha_p (B_p \operatorname{sh} \alpha_p z + D_p \operatorname{ch} \alpha_p z)] J_1(\alpha_p r), \\
\sigma_{\varphi}(r, z) &= r(A_{10} + A_{20}) + 2(3 + 2\nu) D_0 r z - 2r \left[ A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{R_{1k}(r) + R_{2k}(r)}{\lambda_k r} + 2\nu Q_k I_1(\lambda_k r) \right] \lambda_k \sin \lambda_k z - \\
& - \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ [f_{1p}(z) - f_{3p}(z)] \frac{J_2(\alpha_p r)}{r} + 2\nu \alpha_p (B_p \operatorname{sh} \alpha_p z + D_p \operatorname{ch} \alpha_p z) J_1(\alpha_p r) \right\}
\end{aligned}$$

## 2. Сведение задачи к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

Граничные условия для рассматриваемого случая следующие:

$$u(r, 0) = -v(r, 0) = \delta_1, \quad u(r, l) = -v(r, l) = \delta_2$$

$$w(r, 0) = \chi_1 r, \quad w(r, l) = \chi_2 r, \quad (9)$$

$$\sigma_r(R, z) = \alpha(z), \quad \tau_{r\varphi}(R, z) = -\tau(z), \quad \tau_{rz}(R, z) = 0$$

Решение задачи, то есть выражения для перемещений, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, следующие:

$$\begin{aligned}
u(r, z) &= u_0(r, z) + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} [V_k g_{1k} - G_{1k}(r)] \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k} - \\
&- \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} [X_p h_{1p}(z) + Y_p h_{2p}(z)] \frac{J_1'(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)} + \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{0p}(z) J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 r J_1(\alpha_p R)} \\
v(r, z) &= v_0(r, z) + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} [V_k g_{2k} + G_{2k}(r)] \frac{\sin \lambda_k z}{\lambda_k} + \\
&+ \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} [X_p h_{1p}(z) + Y_p h_{2p}(z)] \frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 r J_1(\alpha_p R)} - \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{0p}(z) J_1'(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)} \quad (10) \\
w(r, z) &= w_0(r, z) + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} [V_k g_{3k} - G_{3k}(r)] \frac{\cos \lambda_k z}{\lambda_k} + \\
&+ \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} [X_p h_{3p}(z) + Y_p h_{4p}(z)] \frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad l = 2a
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
g_{1k}(r) &= \left[ 5 - 2\nu + \frac{xI_3}{I_2(x)} \right] \frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2(x)} - \frac{\lambda_k r I_1(\lambda_k r)}{I_2(x)} + \\
&+ \left[ 4 - 2\nu - \frac{4(1-\nu)I_2}{xI_2'(x)} + \frac{xI_3}{I_2(x)} \right] \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2(x)} \\
g_{2k}(r) &= \left[ \frac{2-4\nu}{x} + \frac{I_1}{I_2} \right] \frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2} - 4 - 2\nu - \frac{4(1-\nu)I_2}{xI_2'(x)} + \frac{xI_3}{I_2(x)} \left] \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2(x)} = \\
&= \frac{8\nu r}{\lambda_k R^2} + \frac{4\lambda_k}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\nu \lambda_k^2 - (1-\nu)\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \lambda_k^2)^2} \frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)}, \\
g_{3k}(r) &= \frac{xI_3 I_1(\lambda_k r)}{I_2^2} - \lambda_k r \frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2} + \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2} =
\end{aligned}$$

$$g_{4k}(r) = \frac{2I_1(\lambda_k r)}{I_2 I_2} \left[ I_1 - \frac{2\nu}{\lambda_k} I_2 \right] - \frac{2I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2} \left[ \frac{2(1-\nu)}{I_2} I_1 + \frac{x}{I_2} I_1 \right]$$

$$g_{5k}(r) = \frac{2I_1'(\lambda_k r)}{I_2} \left[ 3 + \frac{x}{I_2} I_3 \right] - \frac{2\lambda_k r I_1(\lambda_k r)}{I_2} - \frac{2I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2} \left[ 1 + \frac{2(1-\nu)}{x I_2} I_2 \right]$$

$$g_{6k}(r) = \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2} \left[ 5 + \frac{x}{I_2} I_3 \right] - \frac{\lambda_k r I_0(\lambda_k r)}{I_2} - \frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2} \left[ 6 - 2\nu + \frac{x I_3}{I_2} + \frac{4(1-\nu)}{x I_2} I_2 \right]$$

$$h_{0p}(z) = \frac{E_p \operatorname{sh} \alpha_p (l-z) + F_p \operatorname{sh} \alpha_p z}{\operatorname{sh} \alpha_p l}$$

$$h_{1p}(z) = \frac{4\alpha_p^2}{l} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{\lambda_k \sin \lambda_k z}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} = \frac{\alpha_p a \operatorname{ch} \alpha_p (a-z) \operatorname{th} \alpha_p a - \alpha_p (a-z) \operatorname{sh} \alpha_p (a-z)}{2 \operatorname{ch} \alpha_p a}$$

$$h_{2p}(z) = \frac{4\alpha_p^2}{l} \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \frac{\lambda_k \sin \lambda_k z}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} = \frac{\alpha_p a \operatorname{sh} \alpha_p (a-z) \operatorname{cth} \alpha_p a - \alpha_p (a-z) \operatorname{ch} \alpha_p (a-z)}{2 \operatorname{sh} \alpha_p a}$$

$$h_{3p}(z) = \frac{4\alpha_p}{l} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{2(1-\nu)\alpha_p^2 + (1-2\nu)\lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} \cos \lambda_k z =$$

$$= \left[ 3 - 4\nu + \alpha_p a \operatorname{th} \alpha_p a \right] \frac{\operatorname{sh} \alpha_p (a-z)}{2 \operatorname{ch} \alpha_p a} - \frac{\alpha_p (a-z) \operatorname{ch} \alpha_p (a-z)}{2 \operatorname{ch} \alpha_p a}$$

$$h_{4p}(z) = \frac{4\alpha_p}{l} \left[ \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \frac{2(1-\nu)\alpha_p^2 + (1-2\nu)\lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} \cos \lambda_k z + \frac{1-\nu}{\alpha_p^2} \right] =$$

$$= \left[ 3 - 4\nu + \alpha_p a \operatorname{cth} \alpha_p a \right] \frac{\operatorname{ch} \alpha_p (a-z)}{2 \operatorname{sh} \alpha_p a} - \frac{\alpha_p (a-z) \operatorname{sh} \alpha_p (a-z)}{2 \operatorname{sh} \alpha_p a}$$

$$h_{5p}(z) = h_{1p}(z) - \nu \frac{\operatorname{ch} \alpha_p (a-z)}{\operatorname{ch} \alpha_p a} = \frac{4}{l} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{[(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2]}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} \lambda_k \sin \lambda_k z =$$

$$= \frac{1}{2\text{ch}\alpha_p a} \left[ (\alpha_p a \text{th}\alpha_p a - 2\nu) \text{ch}\alpha_p(a-z) - \alpha_p(a-z) \text{sh}\alpha_p(a-z) \right]$$

$$h_{5p}(z) = h_{2p}(z) - \nu \frac{\text{sh}\alpha_p(a-z)}{\text{sh}\alpha_p a} = \frac{4}{l} \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \frac{[(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2]}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} \lambda_k \sin \lambda_k z =$$

$$= \frac{1}{2\text{sh}\alpha_p a} \left[ (\alpha_p a \text{cth}\alpha_p a - 2\nu) \text{sh}\alpha_p(a-z) - \alpha_p(a-z) \text{ch}\alpha_p(a-z) \right] \quad (11)$$

$$-h_{7p}(z) = \frac{h_{1p}'(z)}{\alpha_p} - h_{3p}(z) = -\frac{8\alpha_p}{l} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{[(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2]}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} \cos \lambda_k z =$$

$$= -\frac{1}{\text{ch}\alpha_p a} \left[ (\alpha_p a \text{th}\alpha_p a + 1 - 2\nu) \text{sh}\alpha_p(a-z) - \alpha_p(a-z) \text{ch}\alpha_p(a-z) \right]$$

$$-h_{8p}(z) = \frac{h_{2p}'(z)}{\alpha_p} - h_{4p}(z) = -\frac{8\alpha_p}{l} \left[ \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \frac{[(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2]}{(\lambda_k^2 + \alpha_p^2)^2} \cos \lambda_k z + \frac{1-\nu}{2\alpha_p^2} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\text{sh}\alpha_p a} \left[ (1 - \alpha_p \text{acth}\alpha_p a - 2\nu) \text{ch}\alpha_p(a-z) - \alpha_p(a-z) \text{sh}\alpha_p(a-z) \right]$$

$$G_{1k}(r) = P_k \left[ \frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2(x)} - \frac{2I_1(\lambda_k r)}{x\lambda_k r I_2'(x)} \right] - Q_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2 \lambda_k r}$$

$$G_{2k}(r) = P_k \left[ \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2} - \frac{2I_1'(\lambda_k r)}{x I_2'(x)} \right] - Q_k \frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2}$$

$$G_{3k}(r) = P_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(x)} = P_k \left[ \frac{2\lambda_k}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_p r)}{(\alpha_p^2 + \lambda_k^2) J_1(\alpha_p R)} + \frac{4r}{\lambda_k R^2} \right]$$

$$G_{4k}(r) = 2P_k \left[ \frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2} - \frac{I_1'(\lambda_k r)}{x I_2'(x)} \right] - Q_k \frac{I_2'(\lambda_k r)}{I_2}$$

$$G_{5k}(r) = 2P_k \left[ \frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2} - \frac{I_1(\lambda_k r)}{x \lambda_k r I_2'(x)} \right] - Q_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}, \quad x = \lambda_k R$$

Частное решение в данном случае удобно представить в виде

$$u_0(r, z) = \frac{\delta_1(l-z)}{l} + \frac{\delta_2 z}{l} + A_{10} r^2 - B_0 z(l-z) + D_0(1-4\nu)r^2 z + E_0 z + G_0$$

$$v_0(r, z) = -\frac{\delta_1(l-z)}{l} - \frac{\delta_2 z}{l} + A_{20} r^2 + B_0 z(l-z) + D_0(5-4\nu)r^2 z - E_0 z - G_0 \quad (12)$$

$$w_0(r, z) = C_0 r z - D_0 r^3 + F_0 r$$

$$3A_{10} + A_{20} + C_0 + 2(1-2\nu) \left( A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G} \right) = 0$$

Для объемного расширения из (3) получим

$$-\frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ X_p \frac{\operatorname{ch} \alpha_p (a-z)}{\operatorname{ch} \alpha_p a} + Y_p \frac{\operatorname{sh} \alpha_p (a-z)}{\operatorname{sh} \alpha_p a} \right] \frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)} \quad (13)$$

$$\theta_0 = A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G} = -\frac{3A_{10} + A_{20} + C_0}{2(1-2\nu)}$$

где  $\alpha_p$  корни уравнения  $J_2(\alpha_p R) = 0$ .

Такой выбор  $\alpha_p$  обеспечивает удовлетворение граничных условий с минимальным числом бесконечных уравнений. При этом ортогональными являются не только  $J_2(x)$ , но и  $J_1(x)$ . Причем [8]

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2(\alpha_k r) = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_1(\alpha_k r)$$

$$a_k \Omega_k = \int_0^R r f(r) J_2(\alpha_k r) dr, \quad \Omega_k = \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_k R) \quad (14)$$

$$b_k \Omega_k = \int_0^R r f(r) J_1(\alpha_k r) dr, \quad b_0 = \frac{4}{R^4} \int_0^R r^2 f(r) dr$$

Удовлетворяя граничным условиям, для определения неизвестных постоянных получим следующие соотношения:

1) Из условий на нормальные перемещения



$$X_p \left( 3 - 4\nu - \frac{\alpha_p l}{\operatorname{sh} \alpha_p l} \right) \operatorname{th} \alpha_p a + \frac{4\alpha_p}{l} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \left[ 2V_k \frac{\nu \lambda_k^2 - (1-\nu)\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \lambda_k^2)^2} - \frac{P_k}{\alpha_p^2 + \lambda_k^2} \right] = 0 \quad (15)$$

$$Y_p \left( 3 - 4\nu + \frac{\alpha_p l}{\operatorname{sh} \alpha_p l} \right) \operatorname{cth} \alpha_p a + \frac{4\alpha_p}{l} \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left[ 2V_k \frac{\nu \lambda_k^2 - (1-\nu)\alpha_p^2}{(\alpha_p^2 + \lambda_k^2)^2} - \frac{P_k}{\alpha_p^2 + \lambda_k^2} \right] = \frac{4D_0 R^2}{\alpha_p}$$

$$\frac{8}{lR^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{2\nu V_k - P_k}{\lambda_k^2} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2} + \frac{1}{2} C_0 l$$

$$\frac{8}{lR^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{2\nu V_k - P_k}{\lambda_k^2} = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} - F_0 - \frac{1}{2} C_0 l + \frac{2D_0 R^2}{3}$$

2) Из условий на радиальные и тангенциальные перемещения (при  $z=0$  и  $z=l$ ) получим

$$r^2 [A_{10} + A_{20} + 2D_0 z(3-4\nu)] + \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{0p}(z) J_2(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)} = 0$$

$$r^2 [A_{10} + D_0 z(1-4\nu)] + E_0 z + G_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{0p}(z) J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 J_1(\alpha_p R)} = 0 \quad (16)$$

На основе ортогональности функций  $J_2(x)$  и  $J_1(x)$  получим

$$h_{0p}(z) = R^2 [A_{10} + A_{20} + 2D_0 z(3-4\nu)] \quad (z=0; l)$$

$$h_{0p}(z) = -\frac{R^2}{2} [A_{10} - A_{20} - 4D_0 z],$$

$$(A_{10} - A_{20} - 4D_0 z) \frac{R^2}{3} + 2E_0 z + 2G_0 = 0 \quad (17)$$

$$[A_{10} + D_0 z(1-4\nu)] \frac{2R^2}{3} + E_0 z + G_0 = 0 \quad (18)$$

Из этих всех соотношений следует окончательно, что

$$3A_{10} + A_{20} = 0, \quad D_0 = 0, \quad E_0 = 0,$$

$$G_0 = -\frac{2R^2}{3} A_{10}, \quad h_{0p}(0) = h_{0p}(l) = -2R^2 A_{10} \quad (19)$$

Отсюда для функции  $h_{0p}(z)$  получим

$$\begin{aligned} h_{0p}(z) &= -2R^2 A_{10} \frac{\operatorname{sh} \alpha_p(l-z) + \operatorname{sh} \alpha_p z}{\operatorname{sh} \alpha_p l} = \\ &= -2R^2 A_{10} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p(a-z)}{\operatorname{ch} \alpha_p a} = -\frac{4R^2 A_{10}}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k \lambda_k \sin \lambda_k z]}{\lambda_k^2 + \alpha_p^2} \end{aligned} \quad (20)$$

3) Из условия на  $\tau_{rp}(R, z) = -2\tau(z)$

$$-4RA_{10} - \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \sin \lambda_k z + \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} h_{0p}(z) = -2\tau(z) \quad (21)$$

после интегрирования и суммирования полученного ряда, для  $Q_k$  получим

$$Q_k = 2\tau_k A_{10} - 2R^2 A_{10} [1 - (-1)^k] \frac{I_2'(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R)} \quad (22)$$

где

$$\tau_k = \int_0^l \tau(z) \sin(\lambda_k z) dz, \quad \sigma_k = \int_0^l \sigma(z) \sin(\lambda_k z) dz, \quad (23)$$

4) Из условия для нормального напряжения имеем

$$\begin{aligned} k g_{6k}(R) + \frac{4\lambda_k}{R} \sum_{p=1}^{\infty} Z_{pk} \frac{(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2}{(\alpha_p^2 + \lambda_k^2)^2} = \\ = \sigma_k + \frac{1}{\lambda_k} G_{1k}(R) - \frac{2R}{\lambda_k} (A_{10} - \nu\Theta_0) [1 - (-1)^k] \end{aligned} \quad (24)$$

$$Z_{pk} = \begin{cases} X_p & (p = 1, 3, 5 \dots) \\ Y_p & (p = 2, 4, 6 \dots) \end{cases} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

5) Из условия  $\tau_{rz}(R, z) = \tau_c$  получим

$$k g_{5k}(R) + \frac{8}{R^2} \sum_{p=1}^{\infty} Z_{pk} \frac{(1-\nu)\alpha_p^2 - \nu\lambda_k^2}{(\alpha_p^2 + \lambda_k^2)^2} = \tau_c \quad (25)$$

$$= G_{5k}(R) + \frac{[1 - (-1)^k]}{\lambda_k^2} (C_0 + 2B_0)$$

$$F_0 + \frac{1}{2} C_0 l + \frac{8(1-\nu)}{R^2 l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p}{\alpha_p^2} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l} + \tau_0$$

Из бесконечных систем (24), (25), учитывая соотношение

$$g_{6k}(R) = \frac{\lambda_k R}{2} g_{6k}(R) = \frac{x(I_1^2 - I_0 I_2)}{2} - \frac{2(1-\nu)I_1}{x I_2'} \quad (26)$$

для определения коэффициентов  $P_k$  получим уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_k + \frac{1}{\lambda_k} G_{1k}'(R) - \frac{2R}{\lambda_k} (A_{10} - \nu \Theta_0) [1 - (-1)^k] = \\ = \frac{\lambda_k R}{2} \left[ G_{5k}(R) + \frac{[1 - (-1)^k]}{\lambda_k^2} (C_0 + 2B_0) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \lambda_k R P_k = \sigma_k + \tau_k - [1 - (-1)^k] R^2 A_{10} \frac{I_2'(\lambda_k r)}{I_2(\lambda_k R)} - \\ - \frac{R[1 - (-1)^k]}{2\lambda_k} (C_0 + 2B_0 + 4A_{10} - 4\nu \Theta_0) \end{aligned} \quad (28)$$

Пользуясь формулой

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p (a-z)}{\alpha_p^2 \operatorname{ch} \alpha_p a} \cdot \frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)} + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\lambda_k^2} \cdot \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k R)} \sin \lambda_k z = \\ = \frac{r}{R^2} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) + \frac{2rz(l-z)}{R^2} \end{aligned} \quad (29)$$

нетрудно убедиться, что во всех формулах нужно подставить  $A_{10} = 0$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_{10} = A_{20} = E_0 = E_0 = D_0 = 0 \\ 2(1-2\nu) \left( B_0 + \frac{\rho g}{2G} \right) + C_0 = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнений (15), (24) и (25).

Заметим, что первое уравнение (16) можно было заменить уравнением

$$r^2 [A_{10} - A_{20} - 4D_0 z] + 2E_0 z + 2G_0 + \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{0p}(z) J_0(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)} = 0$$

Тогда, при учете свойств функций  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ , ( $k = 1, 2, \dots, J_2(\lambda_k r) = 0$ ), приведенных в приложении, мы опять пришли бы к совокупности бесконечных систем уравнений (15.)

Для доказательства регулярности бесконечных систем (15), (24) и (25) оценим сумму

$$K = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|\nu \lambda_1^2 - (1-\nu) \alpha_p^2|}{(\alpha_p^2 + \lambda_1^2)(\alpha_p^2 + \lambda_2^2)} < \frac{R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\nu x_1^2 - (1-\nu) \xi^2|}{(\xi^2 + x_1^2)(\xi^2 + x_2^2)} d\xi$$

$$\frac{\pi}{R^2} K \leq \frac{x_2 - \nu(x_1 + x_2)}{x_2(x_1 + x_2)} \left( \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right) + \quad (31)$$

$$+ \frac{2[x_2^2 - \nu(x_2^2 - x_1^2)] \sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2^2(x_1 + x_2)} \left[ 1 + \frac{\nu(x_2 - x_1)}{x_2} + \frac{\nu(4\nu - 1)(x_2 - x_1)^2}{3x_2^2} + \dots \right] =$$

$$= \frac{x_2 - \nu(x_1 + x_2)}{x_2(x_1 + x_2)} \left( \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right) +$$

$$+ \frac{2[x_2^2 - \nu(x_2^2 - x_1^2)] \sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2(x_1 + x_2) [x_2 - \nu(x_2 - x_1)]} \left[ 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \frac{z^6}{7} + \dots \right]$$

где

$$z = \frac{(x_2 - x_1) \sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2 - \nu(x_2 - x_1)}; \quad (32)$$

В нашем случае  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $x_1 = x_2 \equiv x = \lambda_1 R$ , следовательно

$$K \leq \frac{R}{\pi \lambda_k} d(\nu), \quad d(\nu) = (1-2\nu) \left( \frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right) + \sqrt{\nu(1-\nu)} \quad (33)$$

$$d(\nu) = d(1-\nu); \quad \frac{1}{2} \leq d(\nu) \leq \frac{\pi}{4}, \quad \left( 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \right)$$

Пользуясь этими оценками, нетрудно убедиться, что если совокупность

уравнений (15), (24) и (25) привести к одной бесконечной системе относительно  $Z_k$  или  $(X_k), (Y_k)$  то сумма модулей коэффициентов полученной системы при  $0 < \nu < 0.5$  имеет оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{a}_{pk}| \leq \frac{\pi^2}{16} \quad (34)$$

Следовательно бесконечные системы вполне регулярны, т.е. можно их решить методом последовательных приближений.

Для изгибающего момента и перерезывающей силы имеем

$$M_y(z) = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \sigma_z(r, z, \varphi) \cos \varphi dr,$$

$$F_x(z) = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r \tau_z(r, z, \varphi) dr$$

Используя решение задачи после некоторых несложных преобразований получим

$$\frac{M_y(z)}{2\pi R^2 G} = \frac{R^2}{4} (C_0 - \nu \Theta_0) + \frac{\rho g z(l-z)}{4G} + \quad (35)$$

$$+ \frac{1}{2RI} \int_0^l [\alpha(x) + \tau(x)] [l(z+x) - |z-x| - 2zx] dx$$

$$\frac{F_x(z)}{2\pi R^2 G} = \tau_0 + \frac{\rho g(l-2z)}{4G} + \frac{1}{2RI} \int_0^l [\alpha(x) + \tau(x)] [l - l \operatorname{sgn}(z-x) - 2x] dx \quad (36)$$

где

$$\Theta_0 = B_0 + \frac{\rho g}{2G} = -\frac{C_0}{2(1-2\nu)} \quad (37)$$

Этими формулами определяются также и реакции опор.

Такой подход допускает рассмотрение некоторых других неосесимметричных статических и динамических задач теории упругости для цилиндра конечных размеров. Отметим, что рассмотренную задачу можно было решать, если за считать, что  $\alpha_p$  — корни уравнения  $J_1'(\alpha_p R) = 0$ . При этом число бесконечных систем получается на одну больше, а число свободных членов на две меньше. Возникшая новая система отличается от других, тем, что сумма модулей ее коэффициентов при неизвестных стремится к нулю как  $O(k^{-2})$ . Сумма модулей коэффициентов при неизвестных совокупности всех систем определяется также формулой (33) и имеет оценку (35). Это связано с тем, что корни функций  $J_2(x)$  и  $J_1'(x)$  асимптотически совпадают.

## Приложение

О свойствах функций  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ , ( $k = 1, 2, \dots, J_2(\lambda_k r) = 0$ )

Функции  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$  линейно независимы. Это следует из  $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$

и линейной независимости  $J_1(\lambda_k r)$ . Кроме того для  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$  имеют место равенства

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r) [J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)] dr = 0, \quad k \neq n$$

$$\int_0^R r [J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)] dr = 0, \quad (1)$$

Действительно, проведя интегрирование по частям получим

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r) [J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n R)] dr = \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \int_0^R r J_1(\lambda_k r) J_1(\lambda_n r) dr$$

$$\int_0^R r [J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)] dr = \frac{\lambda_k}{2} \int_0^R r^2 J_1(\lambda_k r) dr = 0$$

откуда следует (1), поскольку функции  $\{r, J_1(\lambda_k r)\}$  ортогональны с весом  $r$

В частности из (2) следует, что

$$\int_0^R r J_0(\lambda_k r) [J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)] dr = \int_0^R r J_1^2(\lambda_k r) dr$$

Система функций  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$  полна в ( $k = 1, 2, \dots$ )  $L_2[0, R]$

т.е. из

$$\int_0^R r \varphi(r) dr = 0, \quad \int_0^R r \varphi(r) J_0(\lambda_k r) dr = 0, \quad \text{где } \varphi(r) \in L_2(0, R) \quad (3)$$

должно следовать, что  $\varphi(r) = 0$  почти всюду.

Для этого сначала рассмотрим множество функций непрерывно дифференцируемых и обладающих свойством  $\varphi(0) = \varphi(R) = 0$ . Известно, что указанное множество функций плотно в  $L_2[0, R]$ .

Пусть в (3)  $\varphi(r)$  принадлежит указанному множеству. Тогда интегрированием по частям из (3) получим

$$\int_0^R r^2 \varphi'(r) dr = 0, \quad \int_0^R r \varphi'(r) J_0(\lambda_k r) dr = 0$$

Из полноты системы функций  $\{r, J_1(\lambda_k r)\}$  следует, что  $\varphi'(r) = 0$ , т.е.  $\varphi(r) = 0$ .

Это означает, что линейная оболочка, построенная на системе функций  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$  плотна в  $L_2[0, R]$ , т.е. при любом  $\varepsilon > 0$

$$\int_0^R r \left( \varphi(r) - \left( a_0 + \sum_{k=1}^n a_k J_0(\lambda_k r) \right) \right)^2 dr < \varepsilon,$$

где

$$\varphi(r) \in L_2[0, R]$$

Теперь пусть  $\varphi(r)$  функция из  $L_2[0, R]$  и пусть для нее имеет место (3). Тогда будем иметь

$$\int_0^R r \varphi^2(r) dr = \int_0^R r \varphi(r) \left( \varphi(r) - \left( a_0 + \sum_{k=1}^n a_k J_0(\lambda_k r) \right) \right) dr < \varepsilon \sqrt{\int_0^R r \varphi^2(r) dr},$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^R r \varphi^2(r) dr < \varepsilon^2$$

Поскольку  $\varepsilon$  может быть сколь угодно малым положительным числом, то отсюда следует, что  $\varphi(r) = 0$  почти всюду.

Итак, полнота системы  $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ ,  $(k = 1, 2, \dots)$  доказана.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Абрамян Б.Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. - Докл. АН АрмССР, 1958, т.26, №2.
2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных вектор функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1979.
3. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. - Киев: Наукова думка, 1978.
4. *Баблюян А.А., Мкртчян А.М., Терзян С.А.* Осесимметричные контактные задачи для конечного цилиндра. Вторая Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов. Тбилиси, 1984.
5. *Макарян В.С., Папоян С.О.* Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т.33, №1, с. 3-11.
6. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. - Киев: Наукова Думка, 1977.
7. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, ч.1, М., 1949.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
7.07.1995