

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ
С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Акопян А.С., Киракосян Р.М.

Ա.Ա.Նակոբյան, Բ.Մ.Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կայունության մասին՝
ընդլայնական սահմանի հաշվառմամբ:

Բերվում են փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կայունության հավասարումները [1] ճշգրիտ լինելու փոխարեն շրջանակներում: Որպես կիրառություն լուծվում է գծայնորեն փոխվող հաստության օրթոտրոպ շերտի կայունության խնդիրը: Կարգավորում է լուծման եղանակի ու ստացված արդյունքների վերլուծություն:

A.S.Hakobian, R.M.Kirakosian

On Stability of Variable Thickness Orthotropic Plats with Calculation of Transverse Displacement.

Приводятся уравнения устойчивости ортотропных пластин переменной толщины в рамках уточненной теории [1]. В качестве приложения решается задача устойчивости ортотропной полосы линейно-переменной толщины. Приводится анализ метода решения и полученных результатов.

1. В статье [1] получены разрешающие уравнения задачи ортотропных пластин переменной толщины, учитывающие влияние деформаций поперечных сдвигов. Поступая как обычно, можно из этих уравнений получить аналогичные уравнения задачи устойчивости пластин. Полагая, что начальное состояние пластинки является безмоментным, приходим к понятию фиктивной поперечной нагрузки [2]

$$Z_2 = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

Здесь w - прогиб, T_x^0, T_y^0, S^0 - внутренние силы начального состояния пластинки. Влиянием остальных (тангенциальных) компонент фиктивной нагрузки пренебрегаем.

Пусть прямоугольная пластинка со сторонами l, b и переменной толщиной $h(x, y)$ сжимается вдоль осей x и y силами

$$T_x^0 \Big|_{x=0}^{x=l} = -p, \quad T_y^0 \Big|_{y=0}^{y=b} = -\lambda p, \quad S^0 \Big|_{x=0,l}^{y=0,b} = 0 \quad (1.2)$$

где λ - некоторая постоянная.

Из-за переменности толщины внутри пластинки возникнут как сжимающие усилия T_x^0, T_y^0 , так и сдвигающее усилие S^0 . Ради простоты будем считать, что плоская задача решена и выражения внутренних усилий пластинки известны. С учетом (1.1) в рамках уточненной теории [1] для равновесия выпукленной пластинки получим

$$\begin{aligned}
 & h^2 \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \\
 & - h \left[\left[8 + a_{55} h \left(B_{11} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left[8 + a_{44} h \left(B_{22} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] - \\
 & - 2B_{66} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - 16 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \psi_1 \right) - \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

$$-12 \left(T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

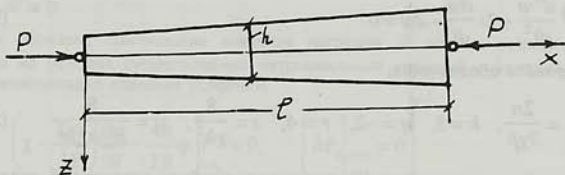
$$\begin{aligned}
 & h^2 \left[B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + 2h \left[\left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \\
 & - h^2 \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) + a_{44} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right] - 2h \left[a_{55} \left(B_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + B_{66} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + a_{44} \left(B_{12} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] + 8\varphi_1 = 0 \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & h^2 \left[B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2h \left[\left(B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \\
 & - h^2 \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right) + a_{55} (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right] - 2h \left[a_{44} \left(B_{22} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + B_{66} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + a_{55} \left(B_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + 8\psi_1 = 0 \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Здесь φ_1, ψ_1 - функции координат x, y , учитывающие влияние деформаций поперечных сдвигов, a_j - упругие постоянные материала, B_j выражаются через них по известным формулам [2].

Критические значения параметра p должны определяться из условия существования нетривиальных решений уравнений устойчивости пластинки (1.3) ÷ (1.5) при выполнении соответствующих краевых условий.

2. В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости ортотропной полосы линейно-переменной толщины h , которая шарнирно оперта по краям и сжимается вдоль пролета силами равномерной интенсивности p (фиг. 1)



Фиг. 1

Положим

$$h = h_0 + h_1 x, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.1)$$

где l - длина пролета, h_0 и h_1 - заданные параметры полосы.

Плоская задача в данном случае имеет очевидное решение

$$T_x^0 = -p, \quad T_y^0 = \frac{a_{22}}{a_{12}} p, \quad S^0 = 0 \quad (2.2)$$

Переходим к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} h &= h_0 t, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad p = \sigma_0 h_0 \bar{p}, \quad \varphi_1 = \sigma_0 \varphi, \quad \psi_1 = \sigma_0 \psi \\ M_x &= \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_x, \quad M_y = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_y, \quad H = \sigma_0 h_0^2 \bar{H}, \\ \frac{B_{11}}{\sigma_0} &= n, \quad \frac{B_{11}}{B_{55}} = \chi, \quad \frac{l}{h_0} = \varepsilon \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь σ_0 - характерное напряжение материала, а безразмерные внутренние моменты полосы определяются формулами [1]

$$\begin{aligned} \bar{M}_x &= \frac{h_1}{12} t^3 \left(-n h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} + \chi \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x \\ \bar{H} &= \frac{1}{12} B_{66} a_{44} h_1 t^3 \frac{d\psi}{dt} \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом (2.1) ÷ (2.4) из (1.3) ÷ (1.5) при потере устойчивости полосы по цилиндрической поверхности получим

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{2}{3\bar{p}h_1} \left(t \frac{d\varphi}{dt} + 2\varphi \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$t^2 (at - 1) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + t(akt + q) \frac{d\varphi}{dt} + (art + s)\varphi = 0 \quad (2.6)$$

$$t^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2t \frac{d\psi}{dt} - d\psi = 0 \quad (2.7)$$

Здесь приняты обозначения:

$$a = \frac{2n}{3\chi\bar{p}}, \quad k = 5, \quad q = -2, \quad r = 4, \quad s = \frac{8}{\chi h_1^2}, \quad d = \frac{8}{B_{66} a_{44} h_1^2} \quad (2.8)$$

Таким образом, определение критических значений нагрузки \bar{p} сводится к нахождению собственных чисел однородных уравнений (2.5) ÷ (2.7) при условиях шарнирного опирания полосы. Эти условия имеют вид:

$$\text{при } t = t_1 = 1 \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{M}_x = 0, \quad \bar{H} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{при } t = t_2 = 1 + h_2 \varepsilon \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{M}_x = 0, \quad \bar{H} = 0 \quad (2.10)$$

Заметим, что (2.5) и (2.6) составляют систему уравнений, а (2.7) является отдельным уравнением. Его решение представим в виде:

$$\psi = C_1 t^{k_1} + C_2 t^{k_2} \quad (2.11)$$

где

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4d} \right) \quad (2.12)$$

C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Удовлетворив последним условиям (2.9) и (2.10), получим:

$$C_1 k_1 + C_2 k_2 = 0, \quad C_1 k_1 t_2^{k_1-1} + C_2 k_2 t_2^{k_2-1} = 0 \quad (2.13)$$

Определитель этой системы отличен от нуля, в силу чего имеем

$$C_1 = C_2 = 0 \quad \text{и} \quad \psi \equiv 0 \quad (2.14)$$

Это означает, что уравнение (2.7) при шарнирном оперании полосы допускает только тривиальное решение.

Рассмотрим теперь уравнения (2.5) и (2.6). Очевидно, что нетривиальным решениям (2.6) соответствуют нетривиальные решения (2.5). Легко показать, что уравнение (2.5) при шарнирном оперании полосы других нетривиальных решений не допускает. На самом деле, при $\varphi \equiv 0$ решение (2.5) имеет вид

$$\bar{w} = C_3 t + C_4 \quad (2.15)$$

Тогда первые условия (2.9) и (2.10) запишутся в виде

$$C_3 + C_4 = 0, \quad C_3 t_2 + C_4 = 0 \quad (2.16)$$

откуда для постоянных интегрирования C_3 и C_4 получим

$$C_3 = C_4 = 0 \quad (2.17)$$

и следовательно,

$$\bar{w} \equiv 0 \quad (2.18)$$

Таким образом, критические значения нагрузки \bar{p} должны определяться только из условия существования нетривиальных решений уравнения (2.6), удовлетворяющих краевым условиям

$$\left(\chi - \frac{2nt}{3\bar{p}} \right) \frac{d\varphi}{dt} - \frac{4n}{3\bar{p}} \varphi \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \right) \quad (2.19)$$

С этой целью применим метод коллокаций, представив решение (2.6) в виде усеченного тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega kt + b_k \sin \omega kt \quad (2.20)$$

где

$$\omega = \frac{\pi}{\varepsilon h_1} \quad (2.21)$$

Удовлетворив уравнению (2.6) в точках коллокаций

$$\tau_i = \frac{t_2 - t_1}{m-1} (i-1) + t_1, \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (2.22)$$

с использованием краевых условий (2.19) получим систему m однородных линейных алгебраических уравнений относительно $2N+1$ неизвестных коэффициентов a_0, a_k, b_k ($k=1, 2, \dots, N$). Подбирая $m = 2N+1$, приходим к задаче определения собственных чисел системы однородных алгебраических уравнений. С помощью численных методов можно найти приближенные значения безразмерной сжимающей силы \bar{p} , соответствующие первым m формам потери устойчивости полосы.

С целью выяснения характера сходимости численного решения в зависимости от числа членов N , удерживаемых в ряде (2.20), рассмотрен известный классический случай $\chi = 0$. В табл. 1 иллюстрирована динамика улучшения первых трех критических значений \bar{p} при $\chi = 0$; $h_1 = 0,1$; $\varepsilon = 10$, когда N изменяется от 5 до 15. Для сравнения, в последней строке таблицы представлены соответствующие результаты точного решения задачи [3]. Как видно из таблицы, критические значения сжимающей силы при $N = 14$ с точностью пятизначных цифр совпадают с соответствующими значениями точного решения, что свидетельствует о хорошей сходимости примененного метода численного решения.

$$(\chi = 0; h_1 = 0,1; \varepsilon = 10)$$

Таблица 1.

N	\bar{p}_1	\bar{p}_2	\bar{p}_3
5	26,044	86,273	253,85
6	24,943	92,644	223,29
7	24,473	95,243	212,11
8	24,289	95,963	213,08
9	24,221	96,100	214,75
10	24,197	96,109	215,56
11	24,189	96,102	215,84
12	24,186	96,097	215,92
13	24,186	96,095	215,93
14	24,185	96,094	215,94
15	24,185	96,094	215,94
точ. реш.	24,185	96,094	215,94

В табл. 2 приведены критические значения сжимающей силы при относительной длине $\varepsilon = 10$, соответствующие первым двум формам потери устойчивости, которые вычислены в классической постановке задачи ($\chi = 0$) и с учетом влияния деформаций поперечного сдвига ($\chi > 0$). При этом рассмотрены три разных значения параметра изменчивости толщины полосы h_1 . Определены величины поправки в процентах по отношению к классическим значениям

$$\Delta_i = \frac{\bar{p}_i^{\text{крит}} - \bar{p}_i}{\bar{p}_i^{\text{крит}}} 100\% \quad (2.23)$$

$$(\varepsilon = 10)$$

таблица 2

χ	$h_1 = 0,05$				$h_1 = 0,1$				$h_1 = 0,2$			
	0	3	5	10	0	3	5	10	0	3	5	10
\bar{p}_1	15,31	14,49	13,98	12,87	24,18	22,40	21,35	19,09	46,92	41,51	38,45	32,39
Δ_1	-	5,36	8,69	15,94	-	7,36	11,70	21,05	-	11,53	18,05	30,97
\bar{p}_2	61,11	49,76	44,27	34,65	96,09	72,78	62,52	45,99	185,82	119,77	95,67	58,07
Δ_2	-	18,57	27,56	43,30	-	24,26	34,94	52,14	-	35,54	48,51	68,75

Из этой таблицы заключаем:

1. Критические значения сжимающей силы, определенные по уточненной теории, ниже соответствующих классических значений.
2. Поправка, вносимая уточненной теорией, увеличивается с уменьшением сопротивляемости материала поперечному сдвигу (с ростом χ) и с увеличе-

нием скорости утолщения по длине пролета полосы h_1 .

3. Поправка для второй формы потери устойчивости более ощутима, чем для первой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киракосян Р.М.* Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины. - Изв. АН Армении, Механика, 1991, т.44, №3, с.26-33.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. - М.:Наука, 1987.
3. *Акопян А.С., Киракосян Р.М.* О нижних оценках критических сил сжатых полос линейно переменной толщины.-Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, №3.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
16.11.1993

