

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ
ПЛАСТИНКИ ПРИ УДАРЕ

ՄՈՎՏԻՍԻԱՆ Լ.Ա.

Մովսիսյան Լ.Ա.

Նարվածի դեպքում անիզոտրոպ շերտավոր սալի կայունության մասին

Մրջին հարթության նկարմամբ սիմետրիկ եւ անսիմետրիկ դասավորված անիզոտրոպ շերտավոր սալի համար դիտարկվում է կայունության խնդիր երկայնական հարվածի դեպքում: Գրվում է սալը գլանային ձեռով կայությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը:

Movsisian L.A.

About Stability of Anisotropic Laminates Plate for Impact

Исследуется устойчивость анизотропной слоистой пластинки при продольном ударе. Рассмотрены два случая: когда слои (ортоотропные) симметрично и антисимметрично перевернуты относительно координатной линии пластинки. Определено критическое время потери устойчивости по цилиндрической форме.

1. Пластинка бесконечно длинная в одном направлении и удар бесконечной массой производится по этой стороне (или сторона движется в сторону другой с постоянной скоростью [1]).

Сначала рассмотрим случай антисимметричного расположения слоев [2].

Невозмущенное состояние определяется из уравнения

$$C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 2nh\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где $2n$ - количество слоев и условий

$$u_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad u_0 = -ct \quad \text{при} \quad x = l$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (1.2)$$

По сути невозмущенное состояние не отличается от однородной пластинки [1].

Картина напряженного состояния такова. Из ударяемого конца распространяется упругая волна со скоростью $a_1 = (C_{11}/2nh\rho)^{1/2}$ и за фронтом волны в продольном направлении имеется сжатие $-T_1^0 = -C_{11}c/a_1$, а в пер-

пендикулярном направлении: $T_2^0 = -C_{12}c/a_1$. При каждом отражении от краев услия по ступенчатому закону возрастают.

Нам нужны будут выражения T_1^0 и T_2^0 в виде рядов

$$T_1^0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) \cos \lambda_m x, \quad T_2^0 = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(t) \cos \lambda_m x, \quad (1.3)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad c_0 = -C_{11} \frac{ct}{l}, \quad c_m = C_{11} \frac{2c}{m\pi a_1} (-1)^{m+1} \sin \lambda_m a_1 t$$

Уравнения устойчивости пластинки будут иметь вид [2].

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 3K_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - K_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$$

$$(C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 3K_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (1.4)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 3K_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} -$$

$$- K_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - K_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3K_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

В предположении, что края пластинки шарнирно оперты, решение (1.4) будем искать

$$u = \cos \mu y \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin \lambda_m x$$

$$v = \sin \mu y \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos \lambda_m x \quad (1.5)$$

$$w = \sin \mu y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x$$

где μ - волновое число по y . Тогда для определения критического времени потери и устойчивости получим систему [1].

$$2L_m f_m + [(2c_0 + c_{2m})\lambda_m^2 + (2d_0 - d_{2m})\mu^2] f_m +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} [\lambda_m \lambda_k (c_{m-k} + c_{m+k}) + \mu^2 (d_{m-k} - d_{m+k})] f_k +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} [\lambda_m \lambda_k (c_{k-m} + c_{m+k}) + \mu^2 (d_{k-m} - d_{m+k})] f_k = 0$$

$$\begin{aligned}
L_m &= D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + D_{66})\lambda_m^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 - X_1 / X_2 \\
X_1 &= C_{11}K_{16}^2\lambda_m^8 + [2(2C_{66} - 3C_{12})K_{16}^2 + 6C_{11}K_{16}K_{26}] \lambda_m^6\mu^2 + \\
&+ [9C_{22}K_{16}^2 - 4(2C_{66} + 5C_{12})K_{16}K_{26} + 9C_{11}K_{26}^2] \lambda_m^4\mu^4 + \quad (1.6) \\
&+ [6C_{22}K_{16}K_{26} + 2(2C_{66} - 3C_{12})K_{26}^2] \lambda_m^2\mu^6 + C_{22}K_{26}^2\mu^8 \\
X_2 &= C_{11}C_{66}\lambda_m^4 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12}C_{66})\lambda_m^2\mu^2 + C_{22}C_{66}\mu^4
\end{aligned}$$

Можно показать, что критическое время, определяемое из (1.6) (минимальное собственное значение матрицы системы), будет минимальным, если изгиб происходит цилиндрическим образом (v и w зависят только от x). Поэтому (1.4) - (1.6) можно было и не привести. Однако, следует отметить, что по виду такое решение верно и для конечной пластинки. Когда края $y = 0$, $y = b$ свободны от нормальных усилий ($T_2^0 = 0$), то вместо μ следует брать $\mu_n = n\pi / b$. Можно расположить слои таким образом, чтобы исчезли K_{16} (в [3], максимальная статическая критическая сила достигается именно тогда). В данном случае критическое время максимальным (по φ - угол поворота главного направления упругости относительно координатной оси) будет при $A_{11} > A_3$ (обозначения см. в [3]), если $\varphi = \pi / 4$, а при $A_{11} < A_3$, когда $\varphi = 0$.

При цилиндрической форме потери устойчивости (подчеркнутые члены в (1.4)) вместо (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned}
2 \left[\bar{D}_{11}\lambda_m^2 + \left(c_0 - \frac{c_{2m}}{2} \right) \right] \lambda_m f_m + \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k (c_{m-n} + c_{m+n}) f_k + \\
+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k (c_{k-m} + c_{m+k}) f_k = 0 \quad \bar{D}_{11} = D_{11} - K_{16}^2 / C_{66} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

2. При симметричном расположении слоев уравнениями невозмущенного состояния будут

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Здесь $a_2 = (C_{66} / 2nh\rho)^{1/2}$ - скорость волны сдвига, $\alpha_1 = C_{16} / C_{11}$, $\alpha_2 = C_{16} / C_{66}$

Имеются следующие условия:

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (2.2)$$

$$u_0 - ct, v_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = l$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t} = v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (2.3)$$

В данном случае помимо T_1^0 , T_2^0 появляется также сдвигающее усилие S^0 . Как и в предыдущем пункте, нам нужны будут выражения усилий в виде рядов, но для наглядности картины напряженно-деформированного состояния удобнее сначала изучить задачу операционным методом.

Подвергая (2.1), (2.3) преобразованию по t и удовлетворяя условиям (2.2) для усилий в изображениях получим

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^0 &= A_1 Z_1 + B_1 Z_2, & \bar{S}^0 &= A_2 Z_1 + B_2 Z_2 \\ A_1 &= -c \frac{C_{11} b_1}{a_1^2} \bar{A}_1, & B_1 &= -c \frac{C_{11} b_2}{a_1^2} \bar{B}_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$A_2 = -c \frac{C_{66}}{a_1^2 \alpha_1 b_1} - [b_1^2 - a_1^2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)] \bar{A}_1$$

$$B_2 = -c \frac{C_{66}}{a_1^2 b_2 \alpha_1} [b_2^2 - a_1^2 (1 - \alpha_1 \alpha_2)] \bar{B}_1$$

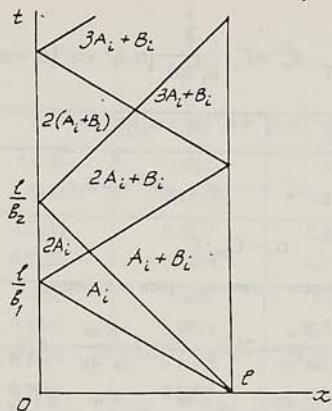
$$\bar{A}_1 = \frac{a_1^2 - b_2^2}{b_1^2 - b_2^2}, \quad \bar{B}_1 = \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_1^2 - b_2^2}$$

$$Z_i = \left(e^{-\frac{px}{b_i}} + e^{\frac{px}{b_i}} \right) \left/ \left(e^{\frac{pt}{b_i}} - e^{-\frac{pt}{b_i}} \right) \right. \quad (2.5)$$

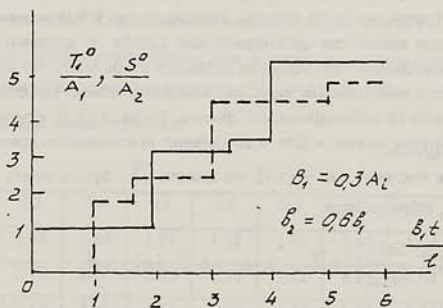
$$b_{1,2}^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \pm \left[\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \right)^2 - a_1^2 a_2^2 (1 - \alpha_1 \alpha_2) \right]^{1/2}$$

Выражение для T_2^0 получится аналогичным образом $T_2^0 = C_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial v_0}{\partial x}$.

Нетрудно по (2.4), (2.5) записать выражение для усилий, однако, для краткости записи наглядности, целесообразнее представить их в виде графиков. На фиг. 1 представлена картина усилий T_1^0 и S^0 для различных моментов времени по длине пластинки. От ударяемого конца распространяются две волны со скоростями b_1 ($b_1 > a_1$) и b_2 ($b_2 < a_2$) и при каждом отражении от концов на две "единицы" (A_i, B_i) увеличиваются. На фиг. 2 показана типичная картина усилий для ударяемого (сплошная линия) и для закрепленно-го (пунктирная линия) концов.



фиг.1



фиг.2

Приведенное решение в форме рядов выглядит следующим образом:

$$T_i^0 = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m^{(1)} \sin b_1 \lambda_m t + b_m^{(1)} \sin b_2 \lambda_m t] \cos \lambda_m x$$

$$S^0 = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m^{(3)} \sin b_1 \lambda_m t + b_m^{(3)} \sin b_2 \lambda_m t] \cos \lambda_m x$$

$$a_0^{(1)} = -C_{11} \frac{ct}{l}, \quad a_m^{(1)} = -A_1 c'_m, \quad b_m^{(1)} = -B_1 c'_m$$

$$\begin{aligned}
 a_0^{(2)} &= -C_{12} \frac{ct}{l}, & a_m^{(2)} &= C_{12} \frac{\bar{A}_1}{a_1^2 b_1 \alpha_1} [\alpha_3 b_1^2 + a_1^2 (\alpha_1 - \alpha_3)] c'_m \\
 b_m^{(2)} &= C_{12} \frac{\bar{B}_1}{a_1^2 b_2 \alpha_1} [\alpha_3 b_2^2 + a_1^2 (\alpha_1 - \alpha_3)] c'_m \\
 a_0^{(3)} &= -C_{16} \frac{ct}{l}, & a_m^{(3)} &= -A_2 c'_m, & b_m^{(3)} &= -B_2 c'_m \\
 c'_m &= \frac{2c}{m\pi} (-1)^{m+1}, & \alpha_3 &= C_{26} / C_{12}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Уравнение устойчивости в данном случае следующее:

$$\begin{aligned}
 D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \\
 + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(S^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Возможна ли потеря устойчивости такой пластинки не только по цилиндрической форме, но и по форме, зависящей от y ? И минимальное ли будет критическое время при цилиндрическом изгибе по сравнению с другими (если она возможны)? Эти вопросы остаются открытыми. Но судя по предыдущей задаче и аналогичным задачам, наверное, можно предполагать, что будет происходить по цилиндрической форме. Тогда, в (2.7) нужно оставлять только подчеркнутые члены и для определения критического времени будем иметь такую же систему, как и (1.7), но вместо \bar{D}_{11} будем иметь D_{11} , а коэффициенты c_m определяются

$$c_m = (-1)^{m+1} \frac{2cC_{11}}{m\pi a_1^2} [b_1 \bar{A}_1 \sin \lambda_m b_1 t + b_2 \bar{B}_1 \sin \lambda_m b_2 t]
 \tag{2.8}$$

Как уже отметили, критическое время определяется согласно критерию [1].

3. Для иллюстрации вышеприведенных решений рассмотрим числовой пример. В качестве его взята четырехслойная пластинка, материал которой ортотропный и характеризуется данными:

$$\text{Случай I} \quad A_{11} = A_{22}, \quad A_{66} = 0.6A_{11}, \quad A_{12} = 0.2A_{11}$$

$$\text{Случай II} \quad A_{11} = A_{22}, \quad A_{66} = 0.3A_{11}, \quad A_{12} = 0.2A_{11}$$

В табл. 1 помещены значения скоростей распространения волн, когда главное направление упругости одного слоя совпадает с координатной ($\varphi^{(1)} = 0$), а второй слой ($\varphi^{(2)}$) перевернут на указанный угол.

В каждой клетке в первых строках приведены значения для первого слу-

$\varphi^{(2)}$	0°	15°	30°	45°
a_1	1	1.018 0.9937	1.037 0.9810	1.049 0.9746
a_2	0.7700 0.5477	0.7583 0.5590	0.7217 0.5809	0.7071 0.5916
b_1	1 1	1.022 0.9951	1.048 0.9829	1.049 0.9746
b_2	0.7700 0.5477	0.7469 0.5560	0.7089 0.5777	0.7071 0.5916

В качестве единицы скорости взят случай $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$.

В табл. 2 приведены значения безразмерной скорости удара $\lambda = (c/a) / (4h^2\pi^2 / 3l^2)$ при первом прохождении волны, при которой возможна потеря устойчивости для данного момента времени ($\tau_{\text{кр}} = at/l$, $a = a_1$ при $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ для материала первого случая.

Таблица 2

$\tau_{\text{кр}}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
I	4.00	2.16	1.98	1.89	1.88	1.82	1.65	1.44	1.22
II	4.11	2.48	2.12	2.07	2.05	2.04	1.62	1.31	1.08
III	4.20	2.51	2.13	2.05	1.93	1.84	1.73	1.49	1.24
IV	4.15	2.49	2.07	2.04	2.02	1.93	1.73	1.49	1.24

Строки таблицы расположены в следующем порядке:

I - случай $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ ($\tau_{\text{кр}} = 1$ будет при $\lambda = 1$)

II - случай $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 45^\circ$ ($\tau_{\text{кр}} = 0.912$ - при $\lambda = 0.91$)

III - антисимметричный случай ($\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = 30^\circ$, $\tau_{\text{кр}} = 0.96$, $\lambda = 1.08$)

IV - антисимметричный случай ($\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = 30^\circ$, $\tau_{\text{кр}} = 0.95$, $\lambda = 1.06$)

В скобках указаны значения λ и $\tau_{\text{ф}}$, при которых пластинка теряет устойчивость по всей длине.

Как видно из таблиц, расположением слоев можно менять как скорость распространения волн, так и время потери устойчивости и поэтому можно решать вопрос о рациональном использовании возможностей материала пластинки.

4. Так как анизотропная слоистая балка по напряженно-деформируемому состоянию отличается от одномерной пластинки, то имеет смысл о ней сказать в отдельности.

Во-первых, хотя по виду уравнение устойчивости будет таким же, как и для пластинки, но значения приведенных коэффициентов жесткости будут другими, в частности,

$$C_{11}^{(0)} = 2hb \sum_{k=1}^n A_{11}^{0(k)}, \quad D_{11}^{(0)} = \frac{2h^3b}{3} \sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] A_{11}^{0(k)} \quad (3.1)$$

(для конкретности взято прямоугольное сечение и b - толщина балки). Здесь уже $A_{11}^{(0)} = 1/a_{11}$, в отличие от A_{11} (см. например, стр. 243 [4]). В то же время, если такая балка теряет устойчивость уже в плоскости xu (оставим на стороне вопрос правомерности гипотезы прямых нормалей), то для изгибной

жесткости уже будем иметь $D'_{11} = \frac{hb^3}{6} \sum_{k=1}^n A'_{11}{}^{(k)}$, где $A'_{11} = a_{66} / (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)$. Так, например, при статической потере устойчивости какая из критических сил будет больше $P_{\text{ф}}^{(1)} = D_{11}^{(0)} \lambda_1^2$ или $P_{\text{ф}}^{(2)} = D_{11}^{(1)} \lambda_1^2$ зависит не только от геометрических размеров, но и из упругих коэффициентов и расположением слоев.

Подобный же факт имеет место и при ударе. Более того, так как здесь изменением расположения слоев можно менять как скорость распространения (то есть участок, где балка сжата), так и величину сжимающей силы и жесткость изгиба, то появляется широкая возможность варьированием параметров добиться максимального момента времени потери устойчивости при заданной скорости удара или максимальной скорости при заданном времени. К примеру, при одной и той же скорости распространения волны ($\alpha_1^0 = \sqrt{C_{11}^0 / 2\rho nh}$) для потери устойчивости при $t = l / 2\alpha_1^0$ в первом приближении для относительной скорости c / α_1^0 получается

$$\frac{c}{\alpha_1^0} = \frac{2h^3}{3} \lambda_1^2 \frac{Q}{B_{11}^{(\min)} + B_{11}^{(\max)}} \quad (3.2)$$

Величина Q (для $h=2$) в одном случае будет $B_{11}^{(\min)} + 7B_{11}^{(\max)}$ а в другом - $B_{11}^{(\max)} + 7B_{11}^{(\min)}$.

Л и т е р а т у р а

1. *Мовсисян Л.А.* Устойчивость балки при быстрых нагружениях.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т.24, №1, с.38-50.
2. *Мовсисян Л.А.* Некоторые задачи вязкоупругих анизотропных слоистых пластин и оболочек.- Изв. АН Арм ССР, Механика, 1989, т.42, №3, с.37-44.
3. *Мовсисян Л.А.* К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, №4, с.3-12.
4. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки.- М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
10.08.1993