ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 2, 1995 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТОЗВУКОВОЙ ВОЛНОЙ

АЗАТЯН Л. Д.

Линеаризованная система уравнений приводится к интегро-дифференциальному уравнению второго порядка для прогиба пластинки, которое решается численными методами. Произведен анализ полученных результатов.

Ազատյան Լ.Դ.

Շերտավոր սալի օպտիմալ կառուցվածքի որոշումը մագնիսաակուստիկ ալիքի փոխազդեցության դեպքում

Աշխատանքում դիտարկված է շերտավոր սալի օպտիմալ պրոյեկտման խնդիրը մագնիսաակուստիկ ալիքի փոխազդեցության դեպքում: Գծայնացված հավասարումների սիստեմը բերված է երկրորդ կարգի ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարման սալի ճկվածքի նկատմամբ: Հավասարումը լուծված է թվային մեթոդներով: Ստացված արդյունքները բերված են աղյուսակում:

Azatian L. D.

Determination of optimal structure of slice plate-stripe, interacting with magnetoacustic wave.

Пусть упругая слоистая пластинка-полоса шириной l $(0 \le x \le l, -\infty < y < \infty)$ и постоянной толщины h отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x, y. Пластинка, изготовленная из непроводящего материала $(\sigma = 0)$, помещена во внешнем магнитном поле с вектором магнитной индукции $\overline{B}_0(0, B_0, 0)$, параллельным оси oy. Предполагается, что пластинка-полоса по сторонам $x = 0$, $x = l$ шарнирно закреплена и реализуется цилиндрическая форма изгиба пластинки.

Пусть далее рассматривается идеальная плазма, то есть рассматривается невязкий, нетеплопроводный газ с бесконечной проводимостью. Известно, что в идеально проводящем газе существуют три скорости распространения слабых разрывов: альфвеновские, быстрые и медленные магнитозвуковые волны. В настоящей работе рассматривается случай, когда вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен плоскости течения xoz. Известно, что в направлении, перпендикулярном магнитному полю, скорости альфвеновских и медленных магнитнозвуковых волн, обращаются в нуль, то есть имеется только быстрая магнитозвуковая волна, которая распространяется со скоростью $\sqrt{c_0^2 + a_0^2}$, где c_0 - скорость звука в невозмущенном газе, $a_0^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0$ - скорость распространения электромагнитных волн Альфвена, ρ_0 - плотность невозмущенного газа.

Уравнения, описывающие движение идеально проводящего газа в магнитном поле, имеют вид [1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = (\overline{B}\nabla)\overline{V}' - (\overline{V}'\nabla)\overline{B} - \overline{B}(\nabla\overline{V}') \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{V}'\nabla\right)\rho' + \rho'\nabla\overline{V}' = 0 \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{V}'\nabla\right)\overline{V}' + \frac{1}{\rho'}\nabla\rho' - \frac{1}{4\pi\rho'\mu}(\nabla\times\overline{B})\times\overline{B} = 0 \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{V}'\nabla\right)P' + c_0^2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{V}\nabla\right)\rho' = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь ρ' - плотность, P' - давление, $\overline{V}'$ - скорость частиц газа. Так как магнитная и диэлектрическая проницаемости газа мало отличаются от единицы, поэтому мы будем полагать $\mu = \varepsilon = 1$.

Уравнение движения несимметрично собранной пластинки-полосы имеет вид [2]

$$
\left(D_{11} - \frac{K_{11}^2}{C_{11}}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z
\tag{2}
$$

где w - прогиб, $m_0 = \sum_{s=1}^{n}\rho_s h_s$, h_s - толщина s-го слоя, ρ_s - плотность материала s-го слоя, D_{11}, C_{11}, K_{11} - жесткости, определяющиеся по известным формулам [2]

$$
\begin{aligned}
&C_{ik} = \sum_{s=1}^{m+n} B_{ik}^{(s)}(\delta_s - \delta_{s-1}) \\
&K_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m+n} B_{ik}^{(s)}\left[(\delta_s - \Delta)^2 - (\delta_{s-1} - \Delta)^2\right] \\
&D_{ik} = \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{m+n} B_{ik}^{(s)}\left[(\delta_s - \Delta)^3 - (\delta_{s-1} - \Delta)^3\right]
\end{aligned}
$$

Z - нормальная составляющая внешней поверхностной нагрузки, которая имеет вид

$$
Z = P_0 + P + T_{zz}
\tag{3}
$$

В (3) P_0 - давление в падающей волне, P - давление в отраженной и излученной волнах, T_{zz} - напряжения Максвелла в газе. Влиянием напряжений Максвелла в вакууме пренебрегается. Уравнения электромагнитного поля в вакууме (внутри пластинки) имеют вид

$$\operatorname{rot}\overline{B}=\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\qquad \operatorname{rot}\overline{E}=-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\overline{B}=0\qquad \operatorname{div}\overline{E}=0 \tag{4}$$

$\overline{E}$ - вектор напряженности электрического поля.

Так как рассматриваются поверхности слабого разрыва (малые возмущения), то для нахождения малых величин

$$\overline{b}=\overline{B}-\overline{B}_0,\quad P=P'-P_0,\quad \rho=\rho'-\rho_0,\quad \overline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}'(x,z) \tag{5}$$

может быть применена теория возмущений. Здесь индексом "0" обозначены параметры невозмущенного газа впереди магнитозвуковой волны. После подстановки (5) в основную систему уравнений магнитной газодинамики (1) и линеаризации, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial b_y}{\partial t}=-B_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{B_0}{4\pi\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x}\\
&\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{B_0}{4\pi\rho_0}\frac{\partial b_y}{\partial z}\\
&\frac{\partial P}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right)=0
\end{aligned} \tag{6}$$

где b_x, b_y, u, v - проекции векторов $\overline{b}$ и $\overline{\mathrm{v}}$ на оси Ox, Oz.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к совместному решению уравнений (2) и (6) при граничных условиях шарнирного опирания по краям $x=0$, $x=l$, нулевых начальных условиях, условии затухания возмущений на бесконечности и контакта среды с пластинкой.

Введем функцию $\varphi(t,x,z)$ такую, что

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad \mathrm{v}=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{7}$$

Исключая из уравнений (6) P, b_y, и используя (7), для функции φ получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{c_0^2+a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{8}$$

Из второго и третьего уравнений системы (6) с использованием (7) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}P+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}b_y\right)=0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}P+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}b_y\right)=0$$

Отсюда следует, что выражение в скобках является функцией только t.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}P+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}b_y=f(t)$$

Это выражение справедливо для всех точек плоскости течения и неизвестную функцию $f(t)$ можно определить по заданным значениям функции φ и других характеристик в некоторой точке. Если функцию $\varphi(t,x,z)$ определять с точностью до аддитивной постоянной (поле скоростей от этого не меняется), то функцию $f(t)$ можно положить равной нулю

$$P+\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{B_0}{4\pi}b_y=0 \qquad (10)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (6) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P-\frac{\rho_0 c_0^2}{B_0}b_y\right)=0 \qquad (11)$$

Так как в момент $t=0$ возмущения равны нулю, то из (11) следует

$$P=\frac{\rho_0 c_0^2}{B_0}b_y \qquad (12)$$

Из соотношений (10) и (12) следует

$$P=-\frac{\rho_0}{1+a_1^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (13)$$

где $a_1^2=a_0^2/c_0^2$

То есть в результате решения уравнения (8) и определения функции $\varphi(t,x,z)$ можно по формуле (13) определить возмущенное давление. Уравнение (8) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \qquad \text{при} \quad t=0$$

$$\varphi \to 0 \qquad \text{при} \quad z \to \infty \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t} \qquad \text{при} \quad z = 0$$

Здесь φ_0 - потенциал скорости падающей волны, который задается в виде экспоненциально затухающей функции

$$\varphi_0 = \frac{P^0 l}{\alpha \rho_0 \sqrt{c_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}}} l^{-\alpha(\tau + \bar{z})} H(\tau + \bar{z})$$

где $\tau = \sqrt{c_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}}\, t / l$, $\bar{z} = z / l$, P^0 - давление на фронте волны, $\alpha - \text{const}$, определяющая скорость падения давления за фронтом волны, H - единичная функция Хевисайда. В случае шарнирного закрепления краев пластинки - полосы функция прогиба $w(t,x)$ и потенциалы скоростей $\varphi_0(t,x,z)$ и $\varphi(t,x,z)$ можно представить в виде

$$w(t,x) = \sum_n w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\varphi_0(t,x,z) = \sum_n \varphi_{0n}(t,z) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

$$\varphi(t,x,z) = \sum_n \varphi_n(t,z) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Здесь функции $w_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ являются неизвестными и подлежат определению. После подстановки решения в виде (15) уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \varphi_n = \frac{1}{c_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} \tag{16}$$

Применяя к (16) интегральное преобразование Лапласа по времени [3] и учитывая условие (14), в области изображений получим

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}_n}{\partial z^2} - \left(k^2 + \frac{s^2}{c_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}} \right) \overline{\varphi}_n = 0 \tag{17}$$

где $k^2 = n^2 \pi^2 / l^2$, s - параметр преобразования, черточкой обозначены преобразованные по Лапласу функции. Последнее условие в (14) в области изображений записывается в виде

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_{0n}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\varphi}_n}{\partial z} = -s\overline{w}_n \tag{18}$$

Решение уравнения (17), удовлетворяющее второму условию из (14) и условию (18), записывается следующим образом:

$$\varphi_n = \frac{e^{-\sqrt{k^2+\frac{s^2}{c_0^2+a_0^2}}\,z}}{\sqrt{k^2+\frac{s^2}{c_0^2+a_0^2}}}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}_{0n}}{\partial z}+s\overline{w}_n\right) \tag{19}$$

При переходе к оригиналам с помощью теоремы о свертке функций [3] искомая величина P, согласно (13), получается в виде

$$\begin{gathered} P=-\frac{c_0\rho_0}{\sqrt{1+a_1^2}}\sum_n\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial z}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1+\right. \\ \left.+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \end{gathered} \tag{20}$$

где $k_1^2=k^2\left(c_0^2+a_0^2\right)$, J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для нахождения величины T_{zz}, входящей в правую часть уравнения движения пластики-полосы, надо найти компоненту b_y индуцированного в газе магнитного поля в направлении оси oy. Определяя b_y по формуле (12) с учетом (20), окончательно для поверхностной нагрузки Z получим

$$\begin{gathered} Z=\sum_n\left\{P_{0n}-c_0\rho_0\sqrt{1+a_1^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial t}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь использовано представление давления P_0 в виде

$$P_0=\sum_n P_{0n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Перейдем к решению уравнения (2). Подстановка (15) и (21) в уравнение (2) приводит к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{gathered} \left(D_{11}-\frac{K_{11}^2}{C_{11}}\right)\frac{n^4\pi^4}{l^4}w_n+m_0\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}=P_{0n}-c_0\rho_0\sqrt{1+a_1^2}\times \\ \times\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{0n}}{\partial z}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\partial w_n}{\partial t}J_0\left[k_1(t-\tau_1)\right]d\tau_1\right\} \end{gathered} \tag{22}$$

Если воспользоваться приближенными формулами для расчета возмущенного давления, которые являются обобщением формулы для давления, полученной на основании гипотезы плоского отражения в гидроупругости на случай магнитоупругости, то формула (21) упростится и примет вид

$$Z = \sum_n \left[P_{0n} - c_0 \rho_0 \sqrt{1+a_1^2} \left(\frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial t} \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{23}$$

С использованием (23) уравнение (22) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого запишется в виде [4]

$$w(t,x) = \left[1 + \frac{1}{\left(1+a_1^2\right)} \right] \frac{4P^0}{\pi m_0} e^{-\beta t} \sum_n (-1)^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} \times$$
$$\times \frac{\gamma \sin \omega'_n t - \omega'_n \cos \omega'_n t + \omega'_n e^{-\gamma t}}{n\omega'_n \left(\omega'^2_n + \gamma^2\right)} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

при $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$

$$w(t,x) = \left[1 + \frac{1}{\left(1+a_1^2\right)} \right] \frac{4P^0}{\pi m_0} e^{-\beta t} \sum_n (-1)^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} \times$$
$$\times \frac{\omega''_n \operatorname{ch} \omega''_n t - \gamma \operatorname{sh} \omega''_n t + \omega''_n e^{-\gamma t}}{n\omega''_n \left(\omega''^2_n - \gamma^2\right)} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{24}$$

при $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$

Здесь $\beta = \left(\rho_0 c_0 \sqrt{1+a_1^2}\right) / m_0$, $\gamma = \alpha c_0 / l - \beta$

$$\omega_0^2 = \left(D_{11} - \frac{K_{11}^2}{C_{11}} \right) \frac{n^4 \pi^4}{l^4 m_0}, \quad \omega'_n = \left(\omega_0^2 - \beta^2\right)^{1/2}, \quad \omega''_n = i\omega'_n$$

Далее ставится оптимизационная задача: определить такое распределение безразмерных толщин слоев пластинки, которому соответствует пластинка максимальной жесткости, то есть найти

$$\min_{\bar{h}_s} \max_{t,x} w\left(t, x, \bar{h}_s\right)$$

при ограничениях $0 \le \bar{h}_s = h_s / h \le 1$, $0 \le x \le l$, $t \ge 0$.

Проведены численные исследования для трех случаев: 1) двухслойная полоса состоит из слоев композиционного материала типа боропластика и пластмассы; 2) полоса состоит из трех слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости. Средний слой изготовлен из пластмассы, два наружных слоя - из композиционного материала, 3) средний слой изготовлен из композиционного материала, а два наружных слоя - из пластмассы. В качестве внешней среды выбран воздух ($\rho_0 = 1.225$ кг/м³, $c_0 = 334$ м/с).

Численные расчеты проведены при следующих значениях параметров $\lambda = h/l = 0.05$; $\alpha = 0.1$; $a_1 = 0$; 0.01; 0.05; 0.1; 0.5; 1.

Оптимальные значения прогибов w и соответствующие им величины безразмерных толщин слоев для различных значений параметра a_1 приведены в таблице.

Таблица

I вариант						
a_1	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\overline{h}_1$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
$\overline{w}$	0.11860	0.11859	0.11844	0.11798	0.10604	0.0869

II вариант						
a_1	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\overline{h}_1$	1	1	1	1	1	1
$\overline{w}$	0.17538	0.17537	0.17515	0.17446	0.15658	0.12788

III вариант						
a_1	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\overline{h}_1$	1	1	1	1	1	1
$\overline{w}$	0.17538	0.17537	0.17515	0.17446	0.15658	0.12788

Здесь $\overline{h}_1 = h_1 / h$, $\overline{w} = w / h$, h_1 - толщина слоя из композиционного материала.

Из таблицы следует, что вариант несимметричной двухслойной пластики является наилучшим. Как показывают численные расчеты, прогибы w получаются минимальными в случае, когда толщина h_1 слоя из композиционного материала равна $0.7h$. Как показывают результаты численного анализа для случая рассмотренных конкретных материалов оптимальные проекты для второго и третьего вариантов организации пакета пластинки-полосы по толщине совпадают и вырождаются в однослойный, целиком изготовленный из композиционного материала.

При ограничении количества композиционного материала оптимальными могут быть варианты пластинок слоистой структуры.

Как видно из таблицы, прогибы пластинки-полосы уменьшаются с ростом параметра a_1, характеризующего магнитное поле, то есть магнитное поле уменьшает прогибы пластинки.

Этот эффект может быть использован практически для ослабления воздействия ударной волны на объекты, находящиеся в электропроводящей жидкости (газе) при наличии магнитного поля.

Расчеты проведены на основе точной модели (уравнение (22)) и приближенной (формулы (24)). Результаты, полученные для обоих случаев, практически совпадают.

Автор благодарит В. Ц. Гнуни за постановку задачи и консультации.

Литература

1. *Jeffrey A., Taniuti T.* Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodinamics. New Jork, London, 1964.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания.- М.: Наука, 1967.
3. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.- М.: Наука, 1965.
4. *Аветисян Дж. К.* Воздействие акустической волны давления на динамический изгиб бесконечной полосы.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, Ереван, 1989, (деп. в ВИНИТИ, 16. 08. 89, № 5503-В89).

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
23. 09. 1993г.