ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА, СЦЕПЛЕННОГО С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

БАБЛОЯН А. А. , БАБЛОЯН К. Б.

Բաբլոյան Ա.Ա., Բաբլոյան Կ.Բ.

Կոշտ հիմքի հետ ամրակցված առաձգական ուղղանկյան փափանումները

Դիտարկվում է առաձգական ուղղանկյան կայունացած փափանումների խնդիրը, երբ ուղղանկյունը ներքևի կողմով ամրակցված է փափանվող հիմքին: Ֆուրյեի եղանակով խնդիրը բերվում է ռեգուլյար անվերջ համակարգերի լուծմանը: Լարումները ստացված են անջատված եզակիություններով:

Babloyan A.A, Babloyan K.B.

Vibrations of an elastic rectangular coherent with rigid fundament

Приводится решение задачи об установившихся колебаниях упругого прямоугольника, основание которого жестко сцеплено с колеблющимися фундаментом. Методом Фурье задача сведена к решению регулярных бесконечных систем. Напряжения получаются с выделенными характерными особенностями.

Рассматривается стационарная задача об определении напряженно-деформированного состояния упругого прямоугольника, когда фундамент, к которому жестко сцеплено нижнее основание прямоугольника, совершает поперечные и изгибные колебания с частотой ω. На остальных участках границы заданы компоненты напряжений.

Задача решается методом Фурье. Исследование бесконечных систем алгебраических уравнений производится по методу [1-3].

Приведены формулы для напряжений с выделенными особенностями, а также для перерезывающей силы и изгибающего момента.

Особенности напряжений получены в виде "местных" решений [4].

1. Построение решения задачи. Как известно [2], стационарная плоская задача теории упругости при отсутствии массовых сил сводится к решению следующих дифференциальных уравнений:

$$\Delta\varphi + c_1^2\varphi = 0, \qquad \Delta\psi + c_2^2\psi = 0 \tag{1. 1}$$

где Δ - двумерный оператор Лапласа, c_1 и c_2- волновые числа продольных и сдвиговых волн, соответственно. Компоненты перемещении напряжений выражаются через потенциальные функции (1. 1) формулами:

$$\frac{\sigma_x}{2G}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=mc_1^{\,2}\varphi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\sigma_z}{2G}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-mc_1^{\,2}\varphi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{2G}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{1. 2}$$

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$c_1^{\,2}=\frac{1-2\nu}{2-2\nu}c_2^{\,2},\quad c_2^{\,2}=\frac{\rho\omega^2}{G},\quad m=\frac{\nu}{1-2\nu}$$

где G и ν - модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

Здесь и в дальнейшем везде пропущен временный множитель $\exp(\pm i\omega t)$. Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned}&\sigma_x(\pm a,z)=\pm 2Gg(z),\quad \tau_{xz}(\pm a,z)=0\quad (0<z<h)\\&\sigma_z(x,h)=\pm 2Gf(x),\quad \tau_{xz}(x,h)=2G\tau_0\quad (|x|<a)\\&u_x(x,0)=c_0,\quad u_z(x,0)=b_0x,\quad (|x|\le a)\end{aligned} \tag{1. 3}$$

где $f(x)$ - функция нечетная.

В силу наличия косой симметрии задачу будем решать только для области $(0\le x\le a,\ 0\le z\le h)$, удовлетворив при этом условиям косой симметрии.

$$\sigma_x(0,z)=0,\quad u_z(0,z)=0 \tag{1. 4}$$

Исходя из условий (1.3), (1.4), решение уравнений (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x,z)&=\varphi_0(x,z)+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\lambda_k^{\,2}X_k-c_2^{\,2}A_k\right)\operatorname{sh}\lambda_{1k}x}{c_2^{\,2}\lambda_{1k}\beta_k\operatorname{ch}\lambda_{1k}a}\sin\beta_k z+\\&+\frac{2}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{c_2^{\,2}\alpha_p}\left[\gamma_{2p}Z_p\frac{\operatorname{ch}\gamma_{1p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}+\frac{\gamma_p^{\,2}U_p}{\gamma_{1p}}\frac{\operatorname{sh}\gamma_{1p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{1p}h}\right]\sin\alpha_p x\\\psi(x,z)&=\psi_0(z)+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}X_k\operatorname{ch}\lambda_{2k}x}{c_2^{\,2}\operatorname{ch}\lambda_{2k}a}\cos\beta_k z+\\&+\frac{2}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{c_2^{\,2}}\left[Z_p\frac{\operatorname{sh}\gamma_{2p}(h-z)}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}-U_p\frac{\operatorname{ch}\gamma_{2p}z}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}\right]\cos\alpha_p x\end{aligned} \tag{1. 5}$$

где введены обозначения

$$\varphi_0(x,z)=\frac{b_0 x}{c_1}\sin c_1 z,\qquad \alpha_p=\frac{(2p-1)\pi}{2a},\quad \beta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2h}$$

$$\psi_0(z)=\frac{2(b_0\cos c_1 h-\tau_0)}{c_2^{\,2}\cos c_2 h}\cos c_2 z-\frac{c_0\sin c_2(h-z)}{c_2\cos c_2 h}$$

$$A_k=\frac{\tau_0\beta_k}{\lambda_{2k}^{\,2}}+\frac{c_0 c_2^{\,2}(-1)^{k-1}}{\lambda_{2k}^{\,2}}-\frac{b_0 c_2^{\,2}\beta_k\cos c_1 h}{2(1-\nu)\lambda_{1k}^{\,2}\lambda_{2k}^{\,2}} \tag{1. 6}$$

$$\lambda_{1k}^{\,2}=\beta_k^{\,2}-c_1^{\,2},\qquad \lambda_{2k}^{\,2}=\beta_k^{\,2}-c_2^{\,2},\qquad \lambda_k^{\,2}=\beta_k^{\,2}-0.5c_2^{\,2}$$

$$\gamma_{1p}^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-c_1^{\,2},\qquad \gamma_{2p}^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-c_2^{\,2},\qquad \gamma_p^{\,2}=\alpha_p^{\,2}-0.5c_2^{\,2}$$

При выборе (1. 5) часть дополнительных условий (1. 3) и (1. 4) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя остальным граничным условиям для определения неизвестных постоянных X_k, Z_p, U_p, получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&a_{1p}Z_p+a_{2p}U_p=\frac{\alpha_p}{(1-\nu)h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}B_{kp}X_k+h_{1p}\\
&a_{3p}Z_p+a_{4p}U_p=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{kp}X_k}{(1-\nu)\beta_k h}+h_{2p}\\
&a_{5k}X_k+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{A_{kp}U_p+(-1)^{k-1}\beta_k\gamma_{2p}B_{kp}Z_p}{(1-\nu)\alpha_p a}=h_{3k}
\end{aligned} \tag{1. 7}$$

где

$$(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2})(\beta_k^{\,2}+\gamma_{2p}^{\,2})A_{kp}=\alpha_p\beta_k^{\,2}-0.5\nu c_2^{\,2}(\beta_k^{\,2}+\gamma_{2p}^{\,2})$$

$$(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2})(\beta_k^{\,2}+\gamma_{2p}^{\,2})B_{kp}=\nu\lambda_{2k}^{\,2}-(1-\nu)\alpha_p^{\,2}$$

$$h_{1p}=\frac{2\alpha_p}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}A_k}{\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2}}$$

$$h_{2p}=\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(\beta_k^{\,2}+mc_1^{\,2})}{\beta_k(\beta_k^{\,2}+\gamma_{1p}^{\,2})}-\frac{b_0 c_2^{\,2}\sin c_1 h}{2c_1\alpha_p^{\,2}}+(-1)^p f_p$$

$$h_{3k}=(-1)^k g_k-\frac{A_k\lambda_k^{\,2}\,\mathrm{th}\,\lambda_{1k}a}{\beta_k\lambda_{1k}}-\frac{b_0 amc_1^{\,2}\cos c_1 h}{\lambda_{1k}^{\,2}}$$

Здесь введены обозначения

$$c_2^{\,2}a_{1p}=\alpha_p^{\,2}\,\mathrm{th}\,\gamma_{2p}h-\gamma_{1p}\gamma_{2p}\,\mathrm{th}\,\gamma_{1p}h$$

$$c_2^{\,2}a_{2p}=\frac{\alpha_p^{\,2}}{\mathrm{ch}\,\gamma_{2p}h}-\frac{\gamma_p^{\,2}}{\mathrm{ch}\,\gamma_{1p}h},\qquad a_{3p}=\frac{\alpha_p}{\gamma_{2p}}a_{2p}$$

$$c_2^2 a_{4p} = \alpha_p \gamma_{2p} \operatorname{th} \gamma_{2p} h - \gamma_p^4 (\alpha_p \gamma_{1p})^{-1} \operatorname{th} \gamma_{1p} h$$
$$c_2^2 a_{5k} = \beta_k \lambda_{2k} \operatorname{th} \lambda_{2k} a - \lambda_k^4 (\beta_k \lambda_{1k})^{-1} \operatorname{th} \lambda_{1k} a$$

$$f_p = \int_0^a f(x) \sin \alpha_p x \, dx, \qquad g_k = \int_0^h g(z) \sin \beta_k z \, dz$$

$$d = (1-2\nu)\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right) + \sqrt{\nu(1-\nu)}$$

После решения бесконечных систем напряжения и перемещения будем вычислять по формулам (1. 2) и (1. 5).

2. Исследование бесконечных систем. Покажем, что бесконечные системы (1.7) при любом значении вынужденной частоты ω, отличной от собственных, можно решать методом редукции или же методом последовательных приближений. Действительно, исключая из (1. 7) неизвестные постоянные X_k, для определения неизвестных U_p и Z_p, получим две бесконечные системы.

$$\begin{gathered} a_{1p} Z_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left(U_m C_{1pm} + Z_m D_{1pm} \right) = H_{1p} \\ a_{4p} U_p - \sum_{m=1}^{\infty} \left(U_m C_{2pm} + Z_m D_{2pm} \right) = H_{2p} \end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} C_{1pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \alpha_p A_{km} B_{kp}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m a_{5k}} + a_{2p} \delta_{pm} \\ D_{1pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_p \gamma_{2m} \beta_k B_{km} B_{kp}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m a_{5k}} \\ C_{2pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{kp} A_{km}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m \beta_k a_{5k}} \\ D_{2pm} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \gamma_{2m} A_{kp} B_{km}}{(1-\nu)^2 a h \alpha_m a_{5k}} - a_{3p} \delta_{pm} \\ H_{1p} = h_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \alpha_p B_{kp} h_{3k}}{(1-\nu) h a_{5k}} \\ H_{2p} = h_{2p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{kp} h_{3k}}{(1-\nu) \beta_k h a_{5k}} \end{gathered} \tag{2. 2}$$

δ_{pm}- символ Кронекера.

Для систем (2. 1) оценим суммы модулей коэффициентов при неизвестных, считая, что $p >> 1$.

$$\rho_z = \left|a_{1p}\right|^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|C_{1pm}\right| + \left|D_{1pm}\right|\right)$$
$$\rho_u = \left|a_{4p}\right|^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|C_{2pm}\right| + \left|D_{2pm}\right|\right) \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что суммы, содержащие C_{1pm} и D_{2pm}, при $p \to \infty$ стремятся к нулю как $o\left(p^{-1}\right)$. Пользуясь асимптотическими представлениями $\left(k, p >> 1\right)$

$$a_{1p} \approx \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)}, \quad a_{4p} \approx \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad a_{5k} \approx \frac{1}{4(1-\nu)} \tag{2.4}$$

и формулами [6]

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left|B_{kp}\right| = \frac{ad}{\pi\beta_k}\left[1 + 0\left(k^{-1}\right)\right]$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p}{\left(\alpha_p{}^2 + \beta_k{}^2\right)^2} = \frac{a}{2\pi\beta_k{}^2}\left[1 + 0\left(k^{-1}\right)\right] \tag{2.5}$$

для выражений (2.3) получим следующие асимптотические оценки:

$$\rho_z = \frac{16d^2}{(3-4\nu)\pi^2} + 0\left(p^{-1}\right), \quad \rho_u = \frac{4}{\pi^2} + 0\left(p^{-1}\right) \tag{2.6}$$

Свободные члены систем (2.1) при $p \to \infty$ стремятся к нулю. Отсюда следует, что системы (2.1) в общем случае квазивполне регулярны. Если считать $\tau_0 = 0,\ f_p, g_p = 0\left(p^{-2}\right)$, то для достаточно больших номеров из бесконечных систем (1.7) получим следующие асимптотические представления:

$$U_p \approx \frac{u_0}{\alpha_p}, \quad Z_p \approx z_0\alpha_p^{\delta-1}, \quad X_k \approx -\frac{u_0}{\beta_k} + (-1)^{k-1} x_0 \beta_k^{\delta-1} \tag{2. 7}$$

где $0 < \delta < 0.5$, а x_0 и z_0 связаны между собой следующими соотношениями:

$$z_0 = \frac{(2\nu + \delta - 2)x_0}{(3-4\nu)\sin\dfrac{\pi\delta}{2}}, \quad x_0 = \frac{(\delta - 2\nu)z_0}{\sin\dfrac{\pi\delta}{2}} \tag{2. 8}$$

полученными из первой и последней систем (1. 7) соответственно. Из условия эквивалентности соотношений (2. 8) следует, что число δ является наименьшим положительным корнем уравнения

$$(3-4\nu)\sin^2\frac{\pi\delta}{2} = (2\nu - \delta)(2 - \delta - 2\nu) \tag{2. 9}$$

Число разрешаемых уравнений бесконечных систем (M, N) будем определять из эмпирических соотношений [2]

$$\frac{c_2^{\,2}}{\alpha_N^{\,2}} \approx \frac{c_2^{\,2}}{\beta_M^{\,2}} \approx 0.1 \tag{2. 10}$$

При решении бесконечных систем методом редукции неизвестные постоянные U_p, Z_p, X_k $(p > N,\ k > M)$ должны заменяться своими асимптотическими выражениями (2. 7).

Постоянные u_0, z_0 определяются в процессе решения бесконечных систем путем сравнений численных результатов с (2. 7). В следующем параграфе получено дополнительное уравнение для определения u_0.

3. Формула для напряжений. Из-за наличия угловых точек $A(a,h)$ и $B(a,0)$, функциональные ряды, входящие в выражения напряжений, в малых окрестностях этих точек сходятся медленно. Общие члены рядов на границе в малой окрестности точки A стремятся к нулю как $0(k^{-1})$, а около точки B - как $0(k^{\delta-1})$.

Асимптотические формулы (2.7) позволяют улучшить сходимость функциональных рядов и выделить главные части (особенности) напряжений в окрестностях угловых точек. Здесь, в отличие от [2], сходимость рядов улучшается не на граничных точках, а внутри области, в малых окрестностях особых точек. Поэтому выделенные здесь особенности напряжений имеют вид "местных" решений и зависят от двух местных полярных координат (ρ, θ).

Для окрестности точки $B(a,0)$ в точных формулах напряжений заменим неизвестные коэффициенты и некоторые сложные функции своими асимптотическими выражениями. Тогда, для напряжений получим следующие приближенные простые формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\nu}{G}\begin{Bmatrix}\sigma_x^{(1)}\\ \sigma_z^{(1)}\end{Bmatrix} &= -\frac{x_0}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{\delta-1}\sin\beta_k z}{\exp(\beta_k(a-x))}\left[1\pm\beta_k(a-x)\right]-\\
&-\frac{z_0}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha_p^{\delta-1}\cos\alpha_p(a-x)}{e^{\alpha_p z}}\left[\begin{Bmatrix}2\nu\\ 2-2\nu\end{Bmatrix}\pm\alpha_p z\right]=\\
&=-\frac{\Gamma(\delta)}{\pi\rho^{\delta}}\Big\{x_0\left[\sin\delta\theta_0\pm\delta\cos\theta_0\sin(\delta+1)\theta_0\right]+\\
&+z_0\left[\begin{Bmatrix}2\nu\\ 2-2\nu\end{Bmatrix}\cos\delta\theta_1\mp\delta\cos d\theta_1\cos(\delta+1)\theta_1\right]\Big\}+O_{1,2}(1)
\end{aligned} \tag{3. 1}$$

$$\frac{1-\nu}{G}\tau_{xz}^{(1)}=2(1-\nu)\tau_{xz}^{0}(z)+\frac{z_0}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\alpha_p^{\delta-1}\sin\alpha_p(a-x)}{e^{\alpha_p z}}\left[1-2\nu+\alpha_p z\right]-$$

$$-\frac{x_0(a-x)}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{\delta}\cos\beta_k z}{e^{\beta_k(a-x)}}=2(1-\nu)\tau_{xz}^{0}(z)+\frac{\Gamma(\delta)}{\pi\rho^{\delta}}\left\{z_0\left[(1-2\nu)\sin\delta\theta_1+\right.\right. \quad (3.2)$$

$$\left.\left.+\delta\cos\theta_1\sin(\delta+1)\theta_1\right]-x_0\delta\cos\theta_0\cos(\delta+1)\theta_0\right\}+O_3(1)$$

$$\tau_{xz}^{0}(z)=b_0\cos c_1 z-\frac{b_0\cos c_1 h-\tau_0}{\cos c_2 h}\cos c_2 z+\frac{c_0 c_2\sin c_2(h-z)}{2\cos c_2 h}$$

где $\Gamma(\delta)$ - гамма-функция Эйлера,

$$\rho=\sqrt{(a-x)^2+z^2},\qquad \theta_0+\theta_1=\frac{\pi}{2} \qquad (3.3)$$

$$\rho\cos\theta_0=a-x,\qquad \rho\sin\theta_0=z,\qquad \rho<<\min(a,h)$$

При суммировании рядов (3. 1), (3. 2) был использован только главный (первый) член формулы [6]

$$\Phi(z,s,\nu)=\frac{\Gamma(1-s)}{z^{\nu}}\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{s-1}+z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(s-n,\nu)\frac{(\ln z)^n}{n!} \qquad (3.\ 4)$$

$$\Phi(z,s,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\nu)^{-s}z^n \qquad (3.\ 5)$$

$$\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)=(2^s-1)\zeta(s)$$

Здесь $\zeta(s)$, $\zeta(s,\nu)$ - обычная и обобщенная функции Римана. Таблицы для $\zeta(s)$ содержатся в книге [5].

Явные выражения для ограниченных функций $O_p(1)$ $(p=1,2,3)$ можно получить при помощи (3.4), если при суммировании рядов (3.1) и (3.2) не ограничиваться только первым членом (3.4).

Окончательные расчетные формулы для напряжений, действующих в малой окрестности точки $B(a,0)$, имеют вид

$$\sigma_x=\sigma_x^{1}+\left(\sigma_x-\sigma_x^{(1)}\right),\ \ldots \qquad (3.\ 6)$$

где σ_x - точная формула, σ_x^{1} - приближенная.

Если аналогичным образом улучшить сходимость рядов в малой окрестности угловой точки $A(a,h)$ и удовлетворить условию

$$\sigma_z(a,h)-\sigma_x(a,h)=2G\left[f(a)-g(h)\right] \qquad (3.\ 7)$$

вытекающего из граничных условий (1. 3), то при $\tau_0 = 0$, для определения неизвестного постоянного u_0 получим следующее дополнительное уравнение:

$$\frac{u_0}{(1-\nu)\pi} = g(h) - f(a) - b_0 a c_1 \sin c_1 h + \frac{2\tau_0}{\pi} -$$

$$-\frac{4}{hc_2^2}\sum_{k=1}^{M}\left\{\frac{\left(2\beta_k^2 - c_1^2\right)\left[\lambda_k^2\left(X_k - X_M\right) - c_2^2 A_k\right]}{2\beta_k\lambda_{1k}\operatorname{cth}\lambda_{1k}a} + \frac{\tau_0 c_2^2}{\beta_k} -\right.$$

$$\left.-\left(X_k - X_M\right)\beta_k\lambda_{2k}\operatorname{th}\lambda_{2k}a\right\} + \sum_{k=1}^{N}\frac{4\alpha_p\gamma_{2p}}{ac_2^2}\left\{Z_p\left[\frac{2\alpha_p^2 - c_1^2}{2\alpha_p^2\operatorname{ch}\gamma_{1p}h} -\right.\right. \tag{3. 8}$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}\right] + \left(U_p - U_N\right)\left[\frac{\gamma_p^2\left(2\alpha_p^2 - c_1^2\right)\operatorname{th}\gamma_{1p}h}{2\alpha_p^2\gamma_{1p}\gamma_{2p}} - \operatorname{th}\gamma_{2p}h\right]\right\}$$

Здесь общие члены рядов, содержащие неизвестные коэффициенты, стремятся к нулю как $o\left(k^{-5}\right)$.

Значения перерезывающей силы и изгибающего момента, действующих в сечении $z = \text{const}$, определяются формулами

$$P(z) = 2\int_0^a \tau_{xz}(x,z)\,dx = 4G\left\{a\tau_{xz}^0(z) + u_z(a,z) - b_0 a\cos c_1 z -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k\sin\beta_k(a-z)}{h\lambda_{2k}\operatorname{cth}\lambda_{2k}a} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z_p\operatorname{sh}\gamma_{2p}(h-z) - U_p\operatorname{ch}\gamma_{2p}z}{\alpha_p a\operatorname{ch}\gamma_{2p}a}\right\} \tag{3. 9}$$

$$M(z) = 2\int_0^a x\sigma_z(x,z)\,dx$$

Прямое вычисление значений $P(z)$ и $M(z)$ по формулам (3. 9) малоэффективно, так как ряды, входящие в (3. 9) при $z \approx 0$ и $z \approx h$ сходятся медленно. Однако, если при помощи асимптотических формул (2. 7) и первой из бесконечных систем (1. 7) улучшить сходимость этих рядов, то для сечения $z = 0$ получим следующие расчетные формулы:

$$\frac{P(0)}{4G} = a\tau_{xz}^0(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_0\beta_k^{\delta-2}\lambda_{2k} - (-1)^{k-1}X_k\operatorname{th}\lambda_{2k}a}{\lambda_{2k}h} -$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{Z_p\operatorname{th}\gamma_{2p}h - z_0\alpha_p^{\delta-1}}{\alpha_p a} - \frac{U_p}{\alpha_p a\operatorname{ch}\gamma_{2p}h}\right] - \frac{x_0 h^{1-\delta}z_0 a^{1-\delta}}{\pi^{2-\delta}}\zeta(2-\delta, 1/2) \tag{3.10}$$

$$\frac{aM(0)}{4G} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma_{2p}Z_p - z_0\alpha_p^{\delta}}{\alpha_p^3} + z_0\left(\frac{a}{\pi}\right)^{3-\delta}\zeta(3-\delta, 1/2)$$

где z_0 и x_0 связаны соотношениями (2. 3). Аналогичным образом, при улучшении сходимости рядов (3. 9) для $z \approx h$ следует воспользоваться второй из бесконечных систем (1. 7). Для остальных значений z формулы (3. 9) можно считать расчетными.

Добавление. Асимптотические формулы (2.7), точнее, члены с коэффициентом u_0, а также вытекающие из них расчетные формулы для окрестности точки $A(a,h)$ и дополнительное уравнение (3.8) были получены при условии $\tau_0 = 0$, то есть, когда парность касательных напряжений в точке $A(a,h)$ не нарушена. При $\tau_0 \neq 0$ характер асимптотических поведений неизвестных коэффициентов пока ясен далеко не полностью и требует дополнительного исследования. На этой основе ограничимся только некоторыми фактами. Предположим, что для больших значений номеров имеет место

$$X_k \approx \frac{x_1}{\beta_k}, \quad U_p \approx \frac{u_1}{\alpha_p} \qquad (k, p >> 1) \tag{4. 1}$$

Тогда, из второй бесконечной системы (полученной из граничного условия на $\sigma_z(x,h)$) имеем

$$u_1 + x_1 = 4(1-\nu)\tau_0 \tag{4. 2}$$

а из третьей бесконечной системы (полученной из граничного условия на $\sigma_z(a,z)$) получим

$$u_1 + x_1 = -4(1-\nu)\tau_0 \tag{4. 3}$$

Последние два соотношения не согласуются между собой. Для выявления причины несогласия приведем приближенные формулы напряжений для малой окрестности угловой точки $A(a,h)$

$$-\frac{(1-\nu)\pi}{G}\begin{Bmatrix}\sigma_x^{(2)}\\ \sigma_z^{(2)}\end{Bmatrix} = \frac{\pi x_1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_k(h-z)}{\beta_k e^{\beta_k(a-x)}}\left[1 \pm \beta_k(a-x) \pm \frac{4(1-\nu)\tau_0}{x_1}\right] +$$

$$+\frac{\pi u_1}{a}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_p(a-x)}{\alpha_p e^{\alpha_p(h-z)}}\left[1 \mp \alpha_p(h-z)\right] = \pm\left(x_1\cos^2\theta - u_1\sin^2\theta\right) +$$

$$+\left[x_1 + u_1 \pm 4(1-\nu)\tau_0\right]\ln\frac{4h}{\pi\rho_1} + u_1\ln\frac{a}{h} + 0\left(\rho_1^2\right) \tag{4. 4}$$

$$\frac{1}{2G}\tau_{xz}^{(2)} = \tau_{xz}^0(z) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_k(h-z)}{he^{\beta_k(a-x)}}\left[\frac{x_1(a-x)}{2(1-\nu)} - \frac{2\tau_0}{\beta_k}\right] -$$

$$-\frac{u_1(h-z)}{2a(1-\nu)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_p(a-x)}{e^{\alpha_p(h-z)}} = \tau_{xz}^0(z) - \frac{2\tau_0\theta}{\pi} - \frac{(x_1+u_1)\sin 2\theta}{4\pi(1-\nu)} + 0\left(\rho_1^2\right)$$

где

$$\rho_1 \cos\theta = a - x, \quad \rho_1 \sin\theta = h - z$$
$$\rho_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (h-z)^2} << \min\{a, h\} \tag{4. 5}$$

Из (4.4) следует, что при асимптотике (4.1) и (4.2) напряжение σ_z, когда $\rho_1 \to 0$ остается ограниченным, а напряжение σ_x имеет логарифмическую особенность с коэффициентом, пропорциональным τ_0. При асимптотике (4.1) и (4.3) σ_z имеет ту же особенность с обратным знаком, а σ_x остается ограниченным. Касательное напряжение в обоих случаях остается ограниченным. Следовательно, формула (4.2) предполагает приближение к точке $A(a,h)$ по кривой, касающейся в точке A с линией $z = h$ $(\theta \to 0)$, а при (4.3) касательная к кривой будет прямая $x = a$ $(\theta \to \pi/2)$.

Если в условии (3.7) предельное значение $\sigma_z(a,h)$ вычислить по формуле (4.2), а $\sigma_x(a,h)$ - по формуле (4.3), то для определения неизвестного коэффициента u_1 снова получим дополнительное уравнение (3.8), в котором нужно сделать замену $u_0 \to u_1$ и считать $\tau_0 \neq 0$. Для облегчения дальнейших вычислительных работ приведем значения первых корней уравнения (2.9) в зависимости от коэффициента Пуассона.

Таблица

ν	δ	ν	δ	ν	δ
0.50	0.405388	0.32	0.301842	0.16	0.187198
0.48	0.394766	0.30	0.288627	0.14	0.170167
0.46	0.383923	0.28	0.275877	0.12	0.152158
0.44	0.372864	0.26	0.262159	0.10	0.132955
0.42	0.361588	0.25	0.255250	0.08	0.112262
0.40	0.350089	0.24	0.248231	0.06	0.089637
0.38	0.338359	0.22	0.233840	0.04	0.064393
0.36	0.326387	0.20	0.218926	0.02	0.035332
0.34	0.314154	0.18	0.203411	0.01	0.018699

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\delta_1 = 2 - \delta$ также является корнем уравнения (2.9).

Собственные частоты ω_0 можно определить одним из двух способов:

а) как положительные корни определителя бесконечного порядка системы (1.7). Условия (2.6) позволяют определить приближенные значения ω_0 методом редукции определителя,

б) при $\omega = \omega_0$ задача не имеет ограниченного решения, поэтому точность удовлетворения граничных условий при $\omega \approx \omega_0$ резко падает. Исходя из этого факта, собственные частоты можно определять в процессе численного решения бесконечных систем для различных значений ω с одновременной проверкой тех граничных условий, из которых получены эти системы.

После определения собственных значений, собственные формы упругой балки будем определять по формулам (1.2) и (1.5).

Литература

1. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1979. 261 с.
2. *Гринченко В. Т. , Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
3. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений. - Изв. физ-мат. ин-та В. А. Стеклова, 1930, 3, с. 41-167.
4. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. - М. : Наука, 1984. 255 с.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. - М. : Наука, 1977. 342 с.
6. *Бейтмен Г. , Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. - М. : Наука, 1973. 294 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29. 10. 1993