ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 4, 1995 Механика

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С УПРУГИМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ

Арутюнян Л. А., Мкртчян А. М.

Լ.Ա.Հարությունյան , Ա.Մ.Մկրտչյան

Շերտի և ուղղանկյուն ների պարբերական կոնտակտային խնդիրը

Դիտարկվում է առաձգական շերտի եւ այլ նյութից պատրաստված ուղղանկյունիների հարթ պարբերական խնդիրը, երբ կոնտակտի տիրույթը փոքր է ուղղանկյան երկարությունից: Ստացված են կոնտակտային լարումների բանաձեւերը եւ կոնտակտի չափը որոշող առնչությունը:

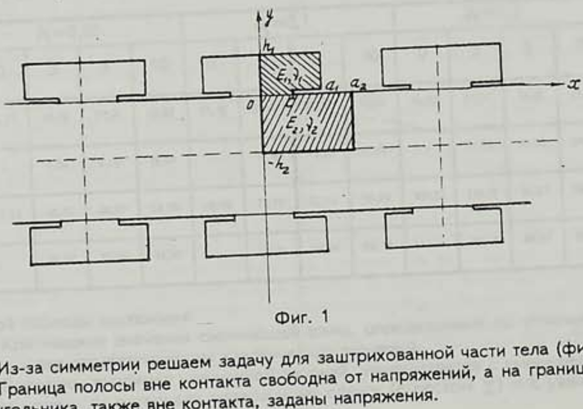
Aruthunian L.A., Mkrtchian A.M.

A Contact Problem for Strein with Rectengles

Рассмотрена периодическая контактная задача для полосы с прямоугольниками из другого материала, когда размер зоны контакта меньше длины прямоугольника. Получены формулы для контактного напряжения и выражение, определяющее размер зоны контакта.

В работах [1, 3, 4] и др. рассмотрены контактные задачи для упругой полосы и прямоугольника с жесткими телами. В работе [5] рассмотрен контакт между двумя прямоугольниками, имеющие одинаковые длины.

Здесь делается попытка рассмотреть контакт упругих периодически расположенных прямоугольников с упругой полосой (фиг. 1).



Фиг. 1

Из-за симметрии решаем задачу для заштрихованной части тела (фиг. 1). Граница полосы вне контакта свободна от напряжений, а на границе прямоугольника, также вне контакта, заданы напряжения.

Рассматривается случай контакта без трения, причем предполагается, что область контакта меньше, чем длина прямоугольника. Задачу решаем при помощи бигармонической функции Эри, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xy}(0,y) = u(0,y) = 0, && (-h_2 \le y \le h_1) \\
&\tau_{xy}^{(2)}(x,-h_2) = v_2(x,-h_2) = 0, && (0 < x < a_2) \\
&\tau_{xy}^{(2)}(a_2,y) = i_2(a_2,y) = 0, && (-h_2 \le y \le 0)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xy}^{(1)}(x,h_1) = 0, \quad \sigma_y^{(1)}(x,h_1) = f(x) && (0 < x < a_1) \\
&\tau_{xy}^{(1)}(a_1,y) = 0, \quad \sigma_x^{(1)}(a_1,y) = 0 && (0 < y < h_1) \\
&\sigma_y^{(k)}(x,0) = \tau_{xy}^{(k)}(x,0) = 0, && (x > c, k = 1;2)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

а также условиям гладкого контакта

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0), \\
&v_1(x,0) = v_2(x,0) \qquad (0 \le x \le c) \\
&\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,0) = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Для начала предположим, что нам известны нормальные напряжения вдоль линии контакта

$$
\sigma_y^{(k)}(x,0) = P_k(x) \qquad (0 \le x \le a_k,\ k = 1;2)
$$

где

$$
P_k(x) = \begin{cases} q(x) & (0 \le x < c) \\ 0 & (c < x \le a_k) \end{cases}
\tag{4}
$$

и построим функции напряжений для областей "1" и "2" отдельно

$$
\Phi_1(x,y) = d_1^{(1)}x^2 + d_2^{(1)}y^2 + \frac{2}{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-X_k D_k(y) - Y_k C_k(y)\right]^{(-1)^k} \frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}^2} -
$$

$$
-\frac{2}{h_1}\sum_{p=1}^{\infty} A_p(x)\frac{z_p \cos\beta_{p1}y}{\beta_{p1}^2}, \qquad (0 \le x < a_1 < a_2,\ 0 \le y \le h_1) \tag{5}
$$

$$
\Phi_2(x,y) = d_1^{(2)}x^2 + d_2^{(2)}y^2 + \frac{2}{a_2}\sum_{k=1}^{\infty} P_{k2}B_k(y)\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}^2}; \ (0 \le x \le a_2, -h_2 \le y \le 0)
$$

Здесь введены обозначения

$$2D_k(y)=\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\,\mathrm{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\mathrm{ch}\frac{\sigma_{k1}h_1}{2}}-\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)\frac{\mathrm{ch}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\mathrm{ch}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}}$$

$$2C_k(y)=\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\right)\frac{\mathrm{ch}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\mathrm{sh}\frac{\sigma_{k1}h_1}{2}}-\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)\frac{\mathrm{sh}\alpha_{k1}\left(\frac{h_1}{2}-y\right)}{\mathrm{sh}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}}$$

$$B_k(y)=\frac{2\,\mathrm{sh}\alpha_{k2}h_2}{\mathrm{sh}\alpha_{k2}h_2+2\alpha_{k2}h_2}\Big[\alpha_{k2}(y+h_2)\,\mathrm{sh}\alpha_{k2}(y+h_2)- \tag{6}$$

$$-\left(1+\alpha_{k2}h_2\,\mathrm{ctg}\alpha_{k2}h_2\right)\mathrm{ch}\alpha_{k2}(y+h_2)\Big]$$

$$A_p(x)=\left(1+\beta_{p1}a_1\,\mathrm{cth}\beta_{p1}a_1\right)\frac{\mathrm{ch}\beta_{p1}x}{\mathrm{sh}\beta_{p1}a_1}-\beta_{p1}x\frac{\mathrm{sh}\beta_{p1}x}{\mathrm{sh}\beta_{p1}a_1}$$

$$\alpha_{ki}=\frac{k\pi}{a_i},\quad \beta_{ki}=\frac{k\pi}{h_i},\quad (i=1;2)$$

При выборе функций напряжений в виде (5) и (6) большинство из условий (1)-(3) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя остальным условиям, кроме равенства нормальных перемещений на линии контакта, для определения неизвестных постоянных получим следующую совокупность бесконечных систем:

$$Y_k\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{\mathrm{sh}\,\alpha_{k1}h_1}\right)+\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{8}{h_1}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2 z_p}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2}=(f_k+p_{1k})(-1)^k$$

$$X_k\,\mathrm{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{\mathrm{sh}\,\alpha_{k1}h_1}\right)+\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{8}{h_1}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2 z_p}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2}=(-f_k+p_{1k})(-1)^k \tag{7}$$

$$Z_p\,\mathrm{cth}\,\beta_{p1}a_1\left(1+\frac{2\beta_{p1}a_1}{\mathrm{sh}\,2\beta_{p1}a_1}\right)+\frac{4}{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{p1}^2\alpha_{k1}}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2}=0$$

$$d_1^{(1)}=\frac{f_0}{2a_1},\quad d_2^{(1)}=0,$$

$$_{kp}=\begin{cases}X_k & (p=1,3,5,\ldots)\\ Y_k & (p=2,4,6,\ldots)\end{cases}$$

$$d_2^{(1)}=\frac{1}{2a_2}\int_0^{a_2}P_2(x)\,dx=\frac{f_0}{2a_2}$$

При получении бесконечных систем были использованы формулы (5) и (6) и значения

$$2D_k(0) = -2D_k(h_1) = \operatorname{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1-\frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right)$$

$$A_k(a_1) = \operatorname{cth}\beta_{k1}a_1\left(1+\frac{\beta_{k1}a_1}{\operatorname{sh}2\beta_{k1}a_1}\right) \tag{8}$$

$$2C_k(0) = 2C_k(h_1) = \operatorname{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1+\frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right)$$

Пользуясь значением интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\beta\,d\beta}{\left(\beta^2+\alpha^2\right)^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \tag{9}$$

нетрудно убедиться, что сумма модулей коэффициентов при неизвестных не превосходит числа $2/\pi$. Свободные члены бесконечных систем (7) стремятся к нулю как $O\left(p^{-3/2}\right)$ или $O\left(p^{-1/2}\right)$ в зависимости от того, будет ли нормальное контактное напряжение в точке $(x=c,\, y=0)$ ограниченным или неограниченным. Отсюда следует, что совокупность бесконечных систем (7) вполне регулярна и при заданных правых частях их можно решить методом последовательных приближений.

В (7) были использованы обозначения

$$P_{1k} = \int_0^{a_1} P_1(x)\cos\alpha_{k1}x\,dx$$

$$f_0 = \int_0^{a_1} f(x)\,dx = \int_0^{a_1} P_1(x)\,dx = \int_0^{a_2} P_2(x)\,dx \tag{10}$$

$$P_{2k} = \int_0^{a_2} P_2(x)\cos\alpha_{k2}\,dx \qquad f_k = \int_0^{a_1} f(x)\cos\alpha_{k1}x\,dx \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

На основе формул, связывающих нормальные перемещения с функциями напряжений

$$E_k\left[u_k(x,y)-u_{0k}\right] = \int\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y^2}dx - \nu\frac{\partial\Phi_k}{\partial x} - e_{0k}x$$

$$E_k\left[\mathrm{v}_k(x,y)-\mathrm{v}_{0k}\right] = \int\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x^2}dy - \nu\frac{\partial\Phi_k}{\partial y} - e_{0k}y$$

для перемещений на линии контакта двух материалов получим

$$v_1(x,0) = v_{01} + \frac{2d_1^{(1)}}{E_1} - \frac{2}{E_1 a_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(X_k + Y_k\right)\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}}$$

$$v_2(x,0) = v_{02} + \frac{2d_1^{(2)}}{E_1} - \frac{2}{E_2 a_2}\sum_{k=1}^{\infty}P_{2k}\Psi_k\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}} \tag{11}$$

Для свободных членов имеем

$$u_{01} = u_{02} = 0, \qquad E_2 h_2 v_{02} - 2d_1^{(2)}h_2 - e_{02}h_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}Q = \int_{-h_2}^{0}\sigma_x^{(2)}(a_2, y)dy = 2d_2^{(2)}h_2 \tag{12}$$

$$\left(2d_2^{(2)} - e_{02}\right)a_2 = u_0 = E_2 u_2(a_2, y)$$

Удовлетворим теперь условию равенства нормальных перемещений на линии контакта. На основе (11) и бесконечных систем (7) получим соотношение

$$\frac{2}{E_1 a_1}\sum_{k=1}^{\infty}P_{k1}\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}} + \frac{2}{E_2 a_2}\sum_{k=1}^{\infty}P_{k2}\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}} = v_{01} - v_{02} + \frac{2d_1^{(1)}}{E_1} - \frac{2d_1^{(2)}}{E_2} -$$

$$-\frac{2}{E_1 a_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[X_k M_k - Y_k N_k + \frac{8}{h_1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2 z_p}{\left(\beta_{p1}^2 + \alpha_{k1}^2\right)^2}\right]\frac{\cos\alpha_{k1}x}{\alpha_{k1}} + \tag{13}$$

$$+\frac{2}{E_2 a_2}\sum_{k=1}^{\infty}P_{k2}\left(1 - \Psi_k\right)\frac{\cos\alpha_{k2}x}{\alpha_{k2}}, \qquad (0 \le x < c)$$

где

$$M_k = 1 - \operatorname{th}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right), \quad N_k = \operatorname{cth}\frac{\alpha_{k1}h_1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_{k1}h_1}{\operatorname{sh}\alpha_{k1}h_1}\right) - 1 \tag{14}$$

Подставляя из (10) в (13) значения коэффициентов P_{ki} $(i = 1,2)$

$$P_{ki} = \int_0^a P_i(x)\cos\alpha_{ki}x dx = \int_0^c q(x)\cos\alpha_{ki}x dx \tag{15}$$

Учитывая четность функции $q(x)$, пользуясь методом [7], после ряда элементарных преобразований, для определения неизвестного контактного давления $q(x)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a}\varphi(v)\operatorname{ctg}\frac{v-u}{2}dv = c(u) \qquad (-a < u < a) \tag{16}$$

где

$$\alpha=\frac{\pi c}{a_1},\quad \varphi(\mathrm{v})=q\left(\frac{a_1\mathrm{v}}{\pi}\right),\qquad \left(0<a\leq a_2\right)$$

$$c(u)=\int_{-a}^{a}\varphi(\mathrm{v})K(u,\mathrm{v})d\,\mathrm{v}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\mathrm{v}_k\sin ku \tag{17}$$

$$K(u,\mathrm{v})=\frac{a_1E_1}{a_2(E_1+E_2)}\left[S(u,\mathrm{v})+\frac{a_2}{a_1}\operatorname{ctg}\frac{\mathrm{v}-u}{2}-\operatorname{ctg}\frac{a_1(\mathrm{v}-u)}{2a_2}\right]$$

$$S(u,\mathrm{v})=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\Psi_k\right)\cos\frac{ka_1\mathrm{v}}{a_2}\sin\frac{ka_1u}{a_2}$$

$$V_k=X_kM_k-Y_kN_k+\frac{8}{h_1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_{p1}\alpha_{k1}^2z_p}{\left(\beta_{p1}^2+\alpha_{k1}^2\right)^2} \tag{18}$$

Функция $K(u,\mathrm{v})$ непрерывна в квадрате $(-\alpha\leq u,\mathrm{v}\leq\alpha)$, поэтому уравнение (16) является сингулярным уравнением первого рода с регулярной частью.

Введем оператор

$$L[f(u)]=\frac{\sin\frac{u}{2}}{\omega(u)}f(u)-\frac{1}{2\pi\omega(u)}\int_{-a}^{a}\frac{[f(\nu)-f(u)]\omega(\mathrm{v})}{\sin\frac{\mathrm{v}-u}{2}}d\nu \tag{19}$$

где

$$\omega(u)=\left(\sin\frac{\alpha+u}{2}\sin\frac{\alpha-u}{2}\right)^{1/2}$$

Обращая сингулярную часть уравнения (16), получим

$$\varphi(u)=L[c(u)]+\frac{A_0\cos\frac{u}{2}}{\omega(u)},\qquad \left(-\alpha<u<\alpha_2\right) \tag{20}$$

где

$$2\pi A_0=\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)du,\qquad \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega(\mathrm{v})d\nu}{\sin\frac{\mathrm{v}-u}{2}}=-2\pi\sin\frac{u}{2} \tag{21}$$

Для определения неизвестных постоянных P_{k1}, P_{k2} умножим соотношение (20) на $\cos kx$ и $\cos\frac{ka_2u}{a_2}$, соответственно, и проинтегрируем в пределах $(-\alpha,\alpha)$

$$\pi P_{p1} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L[c(u)]\cos pu\,du + A_0\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{u}{2}\cos pu}{\omega(u)}du$$

$$\pi P_{p2} = \frac{a_1}{a_2}\int_{-\alpha}^{\alpha} L[c(u)]\cos\frac{pa_1u}{a_2}du + A_0\frac{a_1}{a_2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{pa_1u}{a_2}du}{\omega(u)} \qquad (22)$$

После введения обозначений

$$C_{pk}^{(1)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L[\sin ku]\cos pu\,du, \qquad S_{pk}^{(1)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L[\sin ku]\cos\frac{pa_1u}{a_2}du \qquad (23)$$

$$C_{pk}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L\left[\sin\frac{ka_1u}{a_2}\right]\cos pu\,du, \qquad S_{pk}^{(2)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} L\left[\sin\frac{ka_1u}{a_2}\right]\cos\frac{pa_1u}{a_2}du$$

Получим системы

$$\pi P_{k1} = \frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}W_p^{(1)}C_{kp}^{(1)} - \frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}T_p^{(2)}C_{kp}^{(2)} + f_k^{(1)} + \gamma_k^{(1)}$$

$$\pi P_{k2} = -\frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}W_p^{(1)}C_{kp}^{(1)} - \frac{E_2}{E_1+E_2}\sum_{p=1}^{\infty}T_p^{(2)}C_{kp}^{(2)} + f_k^{(1)} + \gamma_k^{(1)} \qquad (24)$$

Как видно из (20), контактные напряжения имеют интегрируемую особенность порядка 1/2 на концах области контакта. Следовательно, свободные члены бесконечных систем (7) стремятся к нулю как $k^{-1/2}$. Бесконечные системы (24) квазивполне регулярны.

Доказательство квазиполной регулярности аналогичной задачи приведено в работе [4], где рассматривается контактная задача для прямоугольника, когда часть одной грани прямоугольника жестко заделена.

Контактные напряжения (20) имеют порядок $\frac{1}{2}$ и их можно представить в виде

$$\varphi(u) = \frac{k(u)}{\omega(u)}, \text{ где } k(u) = c(u)\sin\frac{u}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{[c(\nu)-c(u)]\omega(\nu)}{\sin\frac{\nu-u}{2}}d\nu + A_0\cos\frac{u}{2}$$

Это выражение дает возможность определить область контакта, то есть значение c из уравнения

$$k(c) = 0$$

Если давление, приложенное на прямоугольник, представить в виде $f(x) = P_0 f_0(x)$, где P_0- интенсивность приложенной нагрузки, то нетрудно убедиться, что длина зоны контакта не будет зависеть от P_0, а будет зависеть от формы $f_0(x)$ и от участка ее приложения.

Авторам не удалось получить решение задачи (регулярные бесконечные системы) в случае, когда $c = a_2$, то есть когда прямоугольник по всей длине своей стороны входит в контакт с полосой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л., Манукян М. М.* Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях.- Докл. АН Арм. ССР, 1957, т. 25, №4.
2. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.- ПММ, 1957, №21, вып. 1.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Решение смешанной задачи для прямоугольника- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. 23, №6.
4. *Баблоян А. А., Енгибарян А. А.* Контактная задача для прямоугольника при наличии сцепления.- Изв. АН Арм. ССР,Механика, 1977, т.30, №3.
5. *Мкртчян А. М., Мелконян М. Г.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т.28, №3,
6. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых новых сингулярных уравнений.- Уч. записки Казанского гос. университета. 1966, т. 122, кн. 3.
7. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Кручение стержней с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, №6.

Институт Механики НАН РА

Поступила в редакцию
14.02.1994